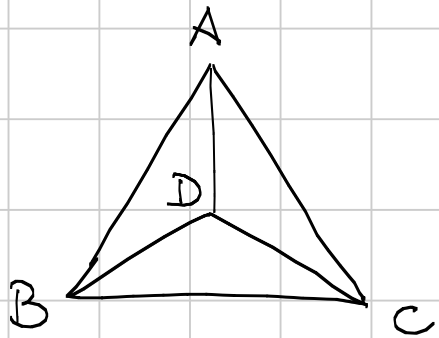
COMBINATORIA 2 — BASIC

Titolo nota 11/09/2009

Combinatoria induttiva vs elementi speciali

Esempio 1 Contare i cammini di n passi che partono e arrivano in D.



Indichiamo con C_n il numero di questi cammini. Facilmente:

$C_1 = 0 \qquad C_2 = 3 \qquad C_3 = 3 \cdot 2 = 6$

Idea: cercare una relazione ricorrente $C_{n+1} = f(C_n)$ oppure $C_{n+1} = f(C_n, C_{n-1})$, cioè qualcosa che dati i valori precedenti permette di calcolare i successivi.

C_{n+1} = numero dei cammini che al passo n NON sono in D

$C_{n+1} = (\text{Numero totale dei cammini}) - C_n$

↳ Tutti i cammini

↳ cammini che al passo n sono in D.

$= 3^n - C_n$

Abbiamo così ottenuto $C_{n+1} = 3^n - C_n$

Conoscendo C_1, posso calcolare tutti gli altri.

$$C_{n+1} = 3^n - C_n = 3^n - 3^{n-1} + C_{n-1} = 3^n - 3^{n-1} + 3^{n-2} - C_{n-2}$$

e così via fino ad arrivare a C_1.

<u>Secondo approccio</u> K_n = numero dei cammini lunghi n che partono da D e arrivano in A, B, C. C_n come prima

$K_{n+1} = 2K_n + 3C_n$ → ogni elemento di C_n produce 3 elementi di K_{n+1}

$C_{n+1} = K_n$ ogni elemento di K_n produce 2 elementi di K_{n+1}

Da qui si ricava $\quad C_{n+1} = k_n = 2k_{n-1} + 3C_{n-1} = 2C_n + 3C_{n-1}$

uso 1ª relaz. con indici shiftati di 1

uso 2ª relaz. per ricavare k_{n-1}

In conclusione abbiamo ricavato

$$C_{n+1} = 2C_n + 3C_{n-1} \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$$C_n = \alpha \cdot 3^n + \beta(-1)^n$$

α e β si calcolano imponendo alla formula di essere vera per $n=1$ e $n=2$. (o $n=0$ e $n=1$)

Esempio 2 Quante sono le sequenze di n simboli T/C in cui non ci sono MAI 2 T consecutive.

Contiamo 2 cose invece che una

C_n = sequenze con proprietà data che terminano con C

T_n = " " " " " " " T

Scriviamo relazioni ricorrenti:

$C_{n+1} = C_n + T_n$ (ogni sequenza lunga n ne genera una di $n+1$)

$T_{n+1} = C_n$ (solo le sequenze di C_n possono generare elementi di T_{n+1})

Come prima:

$$T_{n+1} = C_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } 1^a \\ \text{relaz}}}{=} C_{n-1} + T_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } 2^a \\ \text{relazione}}}{=} T_n + T_{n-1}$$

T_n e C_n sono succ. di tipo Fibonacci. Val. iniziali $T_1 = 1$, $T_2 = 1$

Esempio^2 bis Sequenze T/C lunghe n senza 3 o più teste consecutive.

Distinguo tre classi a seconda dei finali

X_n = sequenze lunghe n che finiscono con TT
Y_n = " " " " " " CT
Z_n = " " " " " " C

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = Z_n \\ Z_{n+1} = X_n + Y_n + Z_n \end{cases}$$

Con un po' di pazienza si esplicitano le relazioni rispetto ad una sola variabile

Occhio: la risposta al problema è $X_n + Y_n + Z_n$.

Esempio 3 Quante sono le funzioni $f:\{1,\dots,n\}\to\{1,2,3,4,5\}$ tali che

$$|f(i+1)-f(i)|\geq 3 \qquad \forall\, i=1,\dots,n-1$$

Oss. 1 Il valore 3 non può essere assunto dalla funzione

Oss. 2 Se $f(i)=1$, quanto può valere $f(i+1)$? 4 o 5

" " $=2$ " " " " Solo 5

" " $=4$ " " " " Solo 1

" $=5$ " 1 o 2

Oss. Pongo

E_n = funzioni con la proprietà data e $f(n)\in\{1,5\}$

I_n = " " " $f(n)\in\{2,4\}$

$I_{n+1}=E_n$ (se al passo $n+1$ sono interno, al passo n ero esterno)

$E_{n+1}=E_n+I_n$ (una funzione esterna la posso sempre ottenere)

$\rightarrow$ FIBONACCI

Esempio 4 Sono dati n punti R e n punti B. I punti sono a 3 a 3 non allineati.

