A1 base: Polinomi e numeri complessi

Polinomio: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$a_n, a_{n-1}, \dots a_0 \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, A o K con somma e prodotto

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{C}$$

pol.

- algebrico: $a_n \circledast^n + a_{n-1} \circledast^{n-1} + \dots + a_0$
- funzionale: $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{C} \dots) \quad (\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{C} \dots)$

$x, \circledast \qquad 10 \qquad 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 3 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-3} + \dots$

$$5x^3 + 3x^2 + 3 + 2x^{-1} + x^{-3}$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2 & x^2 + x + 1 \\
\cline{2-2}
x^3 + x^2 + x & x - 1 + 3x^{-2} \\
\cline{1-1}
-x^2 - x + 2 & \\
-x^2 - x - 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad 3 & \\
3 + 3x^{-1} + 3x^{-2} & \\
\cline{1-1}
-3x^{-1} - 3x^{-2} &
\end{array}
$$

$$x^3 + 2 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + 3$$

$\frac{p(x)}{q(x)}$ funzione razionale

grado di $p(x)$ $\quad \deg p(x)$ = massima potenza di x che compare in $p(x)$

funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$p(x)$

$\deg(0)$ $\begin{cases} -\infty \\ \text{non definito} \end{cases}$

Fattorizzazione unica dei polinomi

$p(x)$ è $\boxed{\text{irriducibile}}$ se non si può scriverlo come $p(x) = a(x) \cdot b(x)$ con $0 < \deg(a(x)) < \deg(p(x))$.

1) $\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$

2) $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$

3) $\deg(p(x)) \geq 0 \quad \forall\, p(x)$ non nullo

Ogni polinomio $p(x)$ si può scrivere come prodotto di un numero finito di polinomi irriducibili in modo unico a meno di fattori di grado 0

polinomio $\boxed{\text{monico}}$ $\quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad$ è monico se $a_n = 1$

$$2x+2 = 2(x+1) = 1\cdot(2x+2)$$

$$2x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 1\cdot(2x+1)$$

$$p(x) = q_1(x)\cdot q_2(x)\cdot \dots \cdot q_k(x)\cdot A$$

$\deg A = 0 \quad \deg q_i > 0$

su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$

$$p(x) = q_1(x)\cdot \ \dots \ q_k(x)\ A$$

$\deg A = 0$, q_i monici

$\deg q_i > 0$

$$p(x) = a_1(x)\cdot q(x) + r_1(x)$$

divisione con resto

$\deg(r(x)) < \deg(p(x))$ o $r(x) = 0$

$$q(x) = a_2(x)\cdot r_1(x) + r_2(x)$$

$$r_1(x) = a_3(x)\cdot r_2(x) + r_3(x)$$

$\deg p(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) >$

$> \deg r_3(x) \dots$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$d(x) \mid p(x) \quad d(x) \mid q(x) \Rightarrow d(x) \mid r_1(x) \Rightarrow d(x) \mid r_2(x)$

$\ldots \quad d(x) \mid r_k(x)$ $\begin{cases} r_k(x) = 0 & (p(x), q(x)) = r_{k-1}(x) \\ \deg r_k(x) = 0 & (p(x), q(x)) = 1 \end{cases}$

$p(x) = A \cdot q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x) = A' \cdot q_1'(x) \cdot q_2'(x) \cdot \ldots \cdot q_h'(x)$

$q_1(x)$ è irriduc. $\Rightarrow \exists\, i$ t.e. $q_1(x) \mid q_i'(x)$

$\Rightarrow q_i'(x) = A_i \cdot q_1(x) \quad \deg A_i = 0$

$x^2 + 1$ su $\mathbb{R}$ è irriducibile

su $\mathbb{C}$ esiste i $\quad i^2 = -1$

$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

$x^2 + 1$ su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\quad 2 \quad 2^2 + 1 = 5$

$$(x+2)(x-2) = x^2-4 \equiv x^2+1 \pmod 5$$

x^4+1 su $\mathbb{R}$ è irriducibile

y^2 $\qquad x^2=y$

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) = x^4+\cancel{2x^2}+1-\cancel{2x^2}=x^4+1$$

