Titolo nota

Geometria 3 - basic : Sintetica

10/09/2009

1) Ripasso + alcuni Teo sui Triangoli

2) Trasformazioni del piano

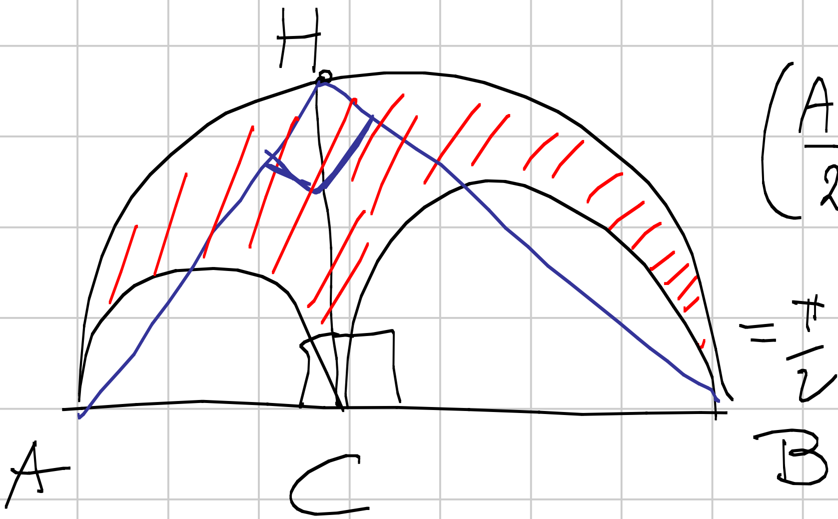
3) Inversione, Potenza, ...

- Similitudine di figure

↳ Teo Euclide I, II

Teo Pitagora

Es:



$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2} - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{(AC+CB)^2}{4} - \frac{AC^2}{4} - \frac{BC^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2AC\cdot CB}{4}\right) = \frac{\pi}{4} AC\cdot CB =$$

$CH = \sqrt{3}$

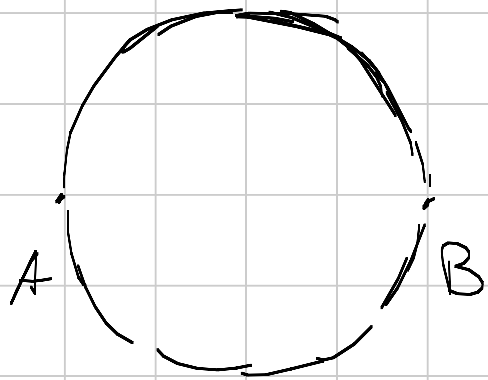
$$= \frac{\pi}{4} CH^2 = \frac{3}{4}\pi.$$

AHB retto in H $\Rightarrow$ $HC^2 = AC \cdot CB$

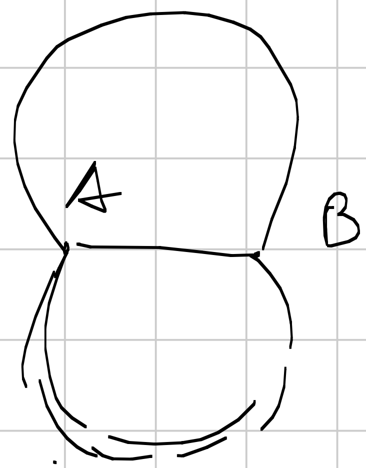
Angoli e circonferenze

- Dati A, B voglio $\mathcal{L} = \{ P \text{ t.c. } A\widehat{P}B = \alpha \}$

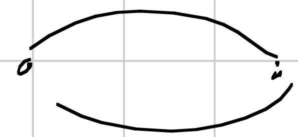
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

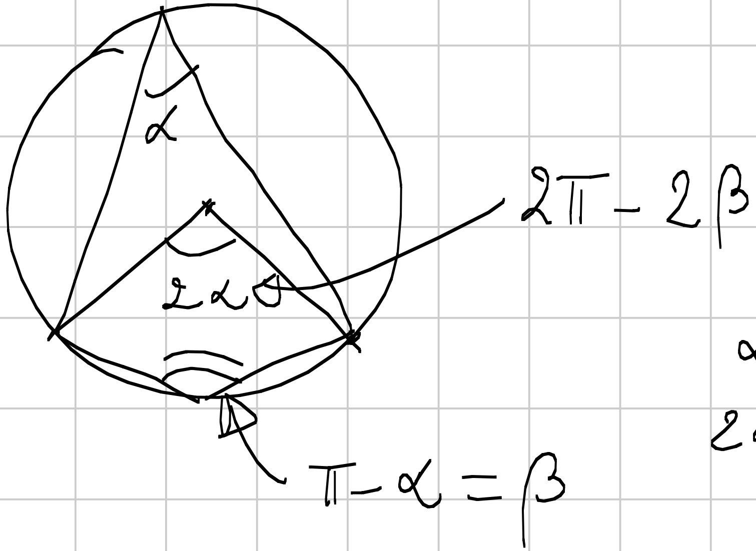


$\alpha < \frac{\pi}{2}$



$\alpha > \frac{\pi}{2}$

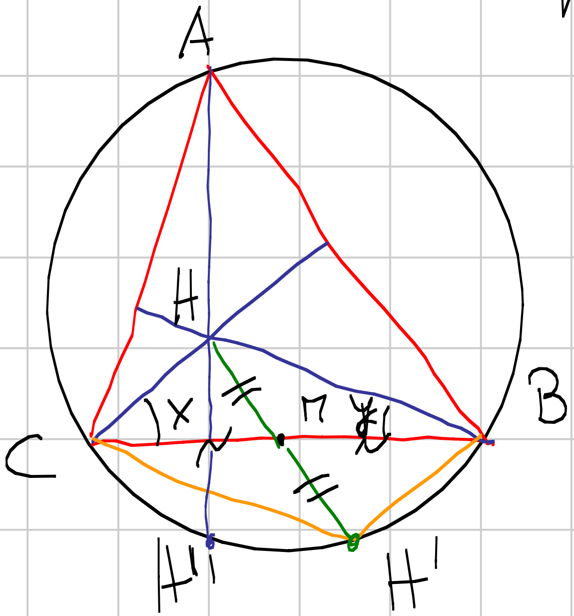




$\alpha = \pi - \beta$

$2\alpha = 2\pi - 2\beta$

<u>Es</u>: Il simm. dell'ortocentro risp. al punto medio del lato sta sulla cfr. circoscritta del triangolo



<u>Caso acutangolo</u>

Possiamo dim. che $C\hat{H'}B = \pi - C\hat{A}B$

Questo + il fatto che A e H' stanno da parti diverse di CB ci dà la Tesi.

