C1 (cardinalità)

Titolo nota 09/09/2009

Dati due insiemi A, B
A é "più grande di B" se esiste una funzione iniettiva $B \to A$

OPPURE

esiste una funzione suriettiva $A \to B$

A e B hanno lo stesso numero di elementi se...
... c'é una funzione biettiva $A \longleftrightarrow B$.

$f: A \to B$ é iniettiva
$\Longleftrightarrow$ esiste $g: B \to A$ t.c. $g(f(x)) = x$

$f: A \to B$ é suriettiva
$\iff$ esiste $g: B \to A$ t.c. $f(g(x)) = x$

TECNICA

se devo contare l'insieme A
($|A|$ = num. elementi di A = cardinalitá = $\#A$)
cerco un insieme B di cui so contare gli elementi
e trovo $f: A \to B$, $g: B \to A$ tale che
$f(g(x)) = x$, e $g(f(x)) = x$,

es. IMO 2008 /4

Se A e B sono disgiunti:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Dati due insiemi A, B

$A \times B$ = insieme di coppie ordinate:

1° elemento in A, 2° elemento in B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Contiamo le funzioni $A \to B$. $\quad B^A$

esempio: ho 10 foglietti, 4 colori

in quanti modi posso colorare tutti i foglietti?

$A = \{\text{foglietti}\}$ $\quad B = \{\text{colori}\}$

$|A| = 10$ $\quad |B| = 4$

$$|B^A| = |B|^{|A|} = 4^{10}$$

- solo le funzioni iniettive?
- solo le funzioni suriettive?
- elementi di A indistinguibili?
- elementi di B indistinguibili?

	funzioni qualsiasi	funzioni iniettive ($a \leq b$)	funzioni suriettive ($a \geq b$)	$A \to B$
A,B distinguibili	b^a	$\frac{b!}{(b-a)!}$	$\sum_{i=0}^{b} (b-i)^a \binom{b}{i} (-1)^i$	
A indist.	$\binom{a+b-1}{b-1}$	$\binom{b}{a} = \frac{b!}{a!(b-a)!}$	$\binom{a-1}{b-1}$	
B indist.				
A,B indist.				

NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI A

FUNZIONI DA $A \longrightarrow \{0, 1\}$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

insieme dei sottoinsiemi di A

Se voglio scegliere due sottoinsiemi? $\left(2^{|A|}\right)^2$

Se li voglio disgiunti? $3^{|A|}$

DISPOSIZIONI

ad. es. ho 4 persone e 10 sedie in fila.
In quanti modi possono sedersi?
(su sedie distinte)

1° di loro $\longrightarrow$ 10 possibilità
2° $\longrightarrow$ 9 poss.
⋮ 8
4° $\longrightarrow$ 7

tot. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

In generale, se voglio disporre n oggetti in k posizioni $\longrightarrow n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

I MODI DI ORDINARE n OGGETTI? (PERMUTAZIONI)

$$n!$$ (= funzioni biunivoche)

Modi di disporre n persone attorno ad un tavolo?
(mi interessa solo chi è vicino a chi)

$\frac{n!}{2n}$ (perché ogni permutazione capita in un gruppo di $2n$ permutazioni equivalenti.)

Ho n persone e ne voglio scegliere un gruppo di 5 (NON CONTA L'ORDINE). In quanti modi si fa?

SE CONTASSE L'ORDINE $\longrightarrow$ $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

IN QUANTI MODI POSSO ORDINARE UN GRUPPETTO DA 5? $5!$

I MODI POSSIBILI (senza ORDINE) SONO: $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

$$= \frac{n!}{(n-5)!\,5!}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \text{"}n \text{ su } k\text{"} = \text{coefficienti binomiali} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \\ &= \text{quanti sottoinsiemi di } k \text{ elementi di} \\ = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad &\text{un insieme con } n \text{ elementi} \end{aligned}}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{2} = \text{coppie non ordinate} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$(x+y)^n =$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^{10} = \dots + \binom{10}{4} x^4 y^5 + \dots$$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)(x+y) \quad \dots \dots \quad (x+y)}$$

BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} x^a y^{n-a}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

colonna 0

riga 0 → 1

1 1

1 2 1

1 3 3 1 colonna 3

1 4 6 4 1

riga 5 → 1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 25 25 21 7 1

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = 10$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{1 \cdot \cancel{2}} = 21$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

→ cerco k persone nell'insieme A

→ cerco k-1 persone nell'insieme A - { Gimo }

→ Cerco k persone "