Polinomi in più variabili:

$$x^2+y^2+z^2-\underbrace{xyz}$$

$\deg(xyz)=3$

$\deg_x(xyz)=1$

anche in questo caso la fattorizzazione in irriducibili esiste ed è unica.

se $d(x)$ è il MCD di $p(x)$ e $q(x)$

$d(x)=(p(x),q(x))$ allora esistono $a(x), b(x)$

tali che $\quad a(x)\cdot p(x)+b(x)\cdot q(x)=d(x).$

$\quad 8 \quad 3 \quad 7 \quad 1000000$

ineffetti $d(x)$ ha il grado più piccolo ottenibile in combinazioni del tipo $a \cdot p + b \cdot q$

Teorema di Ruffini $p(x)$ polinomio $a \in A$

se $p(a) = 0$ allora $(x-a) \mid p(x)$

essere irriducibile

x^4+1

non avere radici

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \rightsquigarrow p(x) = (x-2)\, q_1(x)\, q_2(x)$$

$$a^2 = b^3 + 9 \qquad a^2 - 9 = b^3 \qquad (a+3)(a-3) = b^3$$

Principio di identità dei polinomi

$\deg(p(x)) = n = \deg(q(x))$

$p(x_1) = q(x_1) \quad p(x_2) = q(x_2) \quad \dots \quad p(x_{n+1}) = q(x_{n+1})$

Allora $p(x) = q(x)$

$(p-q) = B(x) \qquad B(x_i) = 0 \qquad i = 1 \dots n+1$

$\deg(B(x)) \leq n \qquad B(x) = \underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}_{\deg > n} \cdot \tilde{B}(x)$

Allora $B(x) \equiv 0 \Rightarrow p(x) = q(x)$.

$\square$

Corollario: $\deg p(x) = n \quad p(x)$ ha al più n radici

n disp. $x+y \mid x^k + y^k = p_k(x) \qquad x + y \qquad x^k + y^k \qquad A = \left\{ \begin{matrix} \text{polinomi in} \\ y \end{matrix} \right\}$

$x - y \mid x^k - y^k = \tilde{p}_k(x)$

$-y \in A \qquad p_k(-y) = (-y)^k + y^k = 0$

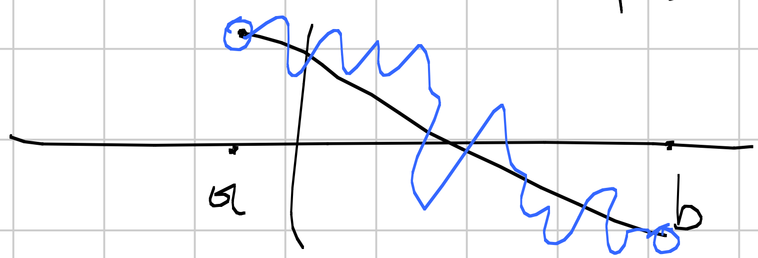
$p_k : A \to A \qquad \Rightarrow p_k(x) = (x-(-y)) \cdot q(x)$

$\tilde{p}_k(y) = 0 \quad \Rightarrow \tilde{p}_k(x) = (x-y)\,\tilde{q}(x).$

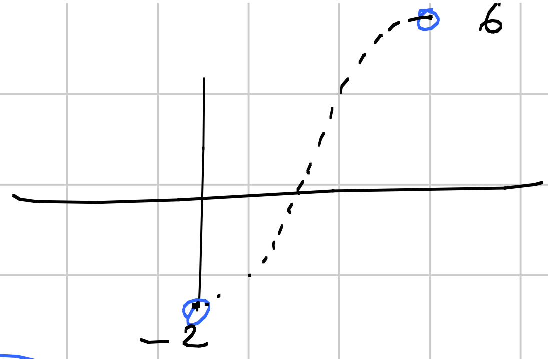
Su $\mathbb{R}$

Teorema:* ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice.

