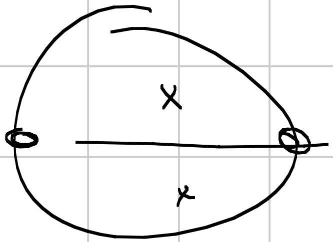
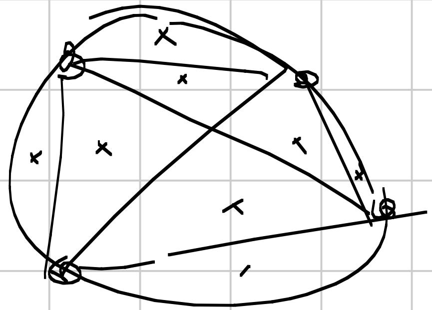
k punti su una circonferenza

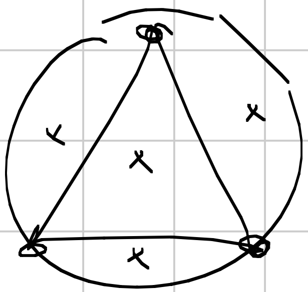
In quante regioni dividono il cerchio?
(al massimo)



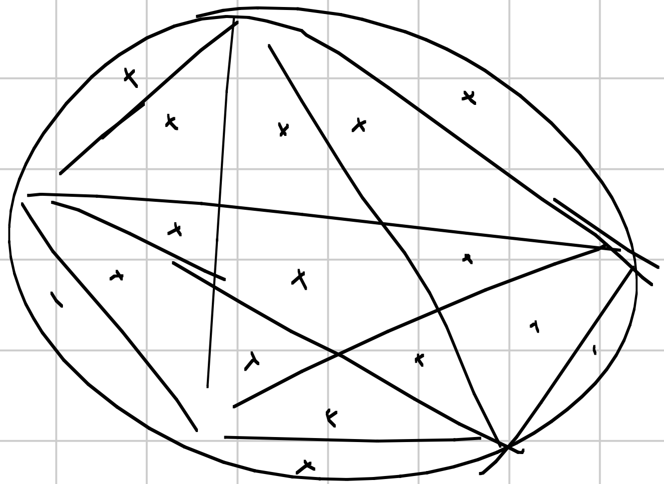
2



8



4



16

???...

Successioni (sequente)

Equazioni funzionali

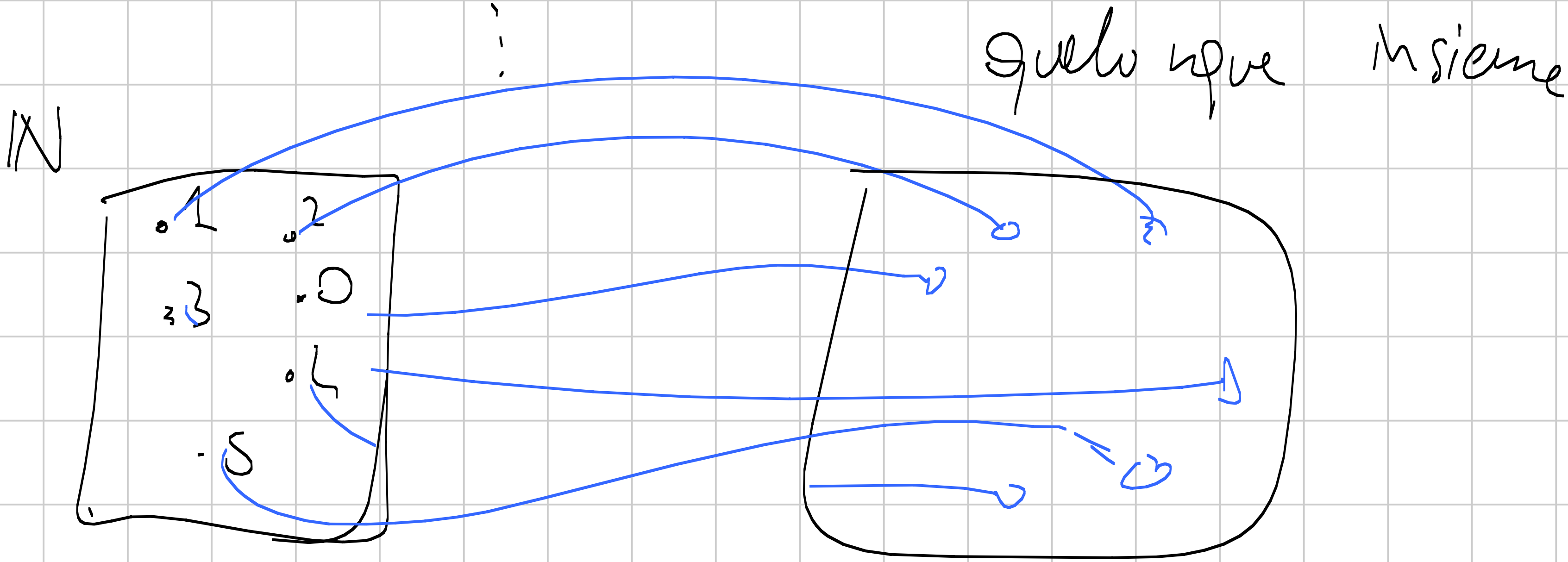
Successioni $\neq$ formule

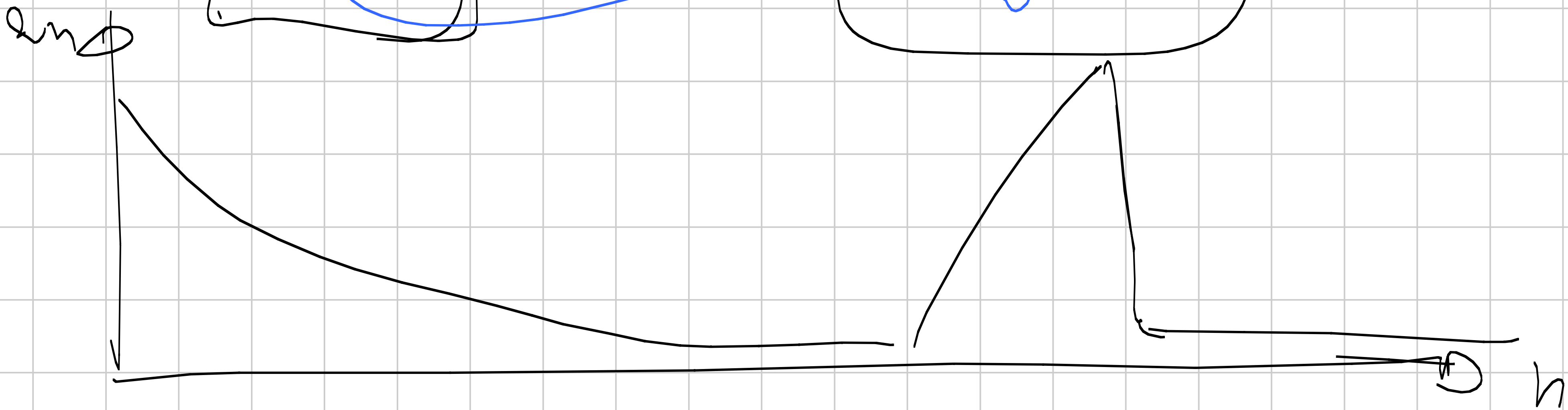
$$a_n = 27n^3 + \sin(\pi n) + \dots$$

$a_n = \{$ l'ultima lettera del nome del numero n in italiano $\}$

$a_n = \{$ il giorno di nascita dell' n-esimo di voi $\}$

$$a_n \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 5 & \text{se } n = 2 \\ \pi & \text{se } n = 3 \\ -37 & \text{se } n = 4 \\ \vdots & \end{cases}$$