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{n}{k \cdot (n-k)} = \frac{1}{1 \cdot (n-k)} + \frac{1}{k \cdot 1}$$

$$n = k + (n-k)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} =$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$$

= tutti i possibili sottoinsiemi di $\{1 \dots n\}$

$$= 2^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$x = y = 1 \longrightarrow (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

$x = 1,\ y = -1 \longrightarrow (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} = 0$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} = 0$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{i}$$

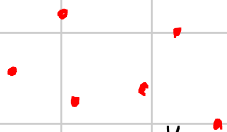
sottoinsiemi pari = sottoinsiemi dispari = 2^{n-1}

$$\underline{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

(posso scegliere quali elementi prendere... ... o quali non prendere)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} =$$

n palline blu



n palline rosse

= scelgo i, prendo i palline blu e $n-i$ palline rosse

= scelta di n palline qualsiasi

$$= \binom{2n}{n}$$

ALTRO ESEMPIO

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + n \binom{n}{n}$$

= ho n persone, ne scelgo un gruppo e scelgo un capitano dentro al gruppo.

= ho n persone, scelgo un capitano e scelgo un gruppo che lo contenga

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \quad \square$$

UN ALTRO DOUBLE COUNTING

$$A = \{1, 2, \ldots, 2009\}$$

k

$$\sum_{\substack{A_1, A_2, \ldots, A_k \\ \text{sottoinsiemi di } A}} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

= tutti i modi di prendere k sottoinsiemi di A e scegliere un elemento della loro unione

= tutti i modi di scegliere un elemento di A, e k sottoinsiemi di cui almeno uno lo contenga

$$= 2009 \cdot \left[2^{2009 \cdot k} - 2^{2008k} \right]$$

scelte di k sottoinsiemi

k sottoinsiemi "cattivi" (la loro unione non contiene l'elemento prescelto)

$$\sum_{A_1, \dots, A_k \subset A} |A_1 \cap \dots \cap A_k|$$

= scelgo k sottoinsiemi, scelgo un elemento contenuto in tutti

= scelgo un elemento, scelgo k sottoinsiemi che lo contengono

$$= 2009 \cdot \left(2^{2008}\right)^k$$

$$\sum_{A_1, \dots, A_k \subset A} |A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_k|^2$$

(x casa/albergo/mensa)

DISTRIBUZIONI (di caramelle)

PROB. 1 Ho c caramelle da distribuire a r ragazzi.
In quanti modi si può fare?

k_i = num. di caramelle che ha ricevuto l'i-esimo ragazzo.

$(k_1, \dots, k_r)$ con $\sum k_i = c$ $\qquad k_i \geq 0$

PROBL. 2 Ho una striscia di caselle bianche e ne voglio annerire $r-1$ in modo che ne rimangano c bianche. In quanti modi si può fare?

$r+c-1$

$$\binom{r+c-1}{r-1}$$

PROBL. 1 $\longrightarrow$ PROBL. 2

$(k_1, \dots, k_r)$ con $\sum k_i = c$

Metto k_1 caselle bianche, poi una nera,

poi k_2 bianche, poi una nera,

.....

infine k_r bianche.

due distribuzioni diverse $\longrightarrow$ due strisce diverse

ogni striscia colorata si può ottenere da una distribuzione

BIGEZIONE !!

I modi di distribuire c caramelle a r ragazzi sono:

$$\binom{r+c-1}{r-1}$$

E se ogni ragazzo vuole almeno una caramella?

$$\binom{c-1}{r-1}$$ (prima me do una a testa, poi faccio come prima)

Quante sono le quaterne (a,b,c,d) di interi tali che $1 \leq a < b < c < d \leq 2009$?

Guardiamo $x = a-1$, $y = b-a$, $z = c-b$, $t = d-c$, $w = 2009-d$.

$$x+y+z+t+w = 2009-1$$

ALTRE CONDIZIONI: $x \geq 0$ $y \geq 1$ $z \geq 1$ $t \geq 1$, $w \geq 0$

se metto $x = a - 0$ $\quad$ $w = 2010 - d$

ho le condizioni giuste:

$$x+y+z+t+w = 2010 \ , \qquad x,y,z,t,w \geq 1$$

Sol.: $$\binom{2009}{4} = \frac{2009 \cdot 2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Oppure, senza complicarsi la vita... era ovvio che

$\binom{2009}{4}$ va bene...

ANAGRAMMI.