Domanda: è sempre possibile costruire n segmenti con gli estremi di colore diverso che non si intersecano?

$\boxed{\text{Risposta: SI}}$ Ma: l'induzione (almeno banalmente) NON funziona !!!

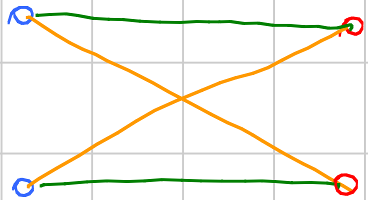
Considero, tra tutti i possibili modi di unire i rossi con i blu, quello per cui LA SOMMA DELLE LUNGHEZZE È MINIMA.

Fatto 1: i modi di unire sono un numero finito (sono $n!$, come le funzioni BIGETTIVE da $\{1, ..., n\}$ a $\{1, ..., n\}$)

Essendo un numero finito ~~c'è~~ n'è ALMENO uno che realizza il minimo della lunghezza.

Fatto 2: uno qualunque dei modi di unire con minima lunghezza si realizza senza intersezioni.

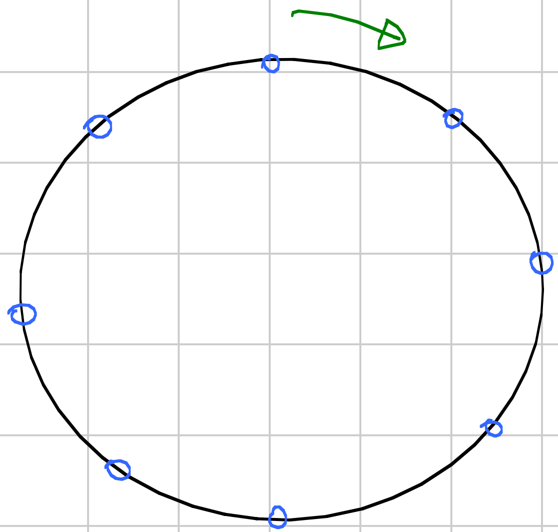
Supponiamo per assurdo che ci sia intersezione



Ma allora la configurazione non ha lunghezza minima, perché con "i 2 verdi" risparmio sulla lunghezza.

— o — o —

Esempio 5 n punti ai vertici di un poligono (regolare)

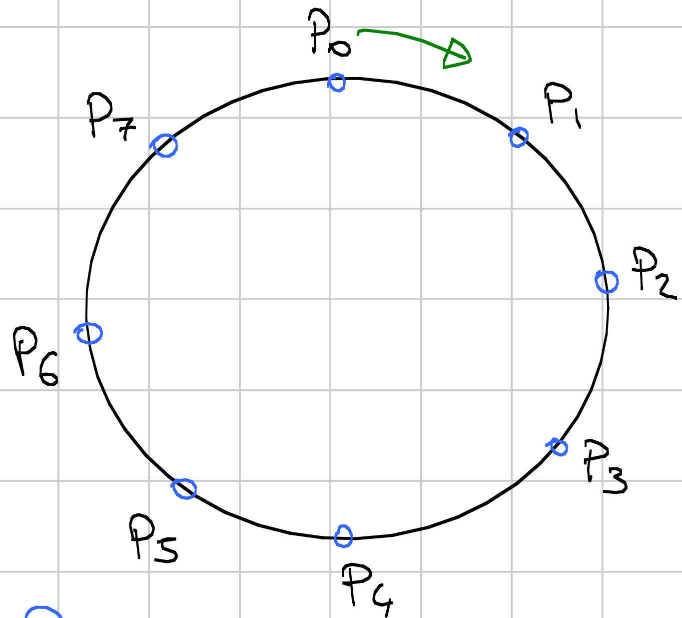


Nei vari punti ci sono dei serbatoi che complessivamente contengono carburante sufficiente per un giro. Domanda: esiste un p.to di partenza dal quale la moto può partire per un giro completo in senso orario?

NON funziona partire dal punto con + carburante!

IDEA: in ogni stazione scriviamo la differenza fra il carburante presente e quello necessario per arrivare alla stazione successiva.

La somma di questi numeri è 0 (o ≥ 0 se siamo fortunati)



Fissiamo un punto a caso.