Come lavorare con successioni particolari

$a_n = n$

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcccccccc} S \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & (n-1) & n \\ S \rightarrow & n & n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & & 2 & 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{cccccc} n+1 & n+1 & n+1 & \ldots & & n+1 \end{array}$$

$$2S = (n+1)n$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

DIM. BRUTTA

Somme telescopiche

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3} = (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + (5^3 - \cancel{4^3}) + \dots$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \boxed{(n+1)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} =$$

$$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$\boxed{= 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n+1}$$

Si ricava $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Si generalizza facilmente a potenze maggiori

$$\sum (k+1)^4 - k^4 = \sum 4k^3 + \underset{\sim\sim}{6k^2} + \underset{\sim\sim}{4k} + 1$$

POSSO "SALIRE DI 1" OGNI VOLTA

(NON C'È UNA FORMULA "BELLA" PER POTENZE h-ESIME)

FORMULA BELLA
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ALTRA COSA BELLA:

$$\sum_{k=1}^{n} k^h = \text{polinomio in } n \text{ di grado } h+1$$

Induzione + ragionamento sopra

Differenze finite

Ho una successione a_n che è data da un polinomio di grado h in n

n	1	2	3	4	5	6	
$p(n)$	2	9	28	65	126	217	grado 3
	7	19	37	61			grado 2
	12	18	24				grado 1
	6	6	6	6			grado 0

questa riga è costante

Perché?

$a_n = p(n)$ di grado h,

$a_{n+1} - a_n = p(n+1) - p(n) =$ polinomio di grado $k-1$

<u>Thm</u> Se scrivo le differenze finite per un polinomio di grado k, la $k+1$ - esima riga è costante

Il primo coefficiente, a_k, è dato dal valore dell'ultima riga (non nulla) diviso per $k!$

C'è modo (laborioso) di ricavare gli altri coefficienti

In pratica, si fa così:

$$p(n) = \boxed{a} n^3 + bn^2 + cn + d \qquad a=1$$

$p(1) = 2 \quad p(2) = 9 \quad p(3) = 28 \quad p(4) = 65$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 9 \\ 27a + 9b + 3c + d = 28 \\ 64a + 16b + 4c + d = 65 \end{cases}$$

Induzione

$$
\begin{array}{lcl|c|c|c}
1 & = & 1 & & & \\
1+4 & = & 5 & 4 & & \\
1+4+9 & = & 14 & 9 & 5 & \\
1+4+9+16 & = & 30 & 16 & 7 & 2 \\
 & = & 55 & 25 & 9 & 2
\end{array}
$$

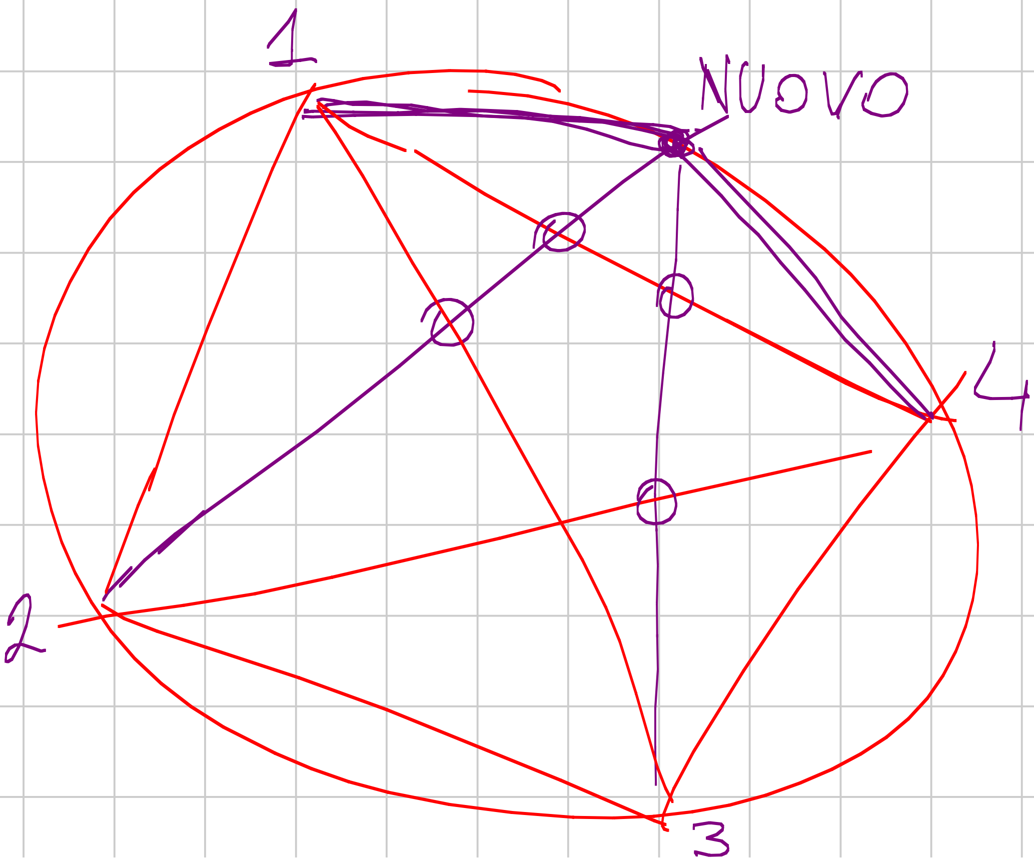
"guess" "hope" che la formula sia

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dim. vera

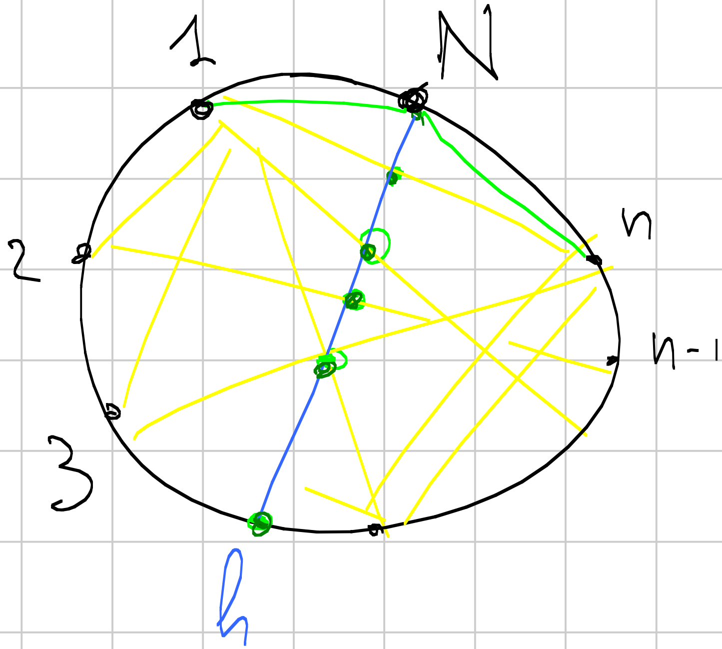
Thm la formula è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