Notiamo dal disegno che $\boxed{CHBH' \text{ é parallelogramma}}$ (*)

se é vero $C\hat{H'}B = C\hat{H}B = \pi - x - y$

$x = \frac{\pi}{2} - \beta \qquad y = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$\Downarrow$

abbiamo finito.

$C\hat{H}B = \pi - \frac{\pi}{2} + \beta - \frac{\pi}{2} + \gamma = \beta + \gamma = \pi - \alpha$

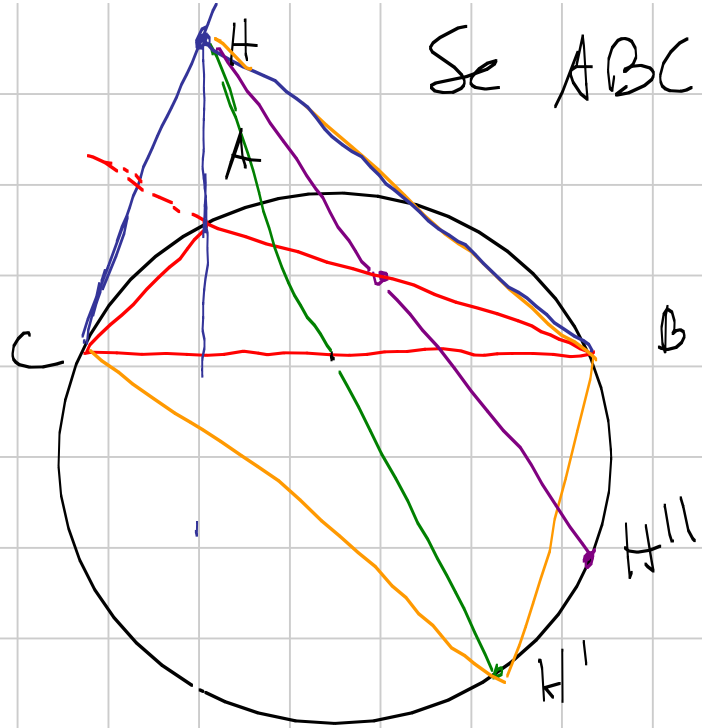
Dobbiamo dim che é vera (*)

Per cost. $AM = CM$ e $HM = MH'$ $\Rightarrow$ le diag. si bisecano

$\Rightarrow$ é parallelogramma.

<u>Caso ottusangolo</u>: H può non essere interno ad ABC

Se ABC é ottusangolo in A, tutto a posto.



Se ABC è ottusangolo in B o in C non deve valere

$$\hat{CH'B} = \pi - \hat{CAB}$$

ma

$$\hat{CHB} = \hat{CAB}$$

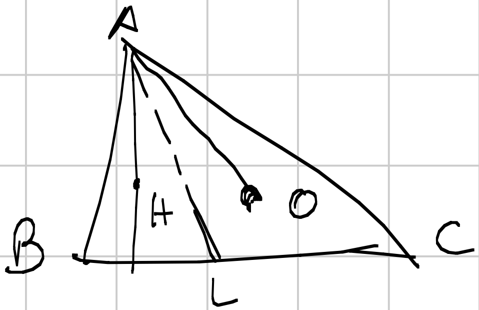
<u>Es + casa</u>: Funziona lo stesso con il simm. rispetto al lato.

<u>Es</u>: ABC triangolo H, O orto- e circocentro, AL bisettrice

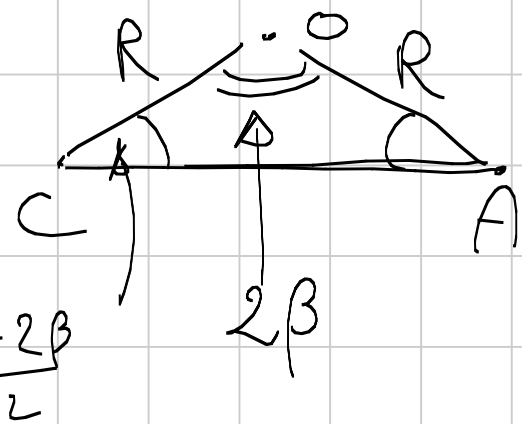
$\Rightarrow$ AH e AO sono simm. risp. ad AL

$\Updownarrow$

$$\hat{BAH} = \hat{CAO}$$

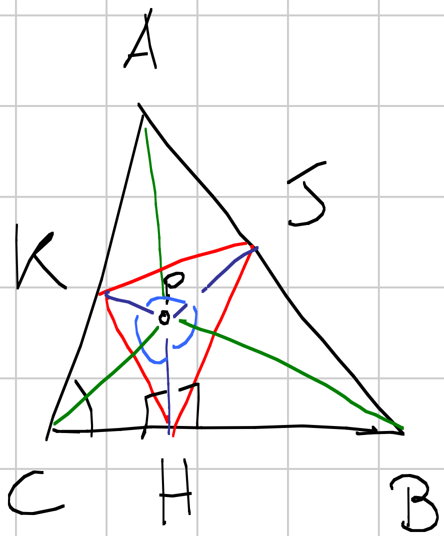


$$B\hat{A}H = \frac{\pi}{2} - \beta \qquad C\hat{A}O = \frac{\pi}{2} - \beta$$



ok

Es:



$AP = x$

$BP = y$

$CP = z$

H, K, J proiez.