Definiamo

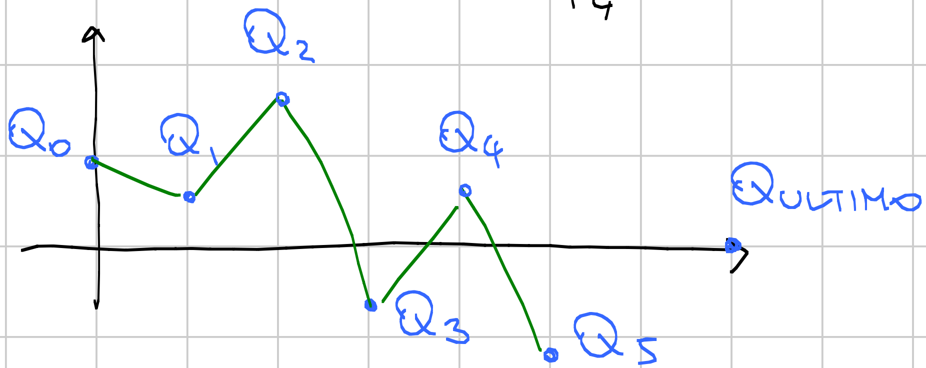
$Q_0 = P_0$

$Q_1 = P_0 + P_1$

$Q_2 = P_0 + P_1 + P_2$

$\vdots$

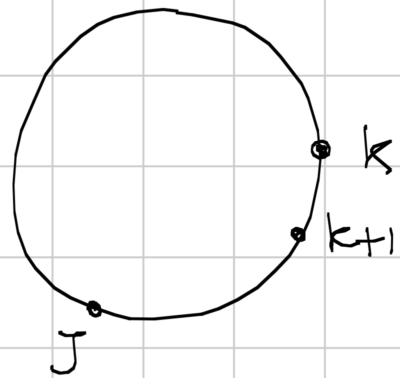
$Q_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k$



Scelgo come partenza la stazione per cui Q_k è MASSIMO e dico che da lì posso fare un giro completo.

a posteriori non funziona.

Vediamo se riusciamo ad arrivare fino alla stazione J



Per arrivare a $k+1$ serve che $P_k \geq 0$.

Ma $P_k = Q_k \boxed{- Q_{k-1}}$ e questo è ≥ 0

perché Q_k è massimo !!!

Quindi in $k+1$ si arriva.

Per arrivare a $k+2$ serve che $P_k + P_{k+1} \geq 0$

Ma $P_k + P_{k+1} = Q_{k+1} \boxed{- Q_{k-1}}$ e questo non ha motivo di essere positivo...

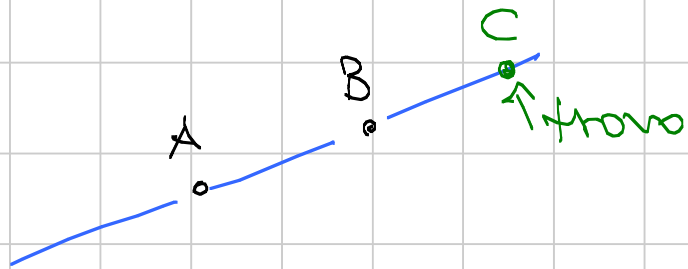
Per arrivare a $k+3$ serve che $P_k + P_{k+1} + P_{k+2} \geq 0$

Ma $P_k + P_{k+1} + P_{k+2} = Q_{k+2} \boxed{- Q_{k-1}}$

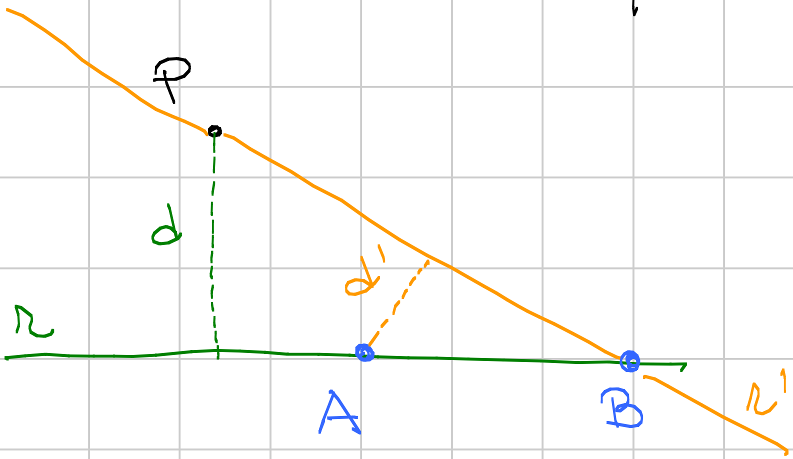
La vera condizione da imporre è che Q_{k-1} sia $\boxed{\text{MINIMO}}$

— o — o —

<u>Esempio 6</u> (Teorema di Sylvester). Sono dati n punti con questa proprietà: comunque io ne scelga 2, ce n'è sempre almeno un terzo sulla retta che li congiunge.
Allora: i p.ti sono tutti allineati.