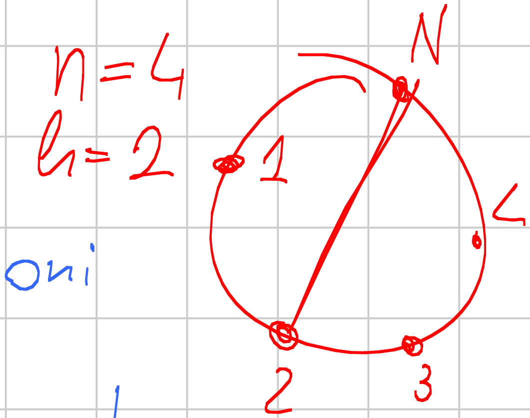
Dim: per induzione



N 1 e N 4 non incrociano nulla

N2 incrocia tutte le linee che collegano punti a sx e punti a dx





N-h quante regioni aggiunge? Incontra

$(h-1)(n-h)$ linee

che la dividono in $(h-1)(n-h)+1$ segmenti

Ognuno di questi segmenti taglia in 2 una regione esistente

$$\# \text{ nuove regioni} = \sum_{h=1}^{n} (h-1)(n-h)$$

$$a_n = \{\# \text{ regioni}\}$$

$$\sum_{h=1}^{n} h^2 \qquad n\sum_{h=1}^{n} h$$

$$a_n = b \cdot n + c$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} bk + c = b\sum_{k=1}^{n} k + c\sum_{k=1}^{n} 1 =$$

$$= b\,\frac{n(n+1)}{2} + cn$$

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$a_n = b \cdot c^n$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b c^k = b \boxed{\sum_{k=1}^{n} c^k} = b\,\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$$

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_0 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \\ a_0 = \gamma \end{cases}$$

FORMULA SULLE SCHEDE

Idea: definisco $b_n := a_n + C$

Voglio scegliere C in modo da "ammazzare" β

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_0 = 37 \end{cases}$$

$$b_n := a_n + 1$$

$$a_n = b_n - 1$$

$$\begin{cases} b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1) + 1 \\ b_0 = 38 \end{cases} \Rightarrow b_{n+1} = 2 b_n$$

$$b_n = 38 \cdot 2^n$$

$$a_n = 38 \cdot 2^n - 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \\ a_0 = \gamma \end{cases}$$

Definiamo $b_n := a_n + c$

$$a_n = b_n - c$$

$$b_{n+1} - c = \alpha b_n - \alpha c + \beta$$

$$-c = -\alpha c + \beta \qquad \boxed{c = \frac{\beta}{\alpha - 1}}$$

$$b_n = \alpha^n b_0$$

cosa succede se $\alpha = 1$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$$

$$(1)\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \cancel{\gamma} & n \geq 1 \\ a_0 = ?? \\ a_1 = ?? \end{cases} (*)$$

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

Inizialmente, ignoriamo i dati iniziali $(*)$ e cerchiamo soluzioni particolari di (1)

Idea: cerchiamo soluzioni del tipo

$$a_n = X^n$$

Per quali X è soluzione?

(1) $$x^{n+1} \overset{?}{=} \alpha x^n + \beta x^{n-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - \alpha x - \beta \overset{?}{=} 0$$

Se x è soluzione di $x^2 - \alpha x - \beta = 0$,
allora $a_n = x^n$ è soluzione di (1)

Ci sono due soluzioni x_1, x_2

<u>Idea</u>: se b_n, c_n soddisfano

$$\begin{cases} b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_{n-1} \\ c_{n+1} = \alpha c_n + \beta c_{n-1} \end{cases}$$

Allore $a_n = \underline{r}\, b_n + \underline{s}\, c_n$

a nostra scelta

soddisfano la (1)

Riesco a "sistemare i dati iniziali" scegliendo bene r, s?

$a_0 = ??$

$a_1 = ??$

$a_n = r \cdot x_1^n + s \cdot x_2^n$

$$\begin{cases} r + s = ?? \\ r x_1 + s x_2 = ?? \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$X^{n+1} = X^n + X^{n-1}$$

$$x^2 = X + 1 \qquad X_{12} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = r \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + s \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} r + s = 0 \\ r \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + s \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \qquad r = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Cosa succede in altri casi....

1) $\Delta < 0$ complessi e funziona tutto

2) Dipendenza da più di 2 termini precedenti

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2} + \delta a_{n-3}$$

$$X^{n+1} = \alpha X^n + \beta X^{n-1} + \gamma X^{n-2} \dots\dots$$

3) cosa succede se il polinomio ha radici multiple?