$HK = ?$

$KJ = ?$

$JH = ?$

Oss 1) PHBJ, PHCK, PKAJ sono ciclici

$$H\hat{P}J = \pi - \beta, \quad H\hat{P}K = \pi - \gamma, \quad K\hat{P}J = \pi - \alpha$$

$$\underbrace{CH^2 + PH^2 = CP^2}_{z^2} \qquad \underbrace{HB^2 + PH^2 = BP^2}_{y^2} \qquad CH + BH = CB = a$$

$$PH^2 = z^2 - CH^2 = y^2 - HB^2 = y^2 - (a - CH)^2 = y^2 - a^2 - CH^2 + 2aCH$$

$$z^2 - y^2 + a^2 = 2aCH \qquad CH = \frac{z^2 - y^2 + a^2}{2a}$$

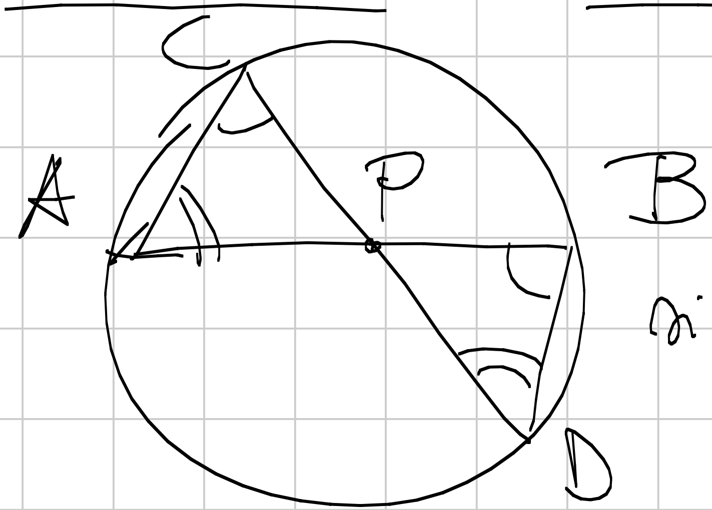
$$CK = \frac{z^2 - x^2 + b^2}{2b} \qquad HB = \frac{y^2 - z^2 + a^2}{2a}$$

$$KH^2 = CK^2 + CH^2 - 2CK \cdot CH \cdot \cos\gamma = \dots\dots$$

Carnot.

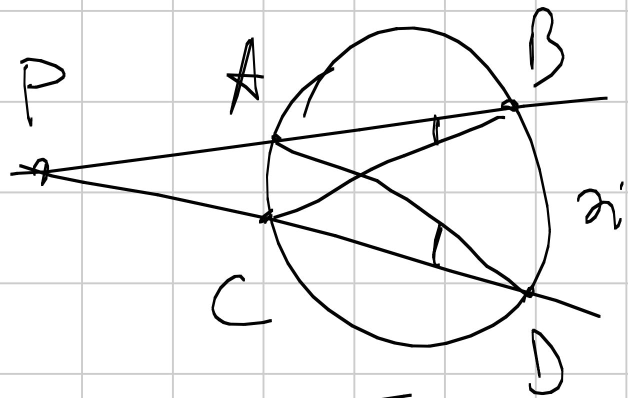
Teorema delle corde, delle secanti, della secante e della tangente

1)



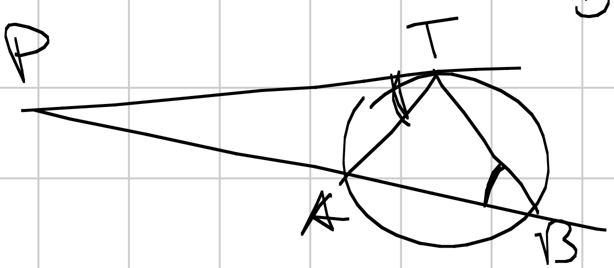
simili $\Rightarrow$ $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

2)



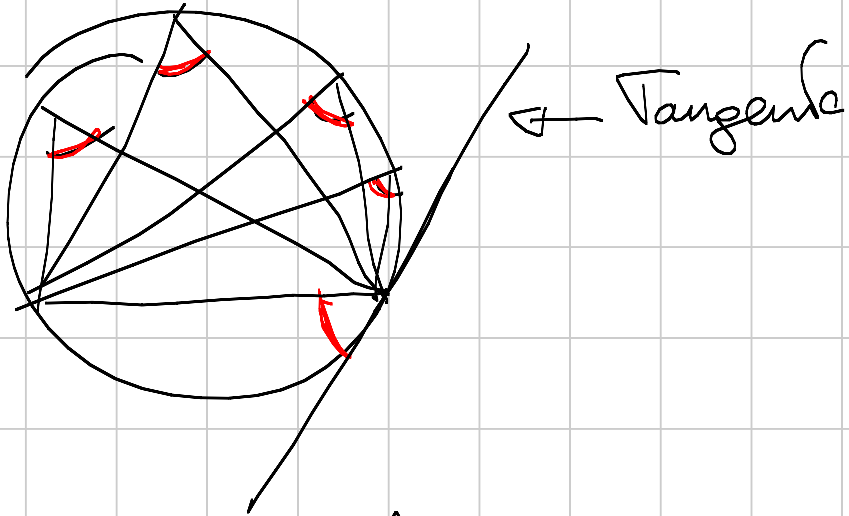
simili $\Rightarrow$ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

3)



simili $\Rightarrow$ $\overline{PT}^2 = PA \cdot PB$

Ricordiamo:



Punti notevoli di un Triangolo

- Baricentro = incontro mediane, divide ogni mediana in 2:1, divide la sup. del tri in 3 aree uguali.

- Incentro = incontro bisettrici, equidist. dai lati,

- Ortocentro = incontro altezze, A è ortocentro di BHC, B è ortocentro di AHC, C è ortocentro di AHB, i circ. stanno nella sfr. circ.