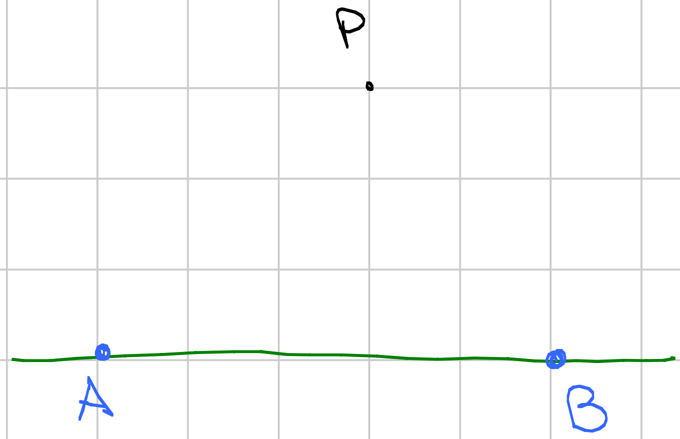


<u>Dim.</u> Supponiamo che la tesi sia falsa. Allora non sono tutti allineati. Scelgo la coppia (punto, retta) per cui la distanza è minima, ma non nulla.
Esaminiamo questa configurazione



Così non può essere, perché la coppia (A, retta PB) ha distanza minore. Idem tutte le volte che la proiezione di P è fuori da AB (segue.)

Resta da esaminare il caso
in cui la proiezione di P cade
tra A e B.
In questo caso prendo il
terzo punto C che so esserci
sulla retta. In ogni caso la
proiezione di P sarà esterna rispetto ad almeno uno dei
segmenti AB, AC, BC. Dunque ci riconduciamo sempre al caso
precedente.

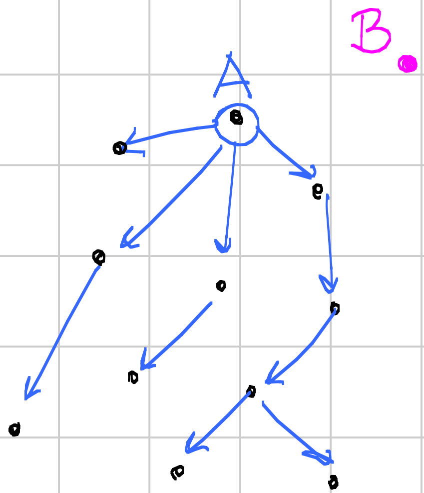


— o — o —

<u>Esempio 7</u> Sono date n città. Per ogni coppia di città c'è sempre
un'unica strada a senso unico che le collega (o in un verso
o nell'altro).
Dimostrare che esiste una città a partire dalla quale posso arrivare
ovunque (pur di girare).

Dim induttiva

$\boxed{n=2}$ banale



$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Considero n città chiamiamola A

Ce n'è una dalla quale arrivo ovunque.

Aggiungo una $(n+1)$-esima città B.

Esamino il legame AB.

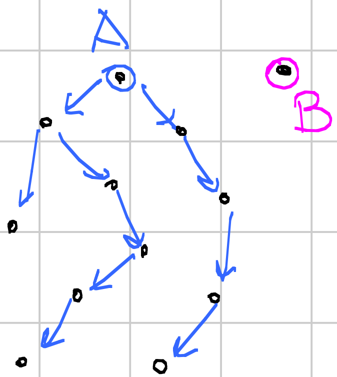
* Se da A vado a B, allora da A continuo ad andare ovunque
* Se da B vado a A, allora da B vado ovunque.

Esempio 7 bis Come prima abbiamo n città ed un po' di strade a senso unico (non è detto che 2 città abbiano un collegamento diretto).

Ipotesi: comunque scelgo 2 città C_1 e C_2, allora esiste un modo di andare da C_1 a C_2, oppure viceversa (anche non diretto)

Tesi: esiste almeno una città da cui si può andare ovunque.

Dim. induttiva



$n=2$ banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Date n città, esiste A da cui vado ovunque.

[redacted] B. Come prima:

* se (anche indirettamente) da A vado a B, allora da A vado ovunque
* se (anche indirettamente) da B vado ad A, allora da B vado ovunque.

0 PUNTI

Dimostrazione SBAGLIATA

Metodo infallibile per trovare dimostrazioni induttive sbagliate: cercare la parola aggiungere!!