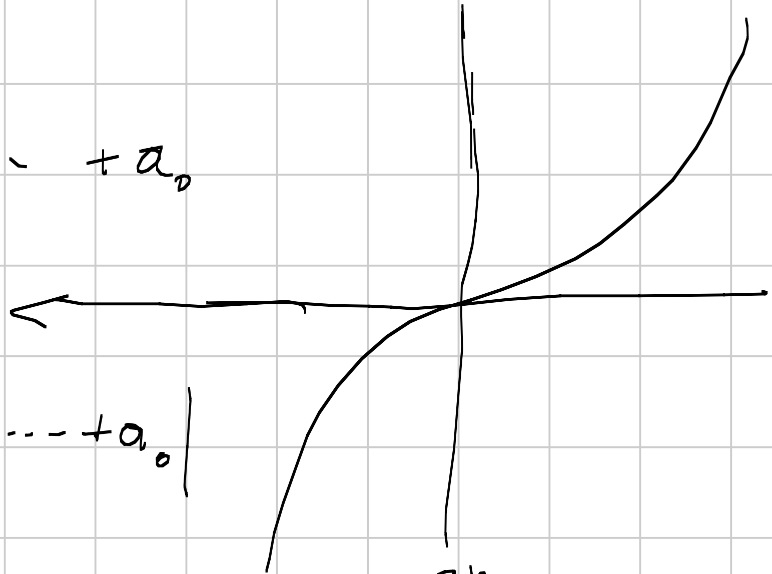
Teorema (esistenza degli zeri, versione per polinomi)
$p(x)$ polinomio, $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad p(a) \cdot p(b) < 0$
allora tra a e b c'è una radice di p.



su $\mathbb{Q}$ $\quad x^3-2$



Dim. teorema*: $\quad a_{2n+1}x^{2n+1}+\dots+a_0$



$M = \max_{i=0,\dots,2n} a_i$

$$(2n+1)\cdot M\cdot|x|^{2n} > |a_{2n}x^{2n}+\dots+a_0|$$

se $x>1$

$$\sum_{i=0}^{2n}|a_i x^i| < (2n+1)M|x|^{2n}$$

$|a_{2n}x^{2n}| \le M|x|^{2n}$

$|a_{2n-1}x^{2n-1}| < M|x|^{2n}$

$\vdots$

$$\underbrace{\left|a_{2n+1}\,x^{2n+1}\right|} > (2n+1)\cdot M\,|x|^{2n}$$

$|a_{2n+1}|\cdot x > (2n+1)M \qquad x > \dfrac{(2n+1)\cdot M}{|a_{2n+1}|}$

quindi se $\overline{x} = 2\dfrac{(2n+1)M}{|a_{2n+1}|}+1$

$p(\bar{x})$ ha lo stesso segno di $a_{2n+1}x^{2n+1}$ quindi ha segno opposto a $p(-\bar{x})$. Per il teorema di esistenza degli zeri, p ha una radice.

$\square$

$$p(x) = (x-1)^3 \cdot (x-2)$$

Quante radici ha p? Due: 1 e 2.

Però 1 ha molteplicità 3
2 " " 1

Se $\deg(p(x)) = n$, la somma delle molteplicità delle radici è $\leq n$.

$\underline{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}}$

$2x \pmod 4$ ha 2 radici.

Su $\mathbb{Q}$: $a_n x^n + \dots + a_0$ $a_i \in \mathbb{Q}$, (possiamo anzi, supporre che gli a_i siano interi)

Se $\frac{p}{q}$ è radice $p, q \in \mathbb{Z}$ $(p,q) = 1$, allora $q \mid a_n$ e $p \mid a_0$.

Dim.: $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$ molt. $\cdot q^n$

$$\underbrace{a_n p^n + \overbrace{a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1}}^{\text{multipli di } q}}_{\text{multipli di } p} + a_0 q^n = 0$$

(Criterio della radice razionale)

Lemma di Gauss $p(x)$ pol. a coefficienti interi monico. Supponiamo che

$p(x) = a(x) \cdot b(x)$ $\quad$ $a(x)$ e $b(x)$ hanno coeff. razionali.