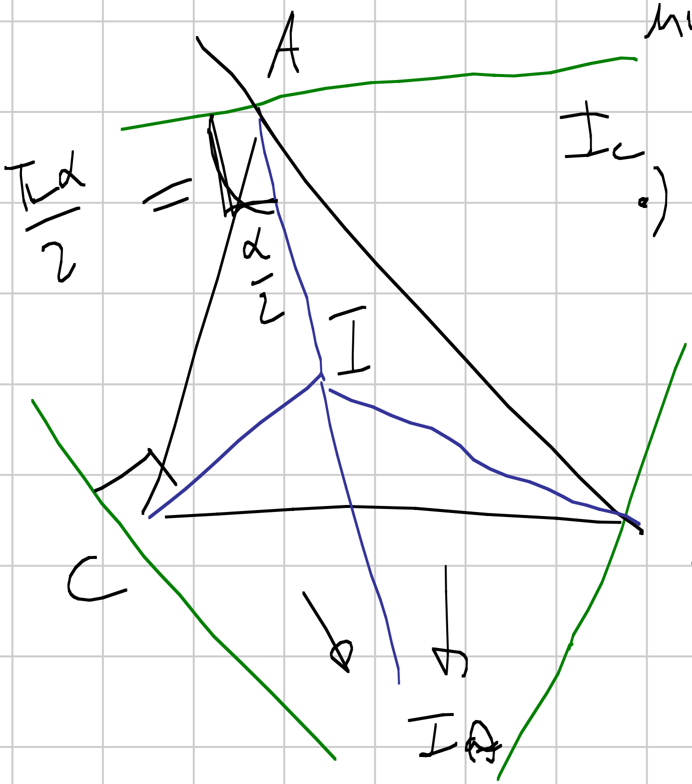
• **Circocentro** = incontro assi, equidist. dai vertici, ...

• **Excentri** = centri circonf. exinscritte, incontro di 1 bisett. interna + 2 bisett. esterne.

→ excentro opposto ad A

I, I_A, I_B, I_C fanno un sistema ortocentrico

$I_B \hat{A} I = \frac{\pi}{2}$

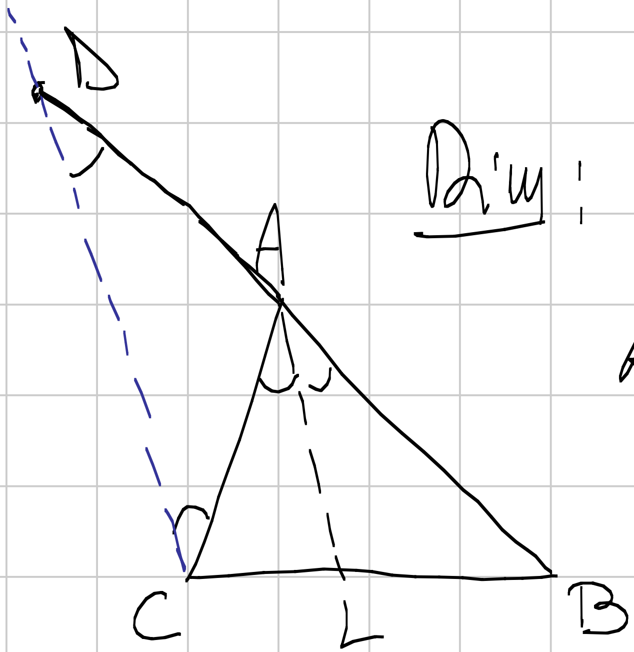


$\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi - \alpha}{2} =$

•) nel Δ delle bisett. esterne le bisett. interne sono altezze

•) $I_B A I C$ ciclico che ha centro nel pt medio di $I I_B$

Es: ABC, AL bisett $\Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC}$



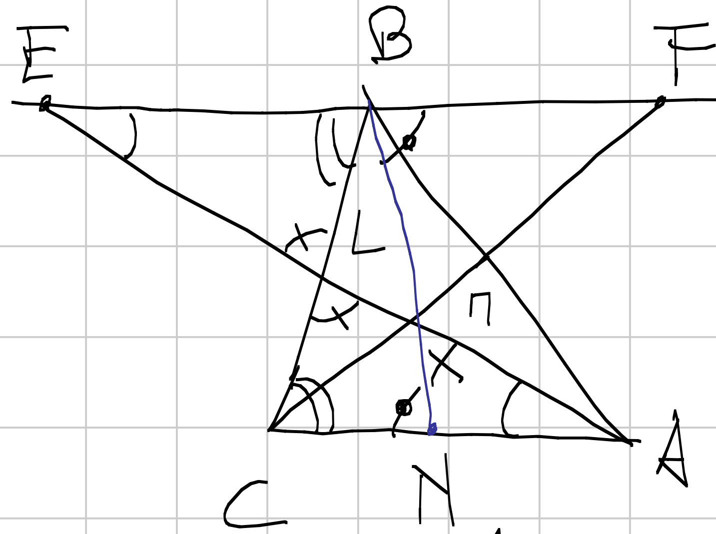
Dim: $CD \parallel AL \quad D \in AB$

$\widehat{ACD} = \widehat{CAL} = \widehat{LAB} = \widehat{ADC}$

$\Rightarrow DA = AC$

Le parallele CD e AL tagliano BD e BC

$\Rightarrow \frac{CL}{LB} = \frac{DA}{AB} = \frac{CA}{AB}$



$BE \parallel CA$

$\overset{\triangle}{EBL}$ simile a $\overset{\triangle}{CLA}$

$$\boxed{\frac{EB}{CA} = \frac{BL}{LC} = \frac{EL}{LA}} \qquad BE = CA \cdot \frac{BL}{LC}$$

$\overset{\triangle}{BFM}$ simile a $\overset{\triangle}{AMC}$

$$\boxed{\frac{BF}{CA} = \frac{BM}{MA} = \frac{FM}{MC}} \qquad BF = CA \cdot \frac{BM}{MA}$$

Quando BN con N su AC concorre con AL e CM?

Se BN passa per X $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{CNX}$ e $\overset{\triangle}{BXF}$ sono simili

$\overset{\triangle}{ANX}$ e $\overset{\triangle}{BXE}$ sono simili

$$\frac{CN}{AN} = \frac{BF}{BE} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \dfrac{CN}{BF} = \dfrac{CX}{XF} = \dfrac{XN}{BX} \\[2ex] \dfrac{AN}{BE} = \dfrac{AX}{XE} = \dfrac{XN}{BX} \end{cases}$$

$$\frac{CN}{AN} = \frac{BF}{BE} = \frac{\cancel{CA} \cdot \dfrac{BM}{MA}}{\cancel{CA} \cdot \dfrac{BL}{LC}} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{LC}{LB}$$

$$1 = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{LC}{LB} \cdot \frac{AN}{NC}$$ e se vale questo, concorrono