Se il polinomio ha una radice doppia x, allora $a_n = x^n$, $a_n = n \cdot x^n$

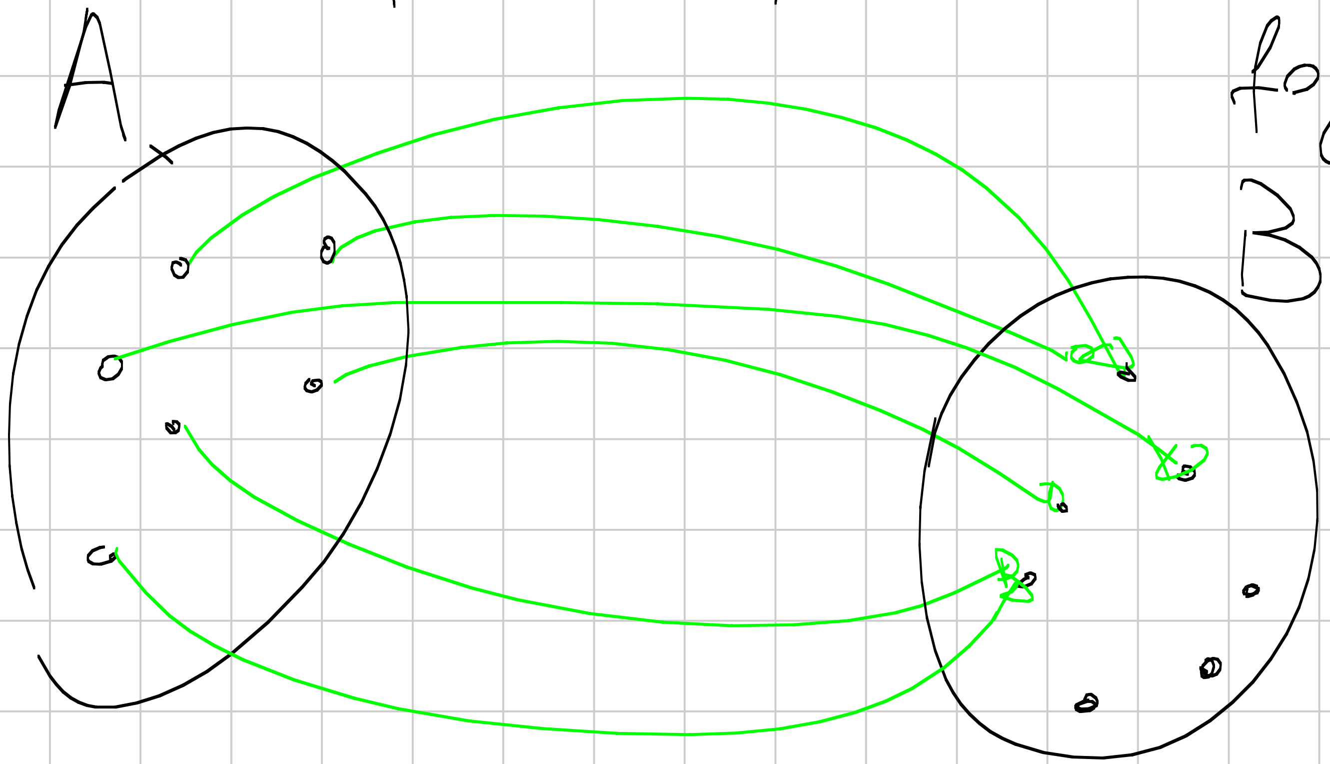
Se il polinomio ha radice k-upla,

$x^n, \; nx^n, \; n^2 x^n, \; n^3 x^n, \; \ldots$

EQUAZIONI FUNZIONALI

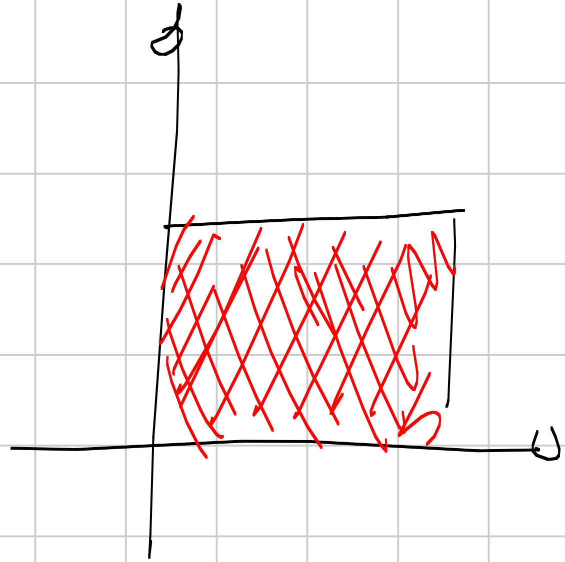
Achtung: Funzioni $\neq$ formule

Funzione ≠ scarabocchio sul foglio



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = 17 \\ 2 & \text{se} \quad x = 32 \\ & \vdots \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \end{cases}$$



$f: A \longrightarrow B$

$\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$

$f: x \longmapsto x^2$ $\qquad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

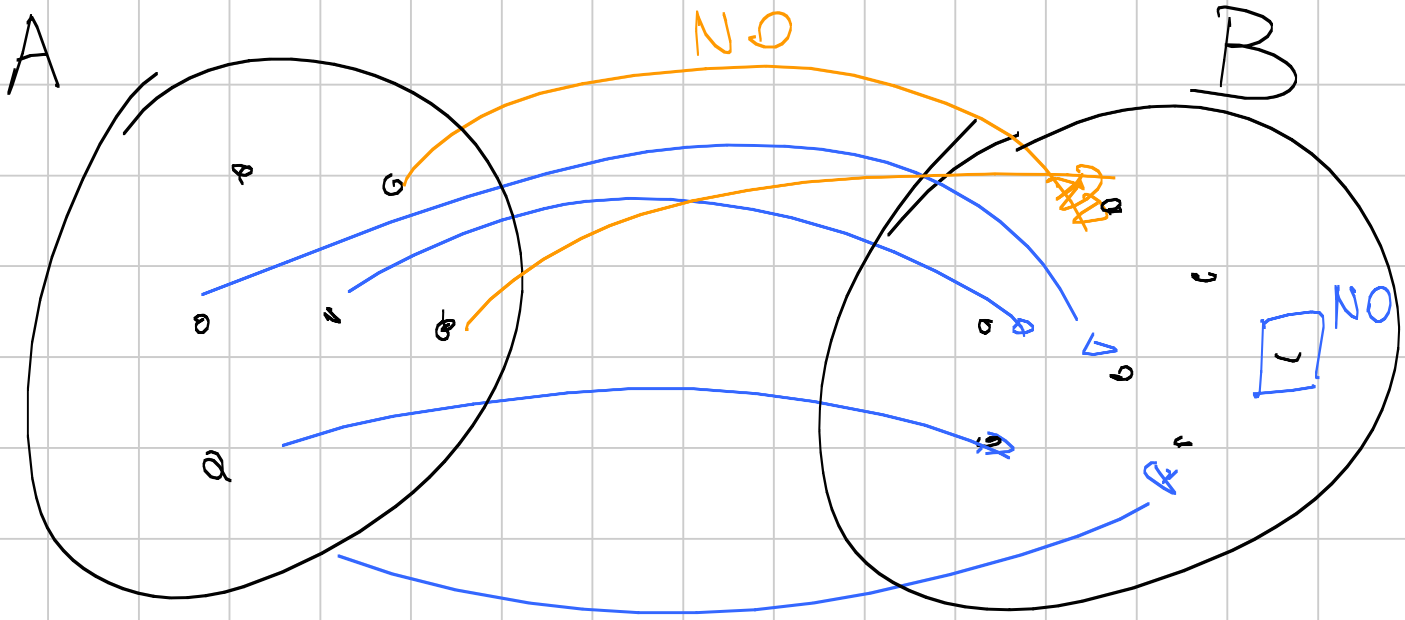
$f : x \longmapsto x^2 \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

NO perché non so dove va 0

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

INIETTIVITÀ / SURIETTIVITÀ



INIETTIVA: TUTTE LE FRECCE VANNO IN POSTI DIVERSI

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

SURIETTIVA: IN TUTTI I PUNTI ARRIVA UNA FRECCIA

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \ \text{t.c.} \ f(x) = y$$

$f: x \longmapsto x^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x, $-x \to x$ non iniettiva