Allora p si fattorizza anche con $\tilde{a}(x)$ e $\tilde{b}(x)$ a coeff. interi con $\deg(\tilde{a}(x)) = \deg(a(x))$ e $\deg(\tilde{b}(x)) = \deg(b(x))$

$$2x+1 = 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right) \qquad 1\cdot(2x+1)$$

(Vale anche con n fattori)

Relazione tra radici e coefficienti

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2 + (\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)x - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ $\quad$ $p(x)$ monico grado n

$$p(x) = x^n - (\lambda_1 + \dots \lambda_n)x^{n-1} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \dots \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_2\lambda_n + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n) \cdot x^{n-2} + \dots + (-1)^k \sum_{j_1<j_2<\dots<j_n} (\lambda_{j_1}\cdot\lambda_{j_2}\cdot \dots \cdot\lambda_{j_k})\, x^{n-k} + \dots + (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \lambda_i$$

$s_0 = 1 \qquad s_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \qquad s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n$

$s_3 = \sum$ (prodotti a 3 a 3) $\quad \dots \quad s_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

$s_i(1, 2, \dots n) = s_i(2, 1, 3, \dots n) = s_i(n, n-1, \dots, 2, 1) =$

$= s_i(f(1), f(2), \dots, f(n)) \qquad f : [1, \dots n] \to [1, \dots, n]$

bigettiva

(permutazione)

$$\boxed{s_i(x_1, \dots, x_n) = s_i(x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)}) \text{ per ogni permutaz. } f}$$

le s_i sono funzioni simmetriche

σ_i sono le funz. simmetriche elementari che sono $\quad \sigma_0 = 1 \quad \sigma_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\sigma_2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$

$\sigma_3 = \lambda_1^3 + \dots + \lambda_n^3$

$\vdots$

$\sigma_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n$

Teorema: Se $p(x_1 \dots x_n)$ è simmetrico, <u>Allora</u>

$$p(x_1 \dots x_n) = P(\sigma_1(x_1 \dots x_n), \dots, \sigma_n(x_1 \dots x_n)).$$

$$p = x^2y + xy^2 = \underbrace{(x+y)}_{s_1}\,\underbrace{xy}_{s_2} \qquad P(t_1,t_2) = t_1 t_2$$

$$P(s_1(x,y), s_2(x,y)) = P(x+y, xy)$$

$$s_1 = \sigma_1 \qquad s_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2}{2}$$

$$p = \sigma_1 \cdot \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2)}{2} = \frac{\sigma_1^3}{2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} \qquad \overline{P}(t_1,t_2) = \frac{t_1^3}{2} - \frac{t_1 t_2}{2}$$

$$p \;\Big|\; \sigma_2$$

$$\begin{array}{l|l} xy^2 + x^2y & y^2 + x^2 \\ \hline xy^2 + x^3 & x \\ \hline -x^3 + x^2y & \\ x^2y - x^3 & \end{array}$$

$$(y^2+x^2)(y+x) = y^3+yx^2+xy^2+x^3$$

$$p \quad - \quad " \qquad = -y^3-x^3 =$$

$$p = \sigma_2(x,y)\cdot(x+\dots)+r(x,y)$$

$$\sigma_1^3 = y^3+3y^2x+3yx^2+x^3$$

$$-\sigma_1^3 = -(\qquad\qquad)$$

$$p - \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1^3 = 3p$$

Corollario del teo. sul grado dispari:

su $\mathbb{R}$ i polinomi irriducibili hanno grado ≤ 2.

x^2+ax+b $\qquad a^2-4b<0$ non ho radici reali

per avere un "numero" $\overline{x}$ t.c. $\overline{x}^2 = a^2-4b<0$,

basta avere i t.c. $i^2=-1$: dopo, pongo

$k = \sqrt{|a^2-4b|}$ e $(ki)^2 = \left(\sqrt{|a^2-4b|}\right)^2\cdot i^2 = |a^2-4b|\cdot(-1) =$

$= a^2 - 4b.$

$(-i)^2 = -1 \quad : \quad -i = (-1) \cdot i$

$\Rightarrow (-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$

$i \longleftrightarrow -i$

$\sqrt{2} \qquad -\sqrt{2} \qquad\qquad\qquad \ast \qquad -\ast$

$x^2 = i + 2$

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi, $p(x)$ ha una radice (e quindi tutte) nei complessi.