<u>Teo di Ceva</u>: AR, BS, CT concorrono se e solo se

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1. \quad (*)$$

Se vale $(*)$ e AR, BS, CT non concorrono

$\Rightarrow \exists\, T'$ t.c. AR, BS, CT' concorrono

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AT'}{TB} \cdot \dfrac{BR}{RC} \cdot \dfrac{CS}{SA} = 1 \\[2ex] \dfrac{AT}{TB} \cdot \dfrac{BR}{RC} \cdot \dfrac{CS}{SA} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{AT'}{T'B} = \frac{AT}{TB}$$

$$\Downarrow$$

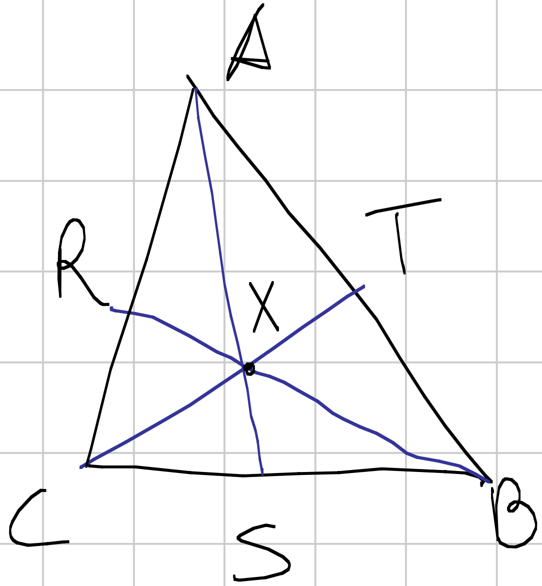
$T = T'$ $\Rightarrow$ concorrono!

$\dfrac{AX}{XB} > 0$ se $A \quad X \quad B$

$\dfrac{AX}{XB} < 0$ se $X \quad A \quad B$

$A \quad B \quad X$

Dim 2:



$[XYZ]$ = area di $X\hat{Y}Z$

$$\frac{[ACS]}{[ASB]} = \frac{CS}{SB} = \frac{[CSX]}{[BXS]} = \frac{[AXC]}{[AXB]}$$

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{BT}{TA} = \frac{[CBT]}{[CAT]} = \frac{[XBT]}{[XAT]} = \frac{[CXA]}{[CXB]} \qquad \frac{AR}{RC} = \frac{[AXB]}{[CXB]}$$

Sostituendo si ha la tesi

Es 1: Concorrono le bisettrici

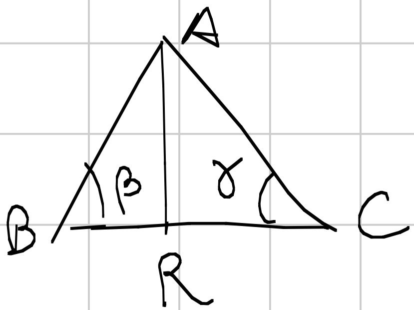
$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CS}{SA}=1.$$

$$\frac{AT}{TB}=\frac{AC}{CB}$$

$$\frac{BR}{RC}=\frac{B\cancel{A}}{\cancel{A}C}$$

$$\frac{CS}{SA}=\frac{CB}{BA}$$

Concorrono le altezze

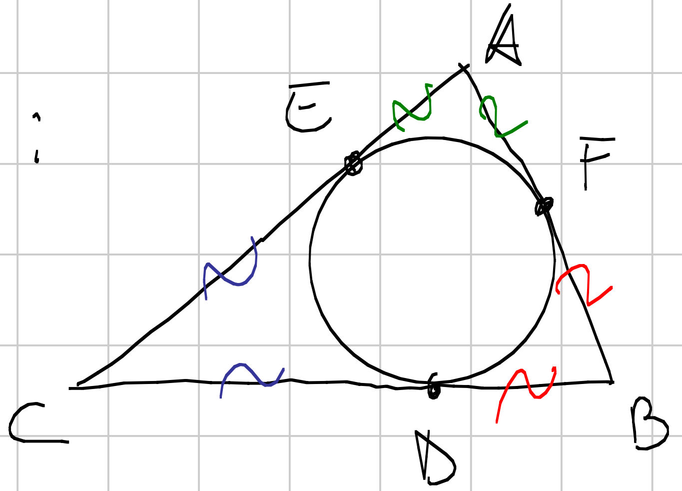


$$\frac{BR}{RC}=\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\gamma}$$

$$\frac{CS}{SA}=\frac{BC\cos\gamma}{AB\cos\alpha}$$

$$\frac{AT}{TB}=\frac{AC\cos\alpha}{CB\cos\beta}$$

Es:

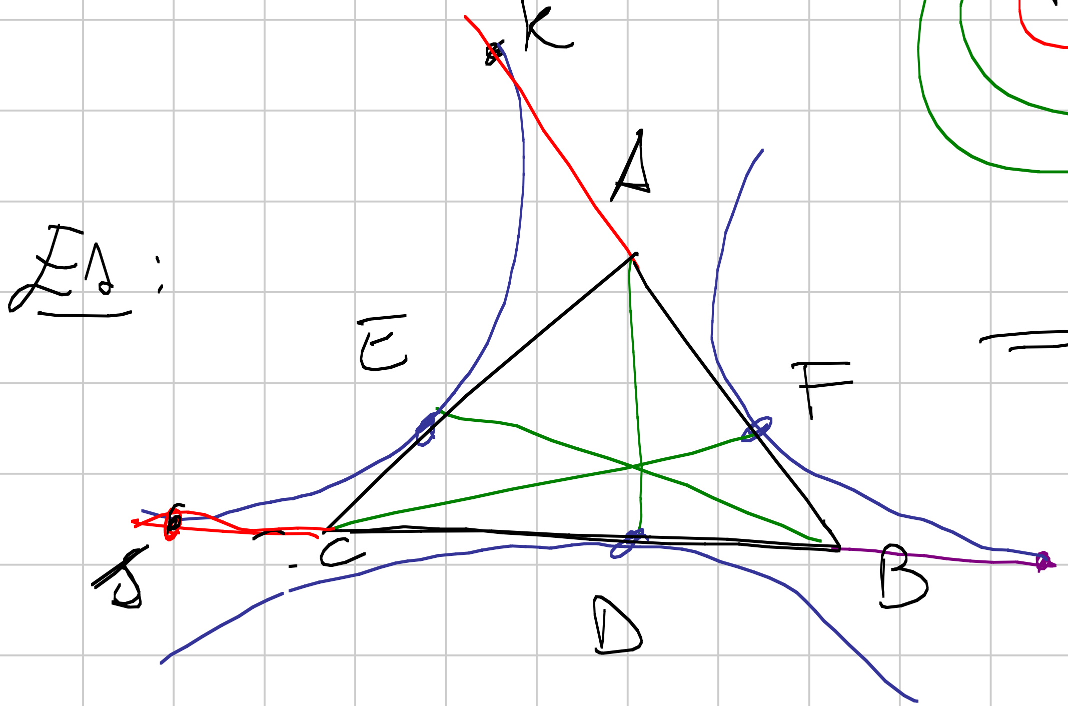


$\Longrightarrow$ AD, BE, CF concorrono

punto di Gergonne

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \text{. ok!}$$

Es:



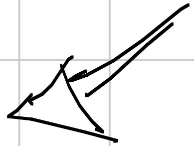
$\longrightarrow$ AD, BE, CF concorrono (pt di Nagel)

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \stackrel{??}{=} 1$$

$CE = CJ$
$EA = KA$

$BK = BJ$

$BK + BJ = BC + CJ + BA + AK =$
$= BC + BA + CE + EA =$

$$BK = BJ = \frac{p}{2}$$ 

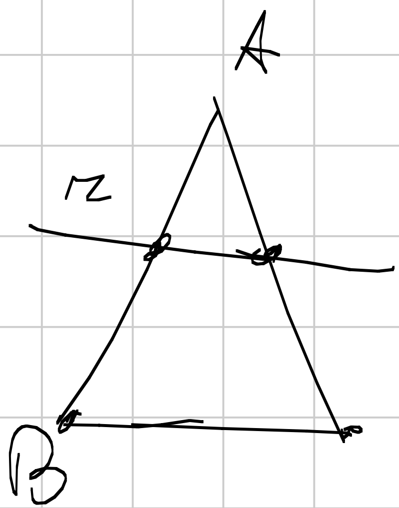
$$= BC + BA + CA = p$$

$$CE = CJ = \frac{p}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} = BF$$

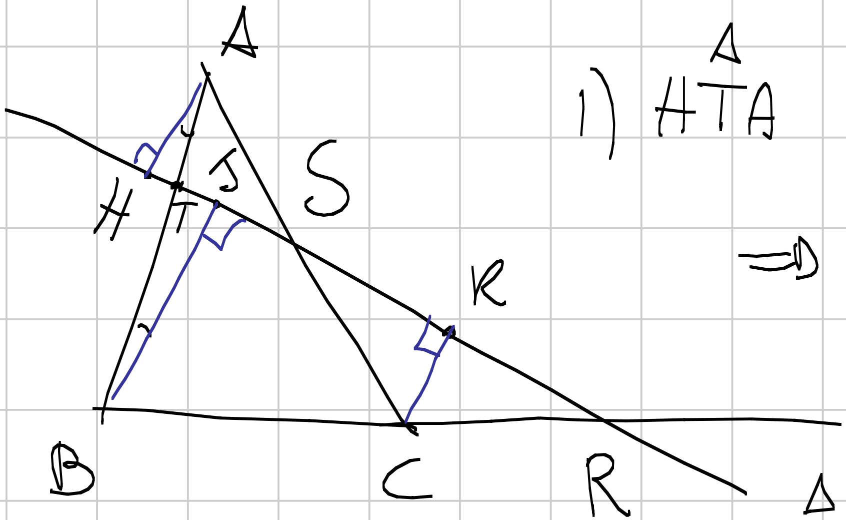
<u>Teo di Menelao</u>: ABC Triangolo, R, S, T su BC, CA, AB

sono allineati se e solo se

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = -1$$



Dim: Se sono all. vale la rel.



1) $\overset{\Delta}{HTA}$ $\overset{\Delta}{BJT}$ simili

$$\Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{AH}{BJ}$$

2) $\overset{\Delta}{BJR}$, $\overset{\Delta}{CKR}$ simili

$$\Rightarrow \frac{BR}{RC} = \frac{BJ}{CR}$$

3) $\overset{\Delta}{CKS}$, $\overset{\Delta}{HAS}$ simili

$$\Rightarrow \frac{CS}{SA} = \frac{CR}{AH}$$

Es: I centri delle sf. di Apollonio del triangolo sono allineati.

La circ. di Apollonio di ABC nel lato BC =

$$= \left\{ P \;\middle|\; \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \right\}$$

$$R = \left(\frac{x_C - k^2 x_B}{1-k^2}, \; \frac{y_C - k^2 y_B}{1-k^2} \right) \qquad \frac{CR}{RB} = -k^2 = -\frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = (-1)^3 \frac{AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2}{BC^2 \cdot CA^2 \cdot AB^2} = -1.$$

$\Rightarrow$ i 3 centri sono allineati.

<u>Es</u> (Teo di Carnot) ABC triangolo, D, E, F punti qualsiasi.
Allora le perpendicolari da D a BC, da E a CA,

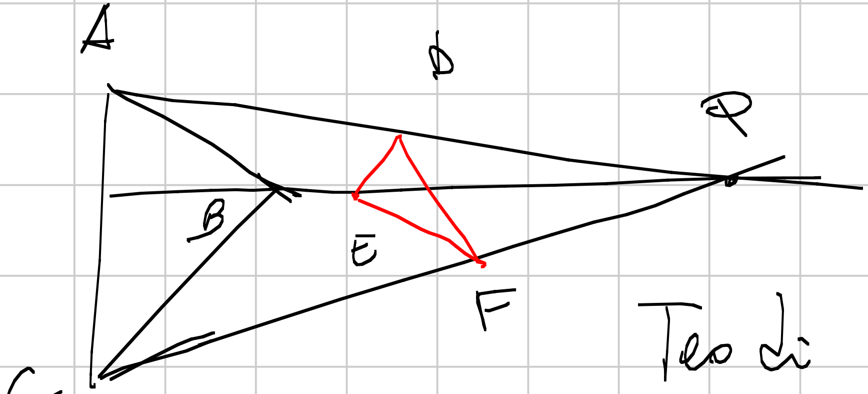
$DE \text{ e } F$ a AB concorrono sse

$$BD^2 + CE^2 + AF^2 = FB^2 + CD^2 + EA^2$$

<u>Es</u>: I piedi delle bisett. esterne sono allineati

I piedi di 2 bisett interne sono allineati con il piede delle bis. est. dell'angolo rimanente

<u>Es che non farò</u>:



AD
BE concorrono
CF

$\Updownarrow$

$AB \cap DE$, $CA \cap DF$, $CB \cap EF$
sono allineati.