$?? \to -1$ non suriettiva

$f: \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

$(0, +\infty) \longmapsto (0, +\infty)$

INIETTIVA E SURIETTIVA

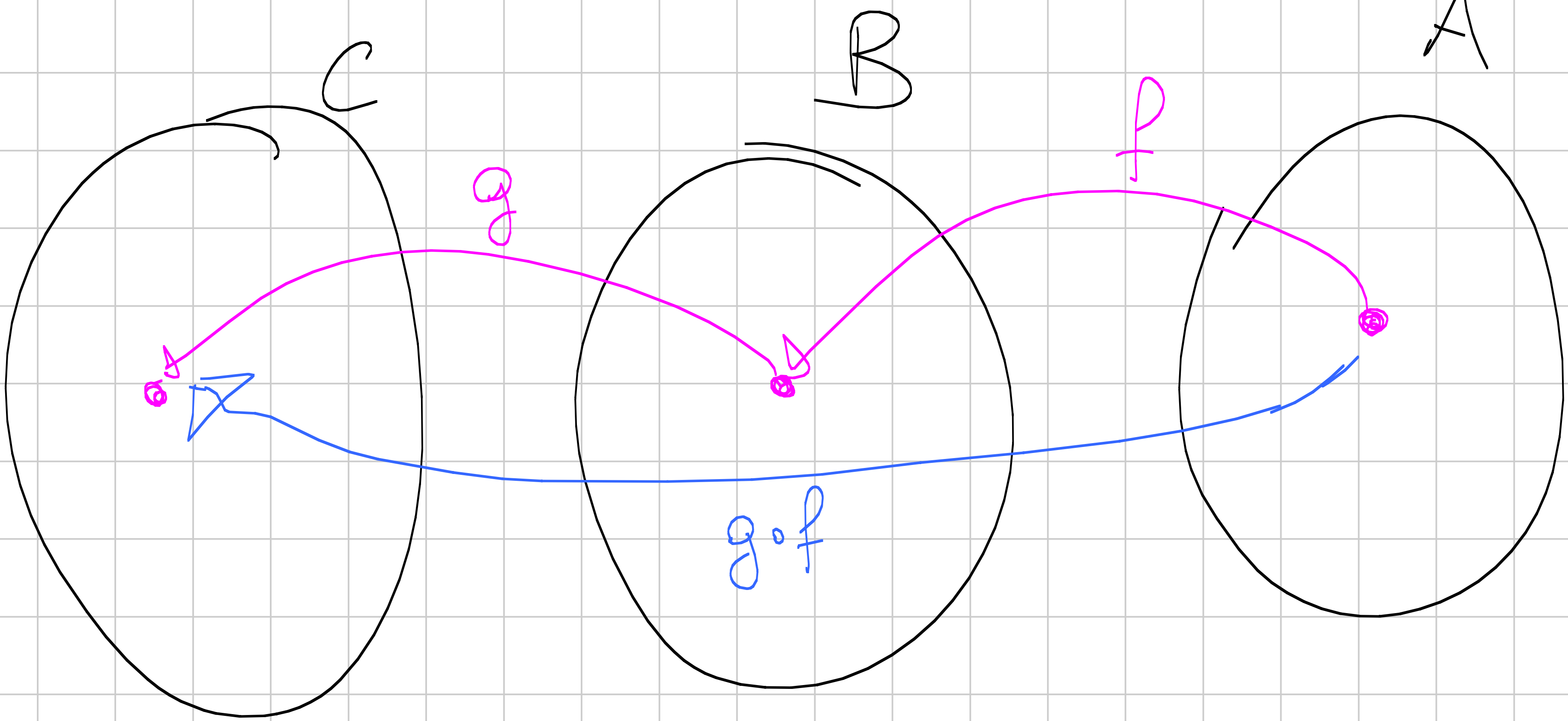
INIETTIVA + SURIETTIVA = BIIETTIVA o INVERTIBILE

$\sqrt{x}$

Inversa di

Composizione

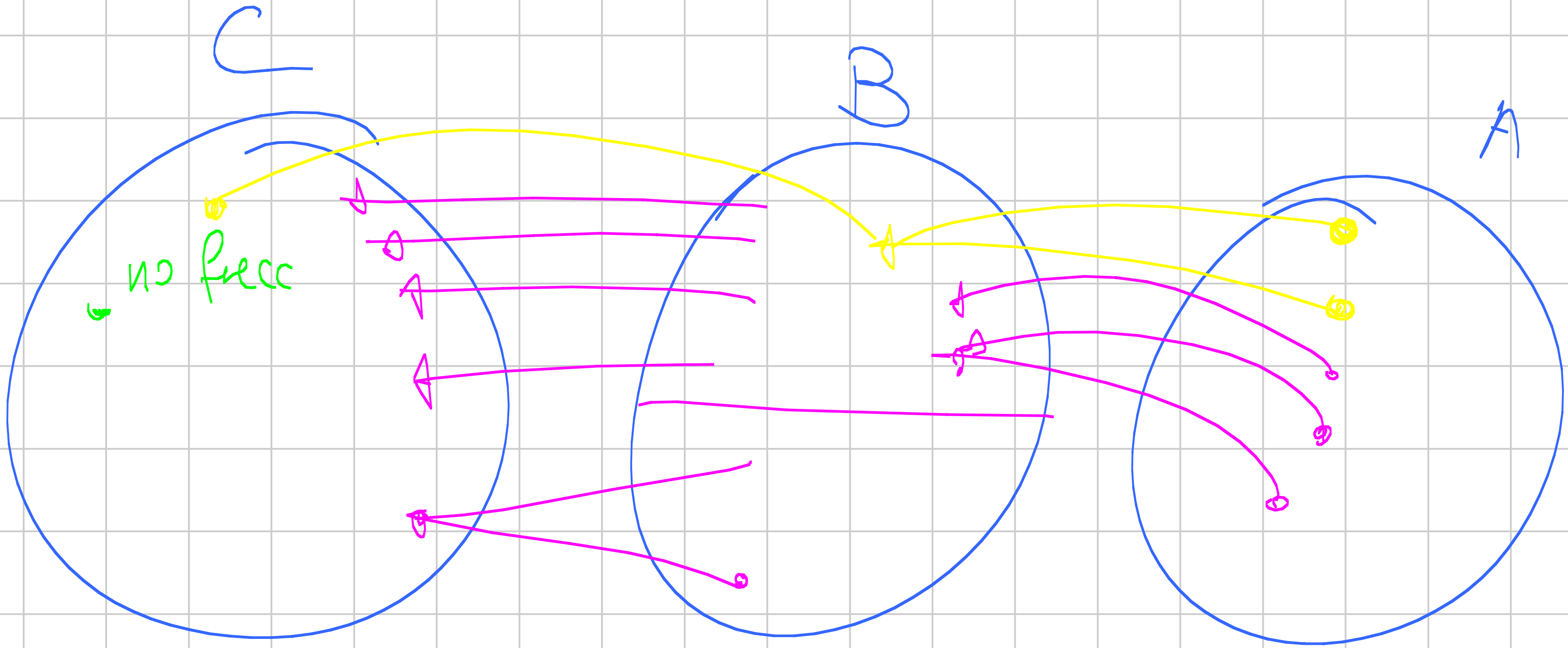
$f: A \to B \qquad g: B \to C$



$g \circ f : A \to C$

$$[g \circ f](x) = g(f(x))$$

Come si comportano iniettività e suriettività



1) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva $\Rightarrow$

2) $g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva $\Rightarrow$

Cos'è un' equazione funzionale:

Esempio: Trovare tutte le $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

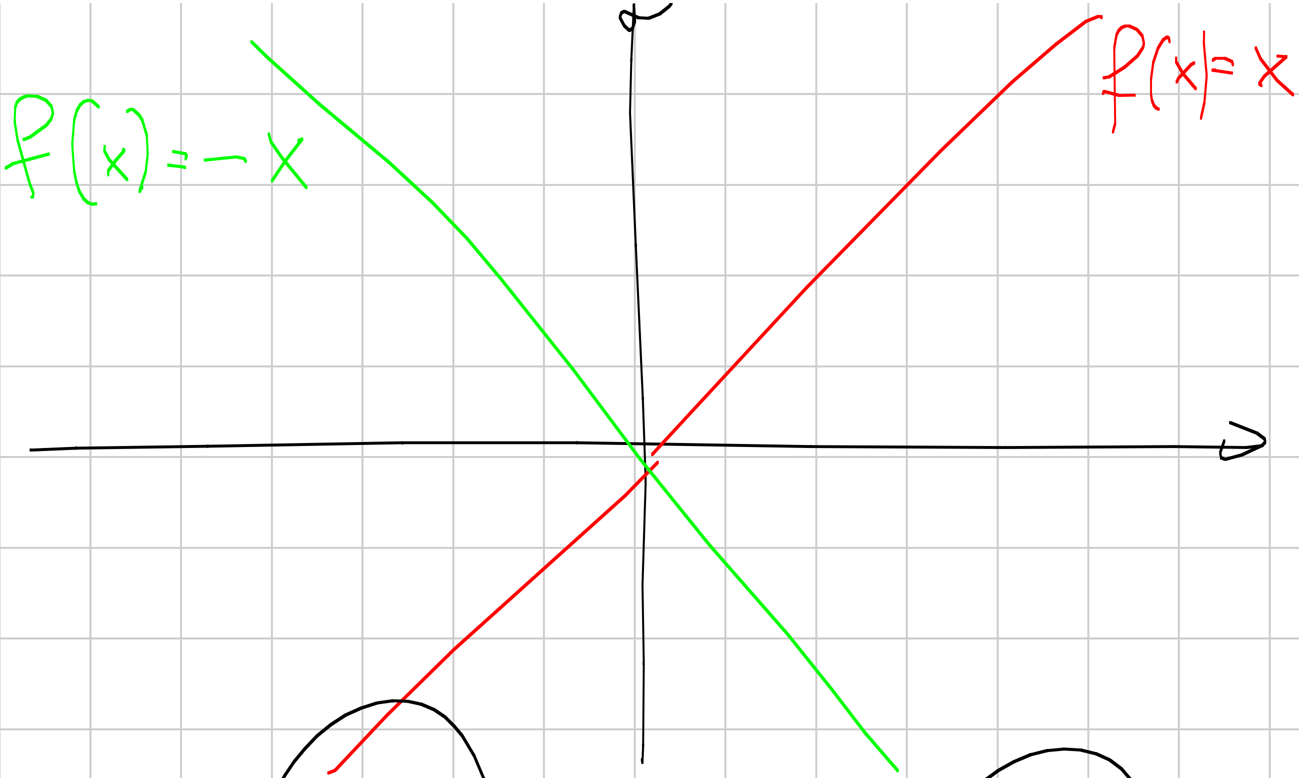
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Come si risolvono?

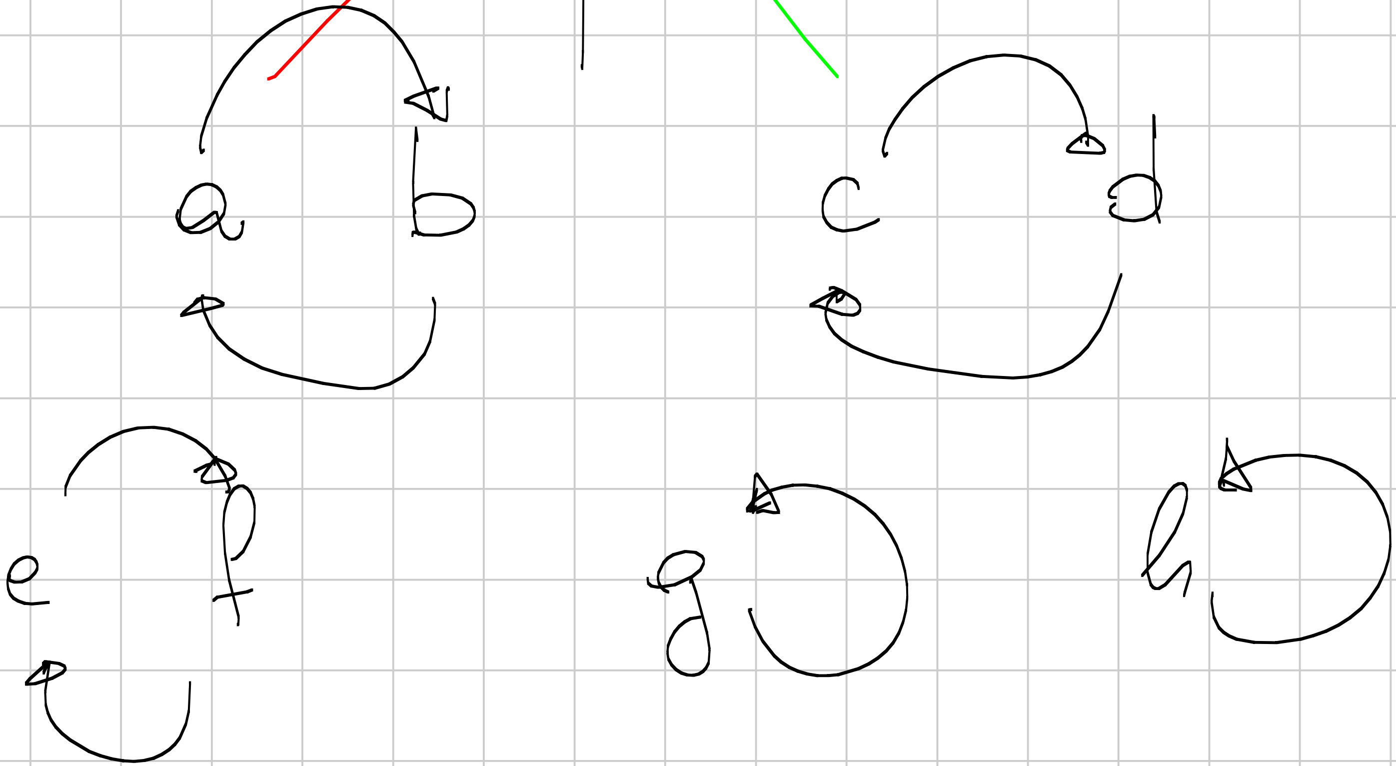
1) Ci sono anche "soluzioni brutte":

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(f(x)) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$



Però



Esempio di "come si risolve un' e.f.":

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$ EQUAZIONE DI CAUCHY

IDEA: sostituire valori particolari

Pongo $x = y = 0$

$$\cancel{f(0)} = f(0) + \cancel{f(0)}$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

$x = a \qquad y = -a$

$$0 = f(0) = f(a-a) = f(a) + f(-a)$$

$$\boxed{f(-a) = -f(a) \qquad \forall a \in \mathbb{Q}}$$

Idea: dare un nome a costanti particolari

Chiamo $f(1) =: k$

$$f(1) = k$$

Sostituisco $x = y = 1$

ottengo

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2K$$

Sostituisco $x = 2, \quad y = 1$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2K + K = 3K$$

Idea: data una relazione, vedere cosa succede applicandola n volte (induzione)

<u>Lemma</u>: $f(n) = n \cdot K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>dim</u>: induzione $n=0$ banale

INDU

$n \to n+1 \qquad f(n+1) = \boxed{f(n)} + f(1) = \boxed{nK} + K =$

$= (n+1)K$

Nello stesso modo, si dimostra che

$$(**) \quad f(nx) = n f(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$K = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot K} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) \overset{(**)}{=} m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} K$$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\quad n > 0$

$\Rightarrow$ Se f è una soluzione, f è della forma $f(x) = \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{Q}$

OCCHIO!