Numero complesso è $a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$b = 0$ "reali"

$a = 0$ "immaginari puri"

$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + ibc + iad =$$

$$= (ac-bd) + i(bc+ad)$$

parte reale parte immaginaria

$$-(a+ib) = -a + i(-b) = -a - ib$$

$$(a+ib)^{-1} \; ? = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \qquad (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$$

$$(a+ib)\frac{(a-ib)}{a^2+b^2} = 1$$

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)}$$

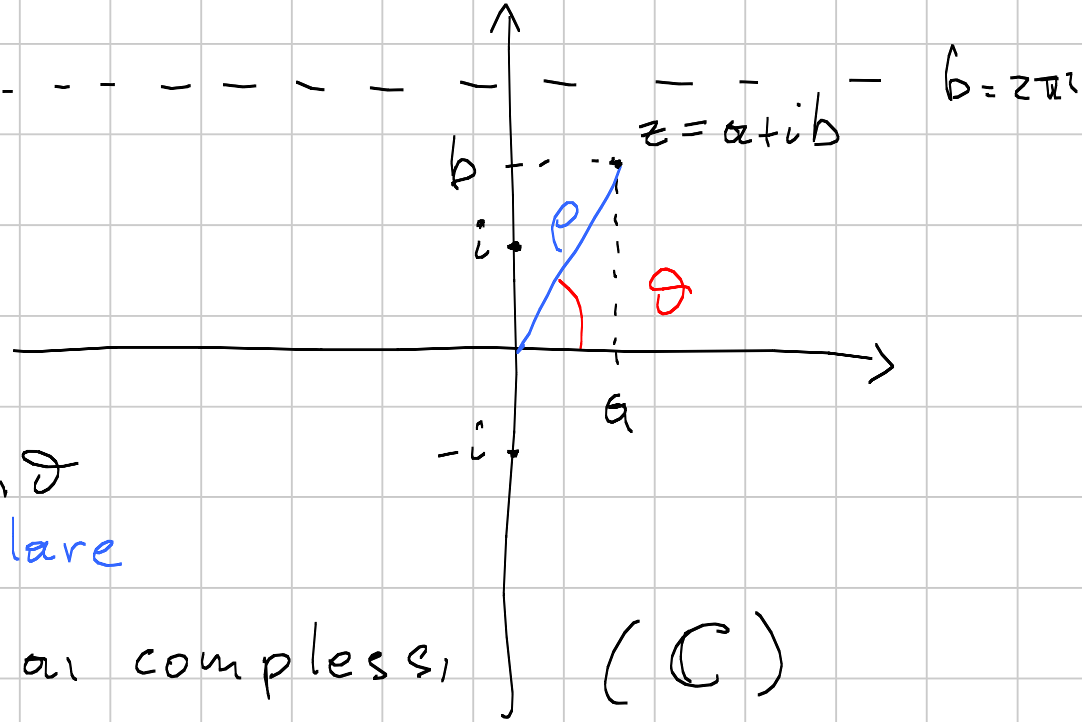
norma del num. compl.