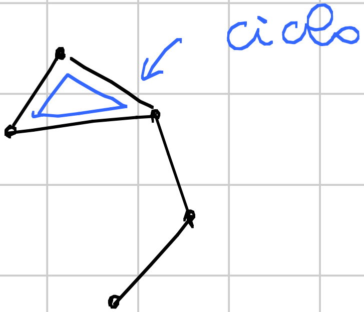
Bisogna TOGLIERE. Prendo $n+1$ città e ne tolgo una.
Ora all'interno delle n rimaste non è verificata l'ipotesi induttiva perchè il collegamento tra C_1 e C_2 (che esiste nelle $n+1$) potrebbe passare da B!!! Quindi non è detto che esista la A.
La dimostrazione induttiva NON FUNZIONA!!!

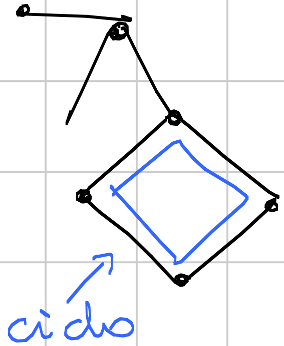
$\boxed{\text{Dim. con elemento speciale}}$ Considero $\boxed{\text{la}}$ città da cui si arriva nel maggior numero possibile. La chiamo A.

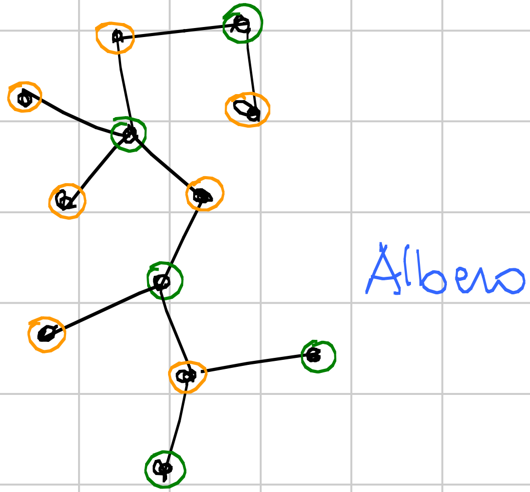
meglio: una delle

Dico che da A arrivo ovunque. Supponiamo per assurdo che non si arrivi in B. Ma allora per ipotesi da B si arriva in A, ma allora B è meglio di A. $\square$

Esempio 8 Un albero è un grafo senza cicli.

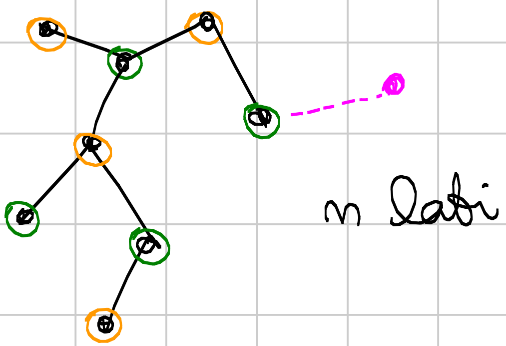






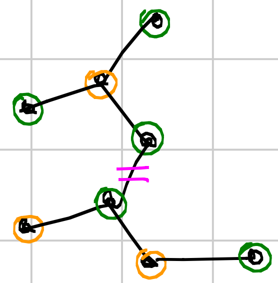
Teorema È sempre possibile colorare con 2 colori i vertici di un albero in modo che ogni lato connetta vertici di colore diverso

Dim induttiva Prendo un grafo con n lati e [redacted] un lato.



L'$(n+1)$-esimo lato può toccare solo uno dei vecchi vertici (altrimenti creo un ciclo). Quindi basta dare il colore opposto al nuovo vertice. DIM KANNATA.

Provo a togliere: ho un grafo con $(n+1)$ lati;
ne tolgo uno e coloro ciò che rimane.
Non è detto che funzioni !!!!



Come rimediare? Devo togliere un lato "agli estremi". Modo possibile: prendiamo 2 vertici che siano a distanza max possibile. Chiamiamoli A e B. Dico che A e B sono collegati con un vertice solo.

Supponiamo che ci sia un Y collegato con A oltre ad X_1. Allora

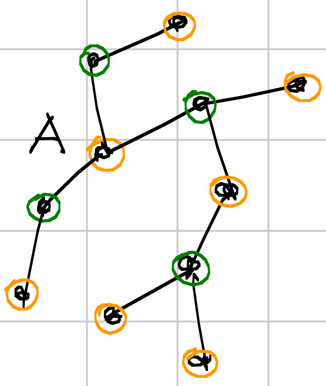
- o Y è collegato con B senza passare da A, ma allora ho un ciclo;
- o Y è più lontano di A rispetto a B.

In ogni caso ho un assurdo.