<u>Teo di Desargues</u>

Trasformazioni del piano

↳ ISOMETRIE conservano le distanze

↳ SIMILITUDINI conservano gli angoli
e i rapporti

↳ AFFINITÀ conservano il rapporto tra punti allineati

(↳ PROIETTIVITÀ conservano il birapporto tra pt. allineati

$$\frac{AC}{BC} \Big/ \frac{AD}{BD}$$

Affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

con $ae - bd \neq 0$.

$\Updownarrow$

iniettiva e surgettiva

Conservano: 1) Allineamenti e concorrenze.

2) Rapporti tra segmenti allineati

3) Rapporti tra aree.

non conservano: 1) distanze 2) angoli 3) rapporti a caso

4) circonferenze

Permettono: di mandare 3 punti non allineati qualsiasi. in $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Es: Teo di Ceva.

Basta dim Ceva nel tri $\begin{matrix} A & B & C \\ (0,0), & (1,0) & (0,1) \end{matrix}$

$$\frac{AT}{TB} = k \qquad \frac{BR}{RC} = h \qquad \frac{CS}{SA} = j \qquad khj = 1$$

$$T = \left(\frac{0 + k1}{1+k}, \frac{0 + k0}{1+k} \right) = \left(\frac{k}{1+k}, 0 \right)$$

$$R = \left(\frac{1 + h0}{1+h}, \frac{0 + h1}{1+h} \right) = \left(\frac{1}{1+h}, \frac{h}{1+h} \right)$$

$$S = \left(0, \frac{j}{1+j} \right)$$ da qui si fa il conto!

Tramite affinità posso portare 3 dei 4 vertici di un quad.

$\Rightarrow$ $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, (a,b)

Similitudini — dirette $ABC \longrightarrow A'B'C'$

dirett. simili

— inverse $ABC \longrightarrow B'A'C'$

inv. simili

$az+b$

$a, b \in \mathbb{C}$

$+b$ traslazione

$\cdot a$ = rotaz + omot.

$a\bar{z}+b$

$a, b \in \mathbb{C}$

$z \longrightarrow \bar{z}$ riflessione $\Leftarrow$ cambia l'orientazione

Oss: rifl + rifl $= \longrightarrow$ trasl (assi parall)

$\longrightarrow$ rotaz. di 2α (assi incidenti con angolo α)

Conservano: 1) angoli 2) rapporti
3) circonf. 4) allin./concon.
5) rapp. tra aree 6) "tutti" i punti notevoli

Non conservano: le distanze e le aree

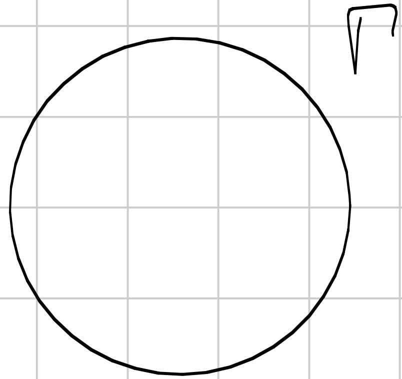
Isometrie: - dirette → rotazioni, traslazioni
- inverse → riflessioni (in n° dispari)

Conservano tutto.

$wz + a \qquad |w| = 1$

$w\bar{z} + a$

Es:



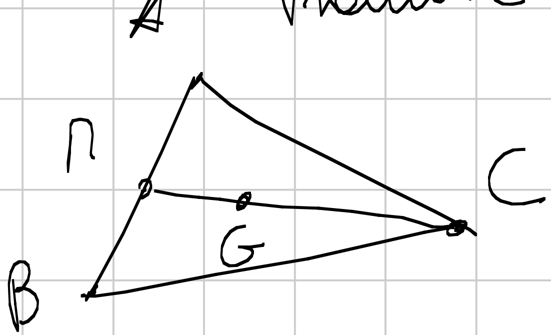
$x^4+y^4=1$

Determinare il luogo dei baricentri di ABC al variare di C su Γ

OSS: il baricentro G divide la mediana CM in $2:1$

cioè $\frac{CG}{GM}=2 \Rightarrow G$ è l'immagine di C

tramite un'omotetia di centro M e fattore $\frac{1}{3}$



$$\frac{MG}{MC}=\frac{1}{3}$$

Nel problema A, B fissati $\Rightarrow \Gamma$ fissato

$\Rightarrow \forall C \in \Gamma$ il corr. baricentro è immagine tramite

l'omot. di centro Π e fattore $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ il luogo ($= \mathcal{L}$) è una cfr.

i) si ottiene da Γ con un'omot di centro Π e fattore $\frac{1}{3}$.

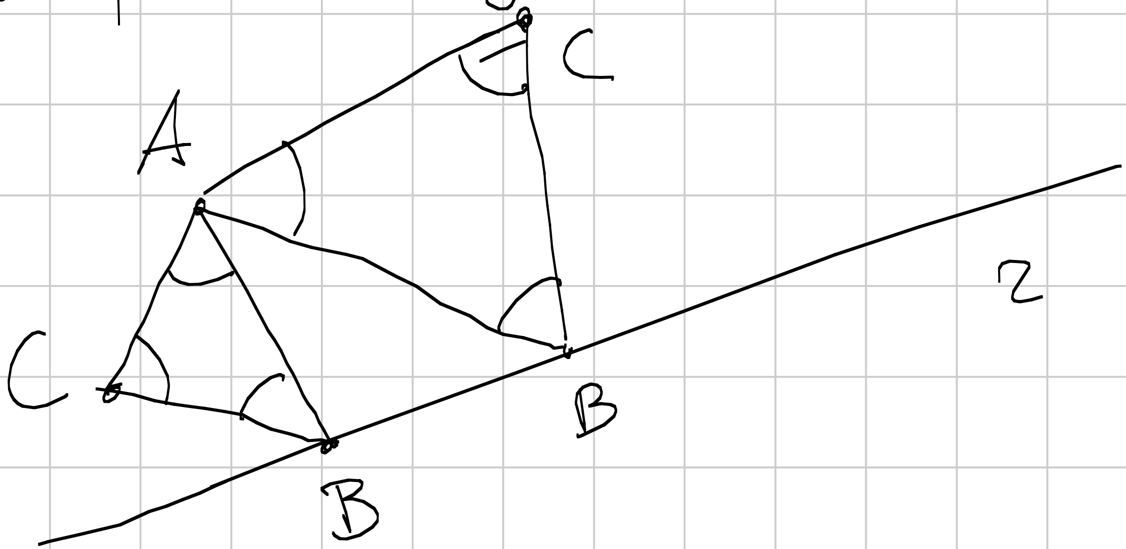
$\Rightarrow \mathcal{L}$ ha centro O' t.c. $\frac{\Pi O'}{\Pi O} = \frac{1}{3}$