$a-ib$ è il coniugato di $a+ib$

z num. complesso

$\bar{z}$ coniugato

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$



$a+ib = \rho\cos\vartheta + i\rho\operatorname{sen}\vartheta$

forma polare

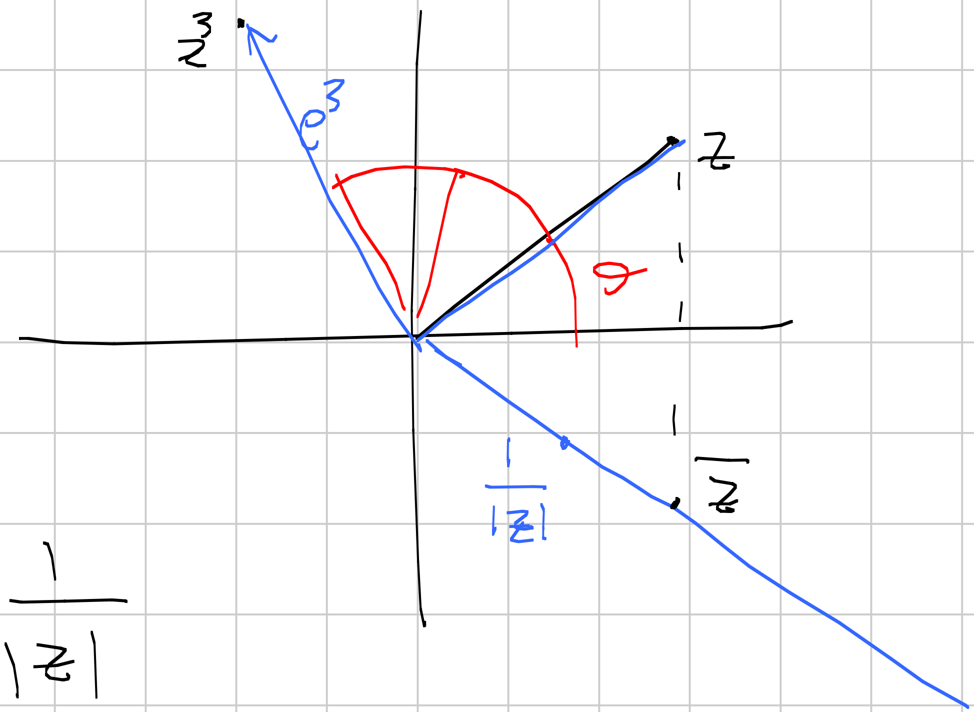
e^x si può estendere ai complessi ($\mathbb{C}$)

$e^z = e^{a+ib}$ $\qquad e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$

$e^a \rightsquigarrow \rho \qquad e^{ib} \longrightarrow \vartheta \qquad b = \vartheta$

$z^n \qquad z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \qquad z^n = \rho^n \cdot e^{in\vartheta} = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\operatorname{sen}(n\vartheta))$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$$

$$\parallel$$

$$\left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

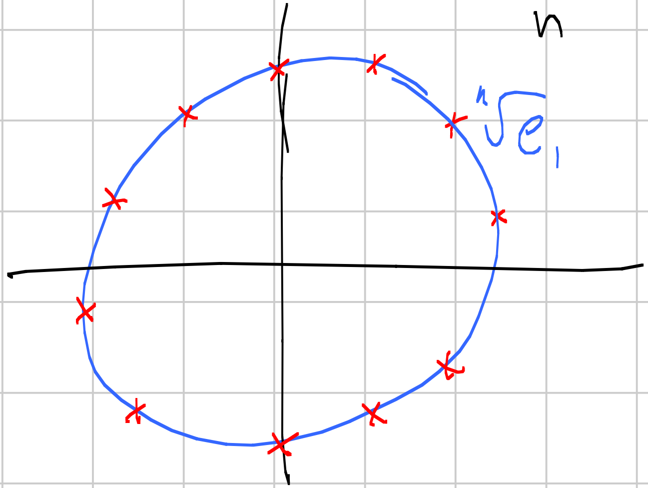
$$\rho_1 \cdot e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

$x^n = z_1$ esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ t.c. $\lambda_i^n = z_1$

$z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ $\lambda_1 = \bar{\rho} e^{i\bar{\vartheta}}$ $\lambda_1^n = \bar{\rho}^n \cdot e^{in\bar{\vartheta}}$

$\lambda_1^n = z_1$ $\rho_1 = \bar{\rho}^n$ $\vartheta_1 = n\bar{\vartheta} + 2k\pi$

$$\bar{\rho} = \sqrt[n]{\rho_1} \qquad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta_1}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1$$