$\Leftarrow$ Se $f(x) = \alpha x$, allora f è soluzione

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\alpha(x+y) \boxed{\overset{?}{=}} \alpha x + \alpha y$$

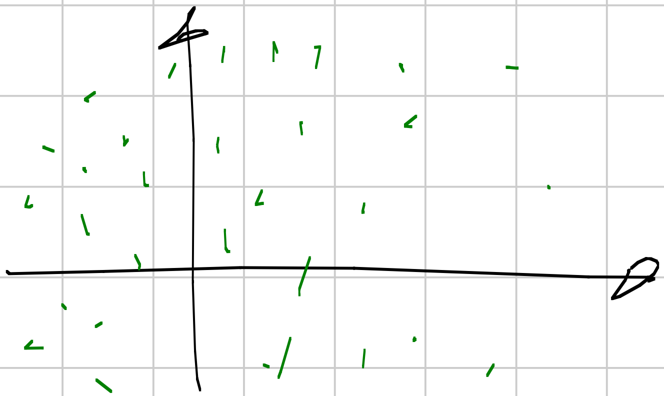
ok, vale l'=

Trovare tutte le $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$f(x) = \alpha x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ è soluzione

<u>ma</u> c'è un'altra famiglia di soluzioni "brutte"



Trovare tutte le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

* e sono monotone (crescenti/decrescenti)

Sol: sono solo le rette

Posso rimpiazzare monotonia con:

- limitatezza in un intervallo

Esiste $[a, b]$ tale che

$$f(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

$(\geq)$

– continuità

Come si usa?

Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x^2+y) = [f(x)]^2 + f(y)$$

0.s) $y = x = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

1) $y = 0 \Rightarrow f(x^2) = [f(x)]^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) riscrivere il testo come

$$f(x^2+y) = f(x^2) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(z+y) = f(z) + f(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$z \geq 0$

occhio

3) $y = -z \longrightarrow f(-z) = -f(z)$

"con poca fatica" mi riconduco a

$f(z+y) = f(z) + f(y)$ anche per $z < 0$

$\boxed{\text{Sono su } \mathbb{R}}$

ho bisogno di un' ipotesi in più

$$f(x^2+y) = [f(x)]^2 + f(y)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x^2+y) \geq f(y)$$

$$\Downarrow$$

f crescente

perché $\forall\, z > y$, posso trovare x t.c.

$$x^2+y=z$$

e quindi $f(z) \geq f(y)$

CAUCHY + CRESCENZA = solo le rette

f verifica

IMO 2008/4 Trovare

$f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tali che

$$\frac{[f(w)]^2 + [f(x)]^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per ogni w, x, y, z t.c.

$$wx = yz$$

$$2[f(1)]^2$$

$$\frac{}{2f(1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1$$

$\forall a,$ $\quad x, y, z, w = a \quad \Rightarrow$

$$\frac{2[f(a)]^2}{2f(a^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(a^2) = \underbrace{[f(a)]^2}$$

$$\boxed{\underset{w}{x} \cdot \underset{x}{x} = \underset{y}{x^2} \cdot \underset{z}{1}}$$

$$\frac{[f(w)]^2+[f(x)]^2}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

$$\frac{f(w^2)+f(x^2)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2} \qquad \forall\, w, x, y, z \text{ t.c. } wx = yz$$

Quadrati sono "finti":
ogni numero reale si scrive come quadrato

Definisco $\overline{w} = \sqrt{w}$, $\overline{x} = \sqrt{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$

e ottengo

$$\frac{f(\overline{w})+f(\overline{x})}{f(\overline{y})+f(\overline{z})} = \frac{\overline{w}+\overline{x}}{\overline{y}+\overline{z}} \quad \forall\, \overline{w}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \text{ t.c. } \overline{w}\,\overline{x} = \overline{y}\,\overline{z}$$

Lemma:

$$\frac{f(\overline{w})+f(\overline{x})}{f(\overline{y})+f(\overline{z})} = \frac{\overline{w}+\overline{x}}{\overline{y}+\overline{z}} \quad \forall\, \overline{w}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \text{ t.c. } \overline{w}\,\overline{x} = \overline{y}\,\overline{z}$$

Dim: applico l'uguaglianza del testo ponendo $w \to \sqrt{\overline{w}}$, $x \to \sqrt{\overline{x}}$, eccetera

$$\frac{f(\bar{w})+f(\bar{x})}{f(\bar{y})+f(\bar{z})}=\frac{\bar{w}+\bar{x}}{\bar{y}+\bar{z}}$$

$$w \cdot x = y \cdot z$$

$$a \cdot a = a^2 \cdot 1$$

$$\frac{f(a)+f(a)}{[f(a)]^2+1}=\frac{a+a}{a^2+1}$$

$$(a^2+1)\,f(a) = a\left[[f(a)]^2+1\right]$$

$$f(a) = \frac{-a^2-1 \pm \sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2a} =$$

$$a^4+2a^2+1-4a^2$$

$$a^4-2a^2+1 =$$

$$= (a^2-1)^2$$

$$= \begin{cases} a \\ \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

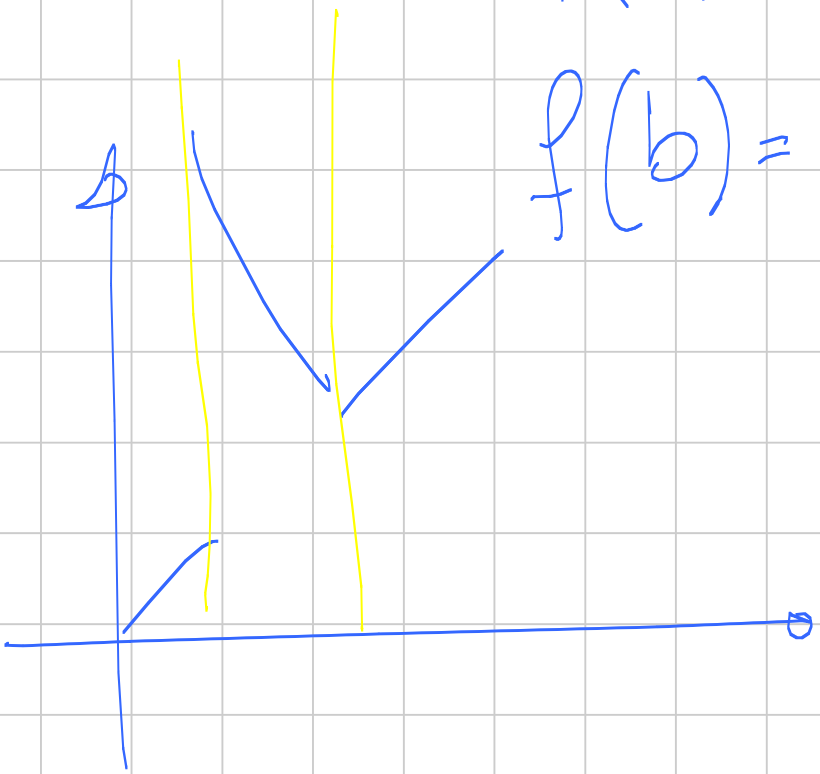
OCCHIO!
NON CI SONO SOLO
QUESTE SOLUZIONI!!