Dim. con la distanza

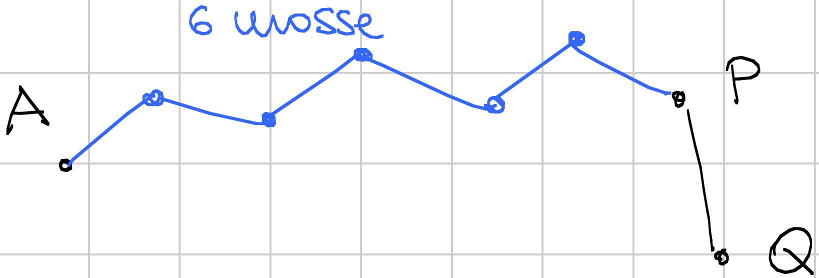
Fisso un vertice a caso. Lo chiamo A.

Coloro con il 1° colore i vertici a distanza PARI da A.



Coloro con il 2° colore i vertici a distanza DISPARI da A.

Serve dimostrare che 2 qualunque punti collegati non possono avere distanza entrambi PARI da A (o dispari)

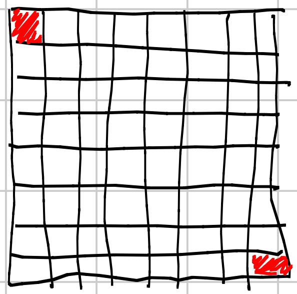


Se avessi un collegamento AQ con un numero pari di mosse, in ogni caso si creerebbe un ciclo.

— o — o —

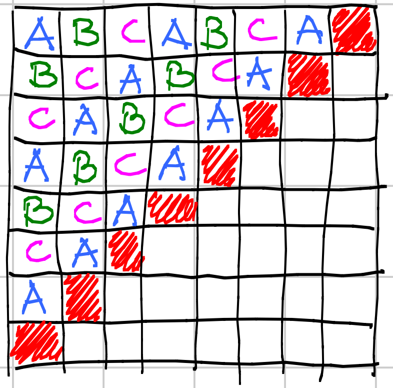
COLORAZIONI

Esempio 1 Solita scacchiera 8×8 privata di 2 vertici opposti.
Restano 62 caselle.
Domanda: è possibile ricoprirle
con mattonelle 2×1 ?



Risposta: NO. Se la scacchiera fosse colorata a scacchiera
avrei tolto 2 caselle dello stesso colore. Quindi avrei, ad esempio,
30 B e 32 N. Ogni mattonella 2×1 copre una bianca e una nera.
Resteranno sempre almeno 2 buchi sul N.

Esempio 2 Tabella 50×50 e tolgo una diagonale. Mattonelle 3×1.
Quante caselle scoperte come minimo?



Nel caso 8×8 (parte alta) ho
28 caselle, di cui

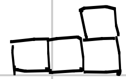
A → 12

B → 7

C → 9

Ogni mattonella, comunque messa, copre 1A, 1B, 1C.
Quindi al max 7 mattonelle, quindi almeno 7 caselle scoperte.
Nel caso 8×8 restano almeno $7\cdot2=14$ caselle scoperte.

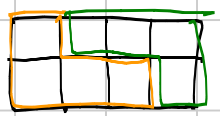
Nel caso 50×50 è solo + difficile contare i colori.

Esempio 3 Quali rettangoli $m \times n$ si ricoprono con L  ?

Risposta: tutti e soli quelli con $m \geq 2$, $n \geq 2$, e $8 \mid m \times n$.

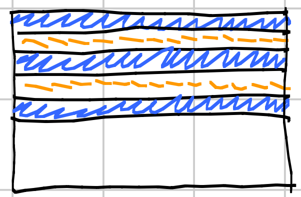
$\boxed{\text{STEP 1}}$ Intanto deve essere $m \cdot n$ multiplo di 4 (area)

$\boxed{\text{STEP 2}}$ Il caso $4k \cdot 2h$ si ricopre facilmente. Basta fare un rettangolo 4×2 e clonarlo



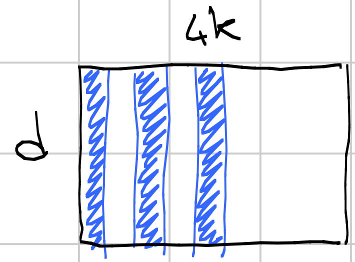
$\boxed{\text{STEP 3}}$ Almeno un lato deve essere multiplo di 4. Allora per forza il rettangolo è del tipo $2d_1 \times 2d_2$, con d_1 e d_2 DISPARI. In questo caso il numero di pezzi necessari è $d_1 d_2$, cioè dispari!! Coloro con 2 colori a strisce orizz.