Quanti sono i possibili anagrammi di "ANAGRAMMI"?

Ci sono $9!$ modi di permutare le lettere.
Ma ho contato troppo.
Ma quante volte ho contato ogni anagramma?
In quanti modi posso permutare le lettere in modo che la parola resta uguale?

es. CASA ⇝ CASA

scambio

Ci sono 3 A ⟶ $3!$ modi

2 M ⟶ $2!$ modi

una N, G, R, I ⟶ 1 modo

Provando tutte le permutazioni, ogni anagramma é stato contato $3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! = 12$

In totale $\dfrac{9!}{12}$ anagrammi.

In generale: ho k lettere

la lettera i compare l_i volte $(i = 1 \dots k)$

$$\frac{(l_1 + l_2 + \dots + l_k)!}{l_1! \, l_2! \cdot \dots \cdot l_k!}$$

COEFFICIENTI MULTINOMIALI

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^{20} = \text{- - - - -}$$

$$\text{- - -} = \sim\sim + \bigcirc\, a_1^3\, a_2^4\, a_3\, a_4^{12} + \dots$$

coefficiente?

$$\frac{20!}{3!\,4!\,1!\,12!} = \binom{20}{3,4,1,12}$$

Oppure: Ho 10 persone. Voglio dividerle in 3 gruppi:

il 1° gruppo da 2 G_1

il 2° gruppo da 3 G_2

il 3° gruppo da 5 G_3

1° Scelgo prima il 1° gruppo $\longrightarrow \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$

poi scelgo il 2°

... e il 3° è già determinato.

2° Noto che le soluzioni sono date dal numero di anagrammi di

$G_1\ G_1\ G_2\ G_2\ G_2\ G_3\ G_3\ G_3\ G_3\ G_3$

$$\binom{10}{2,\ 3,\ 5} = \frac{10!}{2!\ 3!\ 5!}$$

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} = \frac{10!}{2!\ \cancel{8!}} \cdot \frac{\cancel{8!}}{3!\ 5!}$$

ok

DIVIDERE IN COPPIE

2n persone, voglio dividerle in n gruppi da 2.

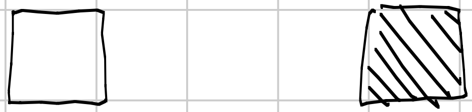
K femmine

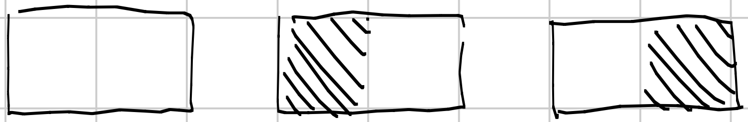
Le divido in 2 gruppi → Poi faccio una permutazione di K = K!

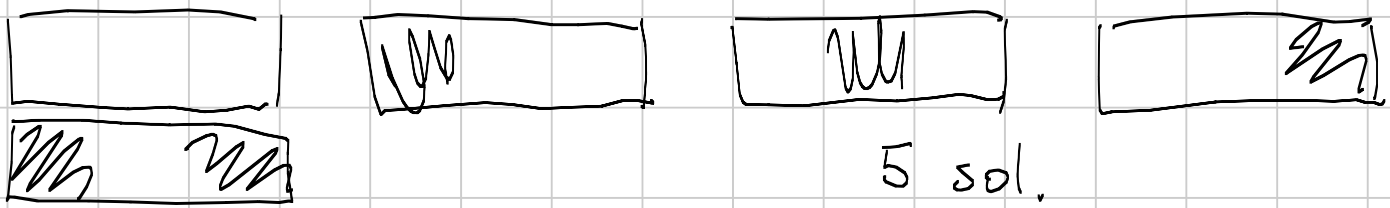
Ci saranno tutte? mi servono di più

RICORSIONE

Colorare una striscia con n quadretti di bianco e di nero, in modo che non ci siano due neri consecutivi.

$n=1$  2 sol.

$n=2$  3 sol.

$n=3$  5 sol.

Chiamo $f(n)$ il numero di soluzioni lunghe n.

Fisso l'ultima casella.

- BIANCA $\longrightarrow$ $f(n-1)$ possibilitá per completarla.

- NERA $\longrightarrow$ la penultima deve essere bianca $\longrightarrow$ $f(n-2)$ possibilitá per completarla.

In conclusione: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

ricorda qualcosa?