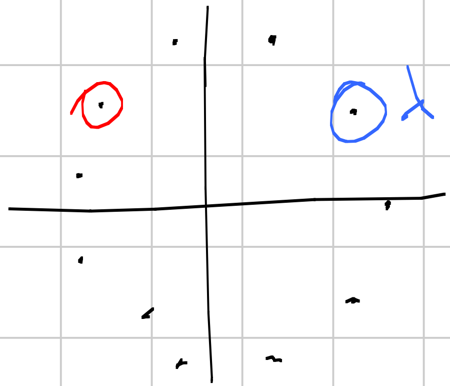
$$e^{3\vartheta i} = \cos(3\vartheta) + i\,\text{sen}(3\vartheta)$$

$$\parallel$$

$$(e^{\vartheta i})^3 = (\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta)^3 = R + i(3\cos^2\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta - \text{sen}^3\vartheta)$$

Radici di 1 sui reali: $\begin{cases} 1 & \text{se } \sqrt[n]{\ } \; n \text{ dispari} \\ 1, -1 & \text{se } \sqrt[n]{\ } \; n \text{ pari} \end{cases}$

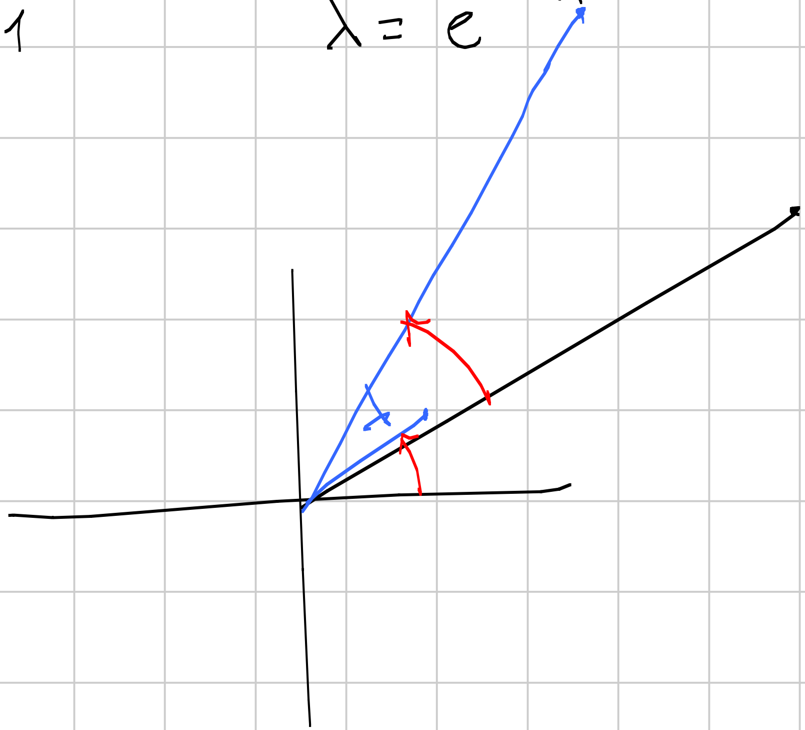
$$x^n = 1$$



$$(\lambda^2)^n = 1 \qquad (\lambda^k)^n = 1 \qquad \lambda = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

$$\lambda z = e^{i\frac{2\pi}{n}} \rho e^{i\vartheta} =$$

$$= \rho e^{i(\vartheta + \frac{2\pi}{n})}$$



Oss. $(a+ib)^{-1} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

$\dfrac{1}{a+b\sqrt{k}} = \dfrac{a-b\sqrt{k}}{a^2-b^2k}$ $\quad a,b \in \mathbb{Q} \quad k=2$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ q_1 + \sqrt{2}\, q_2 \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \}$

$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \quad (A, k) \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$x \quad x^5$

$0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 2$
$3 \to 3$
$4 \to 4$

$$\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{p(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}{q(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}$$

$s_i \qquad \sigma_i$

$$s_0 = \sigma_0$$
$$s_1 = \sigma_1$$
$$s_2 = a_{12}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2$$
$$s_3 = a_{13}\sigma_1^3 + a_{23}\sigma_2\sigma_1 + a_{33}\sigma_3$$
$$s_4 =$$