Quante sono le caselle dei 2 colori? Lo stesso numero. Ogni mattonella, comunque disposta, è del tipo $3+1$



Ora le caselle di ogni singolo colore sono: $2d_1d_2$, cioè PARI.
Ma ogni mattonella ha 3 o 1 casella blu, e le mattonelle sono in numero dispari !!!

$\boxed{\text{STEP 4}}$ Resta il caso $4d_1 \times d_2$. Coloriamo come prima a strisce verticali. Come prima



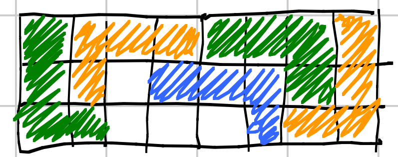
Caselle blu $= 2d_1d_2 =$ pari

Ogni mattonella ha numero dispari di BLU, e le mattonelle sono in numero dispari.

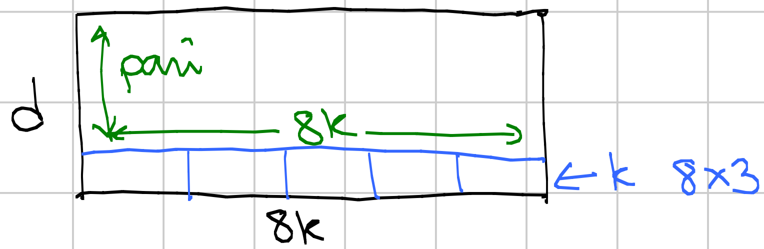
Ora sappiamo che l'area è per forza multipla di 8.

$\boxed{\text{STEP 5}}$ Resta da far vedere che tutti i casi con $8 \mid m \cdot n$ sono ok.

Ci sono 2 tipi di casi



* $4k \times 2h$ → già visto
* $8k \times$ dispari. Si fa a mano il 3×8



Esempio 4 Quali $m \times n$ si ricoprono con mattonelle 3×2 ?

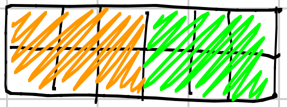
Risposta: $m \geq 2$, $n \geq 2$, $6 \mid m \cdot n$.

$\boxed{\text{STEP 1}}$ È banale fare i $3k \times 2h$

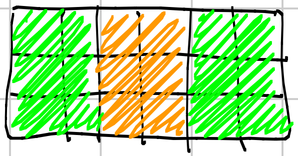
$\boxed{\text{STEP 2}}$ È ovvio che $6 \mid mn$ è condiz. nec. (area)

$\boxed{\text{STEP 3}}$ Restano da fare i $6k \times h$. Bastano in realtà i $6 \times h$

6×2



6×3



Con questi faccio tutto.

Esempio 5 Cosa ricopro con il 3×4

Risposta: $3k \times 4h$ e $12k \times h$ con $h \neq 1, 2, 5$

Banale: ricoprire i $3k \times 4h$ e area multipla di 12.

Resta da fare: * escludere il caso $6d_1 \times 2d_2$ (d_1, d_2 dispari)

* costruire il caso $12k \times h$.

$12k \times 3 \to$ orizzontale

$12k \times 4 \to$ verticale

$12k \times 5$ si esclude "a mano"

$12k \times 6 \to$ 2 orizzontali

$12k \times 7 \to$ $12k \times 4$ con sopra un $12k \times 3$

1, 2, 5 sono gli unici interi che non si possono scrivere nella forma

$3x + 4y$

blocchi orizz. blocchi vert.

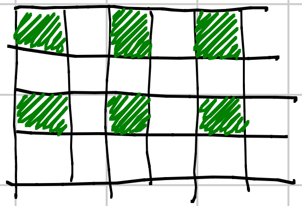
Come escludere $6d_1 \times 2d_2$? Coloro a strisce, con 2 colori.

Ogni colore ha $6d_1d_2$ caselle, quindi PARI.

Il numero dei blocchi è d_1d_2, quindi dispari.

In ogni blocco i colori sono $6+6$ oppure $4+8$.

Sembra non funzionare.



Coloro "1 su 4".

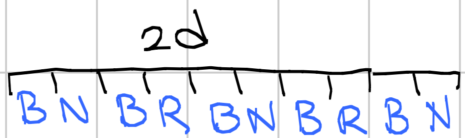
In tutto avrò $3d_1d_2$ caselle colorate → DISPARI

Ogni blocco ha 4, 2, e basta caselle colorate.

Essendo pari il numero di caselle colorate in ogni blocco, deve essere pari in generale.

— o —

Alternativa: provo con BNBR. Quante caselle ho dei vari colori?