$$\begin{cases} f(a) = a \\ f(a) = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

a, b

$$f(a) = a$$

$$f(b) = \frac{1}{b}$$



Come si esclude?

$$\frac{f(\bar{w})+f(\bar{x})}{f(\bar{y})+f(\bar{z})}=\frac{\bar{w}+\bar{x}}{\bar{y}+\bar{z}}$$

Supponiamo di avere $a, b \neq 1$ tali che

$$f(a)=a$$

$$f(b)=1/b$$

$$\bar{w}\cdot\bar{x}=\bar{y}\cdot\bar{z}$$

$$a \quad b = ab \quad 1$$

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{f(ab)+1}=\frac{a+b}{ab+1}$$

$$f(ab)=\begin{cases} ab \\ 1/ab \end{cases}$$

CASO 1

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{\cancel{ab+1}} = \frac{a+b}{\cancel{ab+1}}$$

$$\cancel{a}+\frac{1}{b} = \cancel{a}+b$$

CASO 2

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{\cancel{\frac{1}{ab}+1}} = \frac{a+b}{ab+1} = \frac{a+b}{ab\cancel{\left(1+\frac{1}{ab}\right)}}$$

$$a^2b+\cancel{a} = \cancel{a}+b \Rightarrow \boxed{a^2 = 1} \quad \text{NO}$$

Ho dimostrato che su tutti i $t \neq 1$

o f vale $f(t) = t$ su tutti

o f vale $f(t) = \frac{1}{t}$ su tutti

$\boxed{\text{+ VERIFICA}}$ che $f(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ funzionino $\square$

ERRORI COMUNI:

1) $$f(f(x)) = f(x+8)$$

$$f(x) \cancel{\Downarrow} = x + 8$$

posso farlo solo se c'è iniettività

2) $f(f(x)) = f(x) + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

pongo $y = f(x)$ $\boxed{\text{NO}}$

$f(y) = y + 8$

$\forall y$ che si scrivono come $f(x)$ per qualche x

$[f(x) = 0]$

occhio: serve suriettività

$f(x^2) = x^2 + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$$f(z) = z + 8 \quad \forall z \geq 0$$

$$[f(x)]^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cancel{\Downarrow}$$

ho solo ~~due~~ soluzioni: $f(x) = 0$ / $f(x) = 1$

Ho un sacco di funzioni t.c.

$$\begin{cases} f(x)=0 & \text{su } A \\ f(x)=1 & \text{su } \mathbb{R}\setminus A \end{cases}$$

TST 2002 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

i) $f(x+yf(x))=f(x)f(y) \quad \forall x,y>0$

ii) f prende un numero finito di volte il valore 1

DIM supponiamo che $f(x), f(y)=1$

$x>y$

Sostituisco in (i)

$$f(x+y)=1$$

$z=x+y$ è tale che $f(z)=1$

y è tale che $f(y)=1$

$\Downarrow$ sostituisco

$$f(z+y)=1$$

$\Rightarrow$ ci sono valori sempre più grandi di t per cui $f(t)=1$ $\Rightarrow$ NO per (ii)

$\Rightarrow$ c'è al più un valore t t.c. $f(t)=1$

Però funziona tutto anche con un solo t:

$x=y=t$ nel testo $\Rightarrow f(2t)=1$

e riporto come prima e costruirne infiniti

$\Rightarrow$ non c'è nessun t per cui $f(t)=1$

$$f(x+yf(x)) = f(x)f(y) = f(y+xf(y))$$

IDEA: RHS è simmetrico in x,y

LHS no

Allora

Per ogni $a, b \in (0, +\infty)$

Sostituisco $x = a,\ y = b$

$$f(a + b f(a)) = f(a) f(b) = f(b + a f(b)) \quad \forall a, b \in (0, +\infty)$$

Sostituisco $x = b,\ y = a$

$$f(x + y f(x)) = f(y + x f(y))$$

se fosse iniettiva

$$\cancel{x} + y f(x) = y + \cancel{x} f(y)$$

$$x(1-f(y)) = y(1-f(x))$$

$$\alpha = \frac{1-f(1)}{1} = \frac{1-f(y)}{y} = \frac{1-f(x)}{x} = \text{costante}$$

$$1-f(x) = ax$$

$$f(\underline{x+yf(x)}) = f(\underline{x})f(y)$$

Supponiamo che non sia iniettiva:

$$f(a) = f(b) \qquad \boxed{b>a}$$

$x = a$

$$y = \frac{b-a}{f(a)}$$

$$\cancel{f(b)} = \cancel{f(a)}\, f\left(\frac{b-a}{f(a)}\right)$$

$f(\text{mostro}) = 1$, vietato

$\Rightarrow f$ iniettiva. $\square$

FATE SOSTITUZIONI FURBE

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x+f(y)) = f(x)+y \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{Q}$$

1) $f(f(0)) = f(0)$

2) $x=0$: $\quad f(f(y)) = f(0)+y$

$f \circ f$ suriettiva

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ è suriettiva}}$$

$f(\text{mostro}) =$ cose suriettive

$\Rightarrow f$ suriettiva

$\Rightarrow \boxed{f \text{ è iniettiva}}$

3) ho iniettività, in

$$f(f(0)) = f(0) \quad \text{"semplifico" le } f$$

$$f(0) = 0$$

e quindi in (2) $\quad f(f(y)) = y \quad \forall y$

4)

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

cerco di "simmetrizzare"

quest' espressione

$$y \longrightarrow f(z)$$

$$f\big(x + \underbrace{f(f(z))}_{= z}\big) = f(x) + f(z) \qquad \forall\, x, z$$

$$f(x+z) = f(x) + f(z) \leadsto \text{la so fare}$$

1) SFRUTTARE INIETTIVITÀ / SURIETTIVITÀ
2) SIMMETRIZZARE

ALTRA IDEA "BUONA":
scrivere la stessa espressione in due modi diversi:

$$f(f(x)) = \text{mostro}(x)$$

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$$

$$fffx = f\big(\text{mostro}(x)\big)$$

$$\| $$

$$\text{mostro}\big(f(x)\big)$$

$$f(x+y) = \text{qualcosa}(x,y)$$

$$f(x+y+z) = \text{qualcosa}(x, y+z)$$

$$\parallel$$

$$\text{qualcosa}(x+y, z)$$