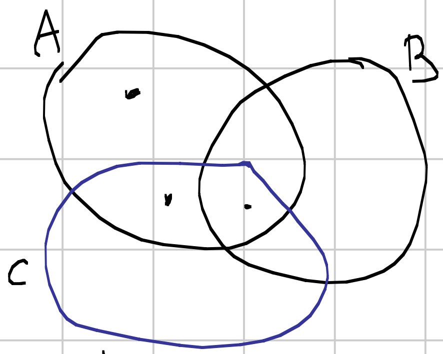
$f(1) = 2$ $f(2) = 3$, 5, 8, 13, 21, ...

X CASA: senza 3 mere consecutive

PRINCIPIO DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE

A, B insiemi disgiunti $\longrightarrow$ $|A \cup B| = |A| + |B|$

e se non sono disgiunti?



Ci sono 13 giocatori di pallavolo e 20 di basket. Quanti fanno uno dei due sport?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

per 3 insiemi?

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- \sum |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

IN GENERALE:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| = \sum |A_i| - \sum |\text{intersezioni a 2 a 2}| + \dots$$
$$+ (-1)^{n+1} \sum |\text{intersezioni a n a n}| + \dots$$

PIE = principio di inclusione-esclusione

Dato un generico elemento x, quante volte l'ho contato nella formula?

x appartiene a $A_1, \dots, A_j$

l'ho contato

$$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + (-1)^{j+1} \binom{j}{j}$$

volte.

Se ci aggiungo $-1 = -\binom{j}{0}$ all'inizio, è una somma di binomiali a segno alterno $= (1-1)^j = 0$

$\longrightarrow$ l'ho contato 1 volta.

APPLICAZIONE

Contiamo le funzioni suriettive da A a $B = \{1, \dots, b\}$

$|A| = a$ $\qquad |B| = b$.

Anzi, contiamo le funzioni NON suriettive.

K_i = insieme delle funzioni in cui i non appartiene all'immagine.
$i = 1 \dots b$

Cerco $|K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_b|$

$$= |K_1| + |K_2| + \dots + |K_b|$$

(per il PIE)

$$- |K_1 \cap K_2| + |K_1 \cap K_3| + \dots$$

$$+$$

$$= (b-1)^a \cdot b$$

$$- (b-2)^a \binom{b}{2}$$

$$+ (b-3)^a \binom{b}{3}$$

etc.

$$= \sum_{i=1}^{b} (b-i)^a \binom{b}{i} \cdot (-1)^{i+1}$$ FUNZIONI NON SURGETTIVE

FUNZIONI SURGETTIVE $$\sum_{i=0}^{b} (b-i)^a \binom{b}{i} (-1)^i$$

Es. Contare i multipli di 3 o di 7 negli interi da 1 a 2009

PROBLEMA. Torneo completo con n squadre.

Vittoria → 2 Sconfitta → 0 Pareggio → 1

A torneo concluso: la metà dei punti di ognuno è stata totalizzata in partite con gli ultimi 10 classificati. Trovare n.

$$(a_1, a_2, \dots a_n)$$

a_i = punteggio di i-esima

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\binom{n}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot n!}{(n-2)! \cdot \cancel{2}}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 90$$

$$\downarrow$$

180 rotele

$$\frac{(n-10)(n-11)}{2} \cdot 2 = (n-10)(n-11)$$

$$\downarrow$$

$$2 \cdot (n-10)(n-11)$$

$$2 \cdot (n-10)(n-11) + 180 = n(n-1)$$

$$2n^2 - 42n + 220 + 180 = n^2 - n$$

$$n^2 - 41n + 400 = 0$$

$$n = \boxed{16} \vee n = 25$$

$$|V| > |P|$$

$$M = \frac{2 \cdot 15 \cdot 14}{15} = 28$$

Voglio dimostrare che $\exists$ un torneo a 25 partecipanti che soddisfa proviamo

- Gli ultimi 10 pareggiano fra di loro
- I primi 15 pareggiano fra di loro

Chiamo gli ultimi 10 $e_1, e_2 \dots e_{10}$

i primi $p_1, p_2 \dots p_{15}$

e_i pareggia con $p_j \iff j \equiv \begin{matrix} i+1 \\ i+2 \\ i+3 \end{matrix} \mod 5$

con gli altri perdono

$a_i = 9$

$p_j = 14$

ogni a_i pareggia con 9 dei p_j per le proprietà di cui sopra

$\Downarrow$

gli dò altri 9 punti

$a_i = 18$

ogni p_j ne pareggia 6 e ne vince 4

chi ha voglia controlli!!