B → $6d_1d_2$

N → ho + nere che rosse $\Big\}\ N-R = 2\cdot d$

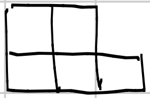
R →

Ogni mattonella può avere $N-R = 3-3=0$ ORIZZONTALE

$= 4, -4, 0$ VERTICALE

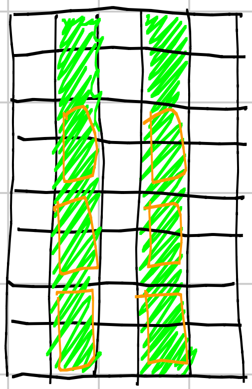
Ogni mattonella ha quindi $N-R$ multiplo di 4, il che non è vero in generale.

—o—o—

Esempio 6  Quali $5 \times n$ si tassellano?

Banalmente i $5 \times 2k$ (a forza di 5×2).

Gli altri? No!



Ho 2 colonne verdi ciascuna con n caselle. Per ogni mattonella prende almeno 2 caselle dalla STESSA parte. Io devo piazzare n mattonelle. Quindi ogni mattonella deve prendere solo 2 verdi (perché in tot. sono $2n$) Quindi l'altezza delle colonne deve essere pari.

INVARIANTI

① Ci sono 12 gnomi, con la casa R o B.
A Gennaio il 1° gnomo adegua il colore della sua casa alla maggioranza degli altri.
A Febbraio tocca al 2° gnomo e così via negli anni ?

Tesi: dopo un po' nessuno ridipinge più la casa !!!

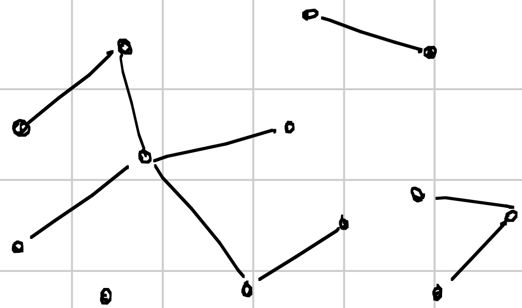
Dim.: trovare un invariante, cioè qualcosa che cambia in maniera controllata.

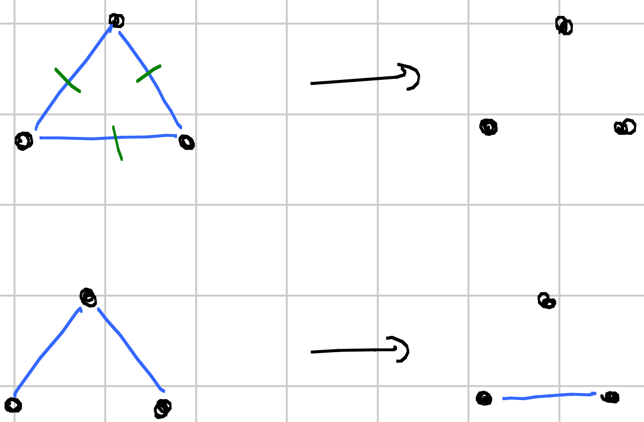
INVARIANTE: numero di coppie ETEROCROMATICHE, cioè una coppia di gnomi con case di colore diverso.

Questo numero: resta uguale quando lo gnomo del mese non pittura;
scende se lo gnomo pittura

Essendo un intero, l'invariante può scendere un numero finito di volte, poi non cambia più, quindi più nessuno pittura.

(2) Grafo. Mosse possibili:





Due giocatori fanno alternativamente una mossa a scelta tra le 2.
Perde chi non può più muovere.

Domanda: qual è la strategia migliore?
Risposta: vince sempre lo stesso indipendentemente da come giocano!

$\boxed{\text{STEP 1}}$ Il gioco prima o poi finisce. Motivo: ad ogni mossa il numero dei lati decresce.

$\boxed{\text{STEP 2}}$ Quando il gioco è finito, in ogni vertice arrivano 0 oppure 1 lati.

$\boxed{\text{STEP 3}}$ Il numero dei lati uscenti da ogni vertice ha sempre la stessa parità.
Invariante = parità del numero dei lati uscenti da ogni vertice.

$\boxed{\text{STEP 4}}$ Status finale del grafo:

* i vertici che all'inizio avevano numero pari di lati $\to 0$
* " " " dispari di " $\to 1$

dunque finiranno accoppiati (N.B. sono sempre in numero pari)

STEP 5 Il vincitore dipende solo dal numero di mosse fatte.
Ad ogni mossa se ne vanno 3 oppure 1 lati quindi un numero dispari. Da ogni vertice sono spariti un numero pari di lati.
È vero quindi che il numero di lati spariti è pari? NO!
Così ogni lato si è contato 2 volte.

In ogni caso il numero di lati che spariscono è fisso (dipende solo dal grafo iniziale) quindi la parità del numero di mosse è fissa, dunque il vincitore è fisso!!!