O centro di Γ

raggio di $\mathcal{L} = \frac{1}{3}$ raggio di Γ

Es: Fissato A, r (A non sta su r)

$\mathcal{L} = \{ C$ t.c. $\exists B \in r$ con ABC equilatero $\}$



$B \in r \longrightarrow C$ t.c. ABC equilatero

C si ottiene ruotando B attorno ad A di $\frac{\pi}{3}$ o $-\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ il luogo è l'unione di 2 rette ottenute ruotando r attorno ad A di $\frac{\pi}{3}$ o $-\frac{\pi}{3}$.

Es x casa: Provare a farlo con $\mathbb{C}$.

Es x casa: Date 3 rette parallele, costruire un Tri equil. che ha i vertici su di esse.

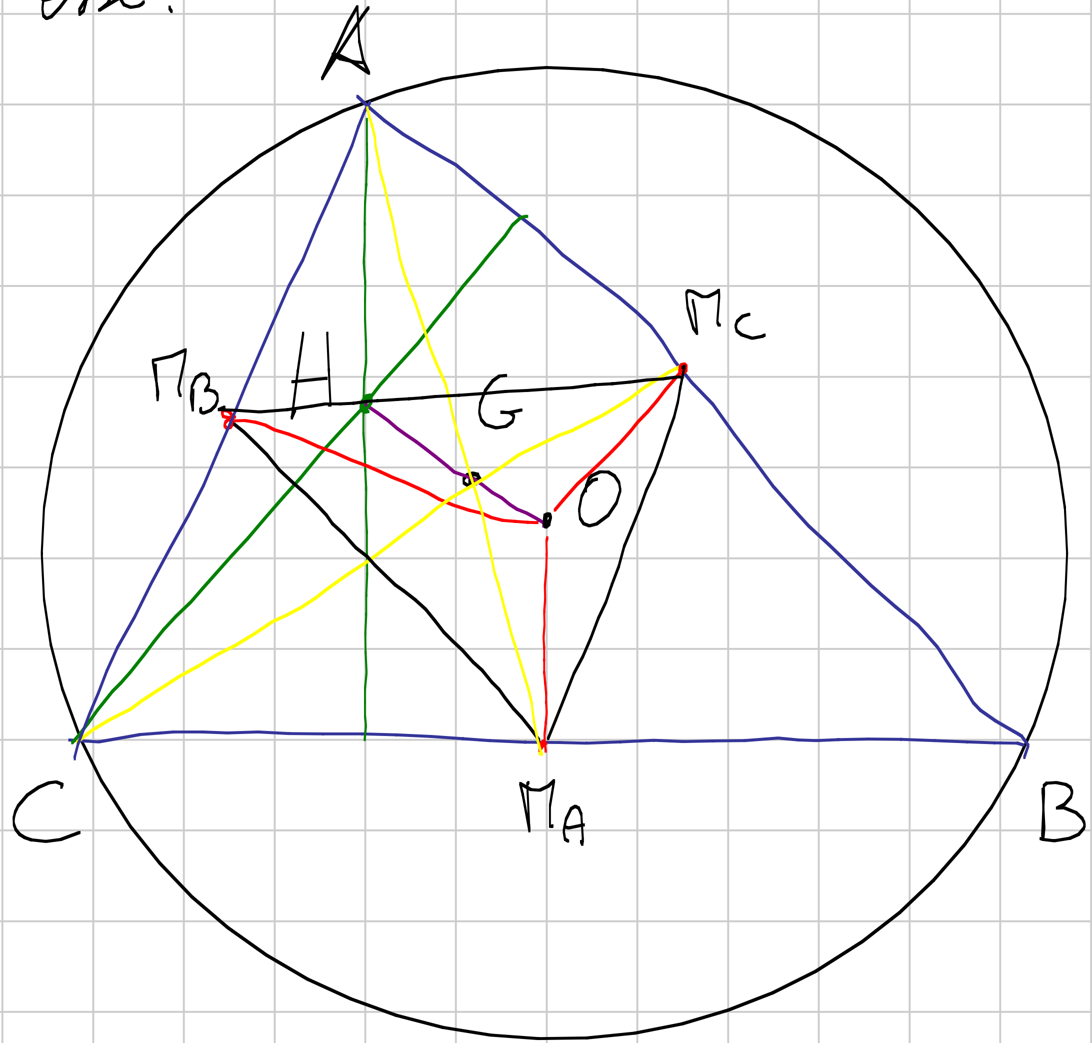
Retta di Eulero

G, H, O sono allineati

G intersez. mediane

H intersez. altezze

O intersez. assi



h = omot. di centro G e fattore $-\frac{1}{2}$

$h(A) = M_A \quad h(B) = M_B \quad h(C) = M_C$

$h(H) = ?$

H ortoc. di $ABC \Longrightarrow h(H) =$ ortoc. di $M_A M_B M_C$

Osservo che: $OM_C \perp AB // M_A M_B \Rightarrow OM_C \perp M_A M_B$

$\Rightarrow OM_C$ = altezza

Allo stesso modo OM_A, OM_B altezze $\Rightarrow O$ ortoc. di $M_A M_B M_C$

$\Rightarrow O = h(H)$

$\Rightarrow O, H, G$ allineati $+ \left(\frac{OG}{HG} = \frac{1}{2}\right)$

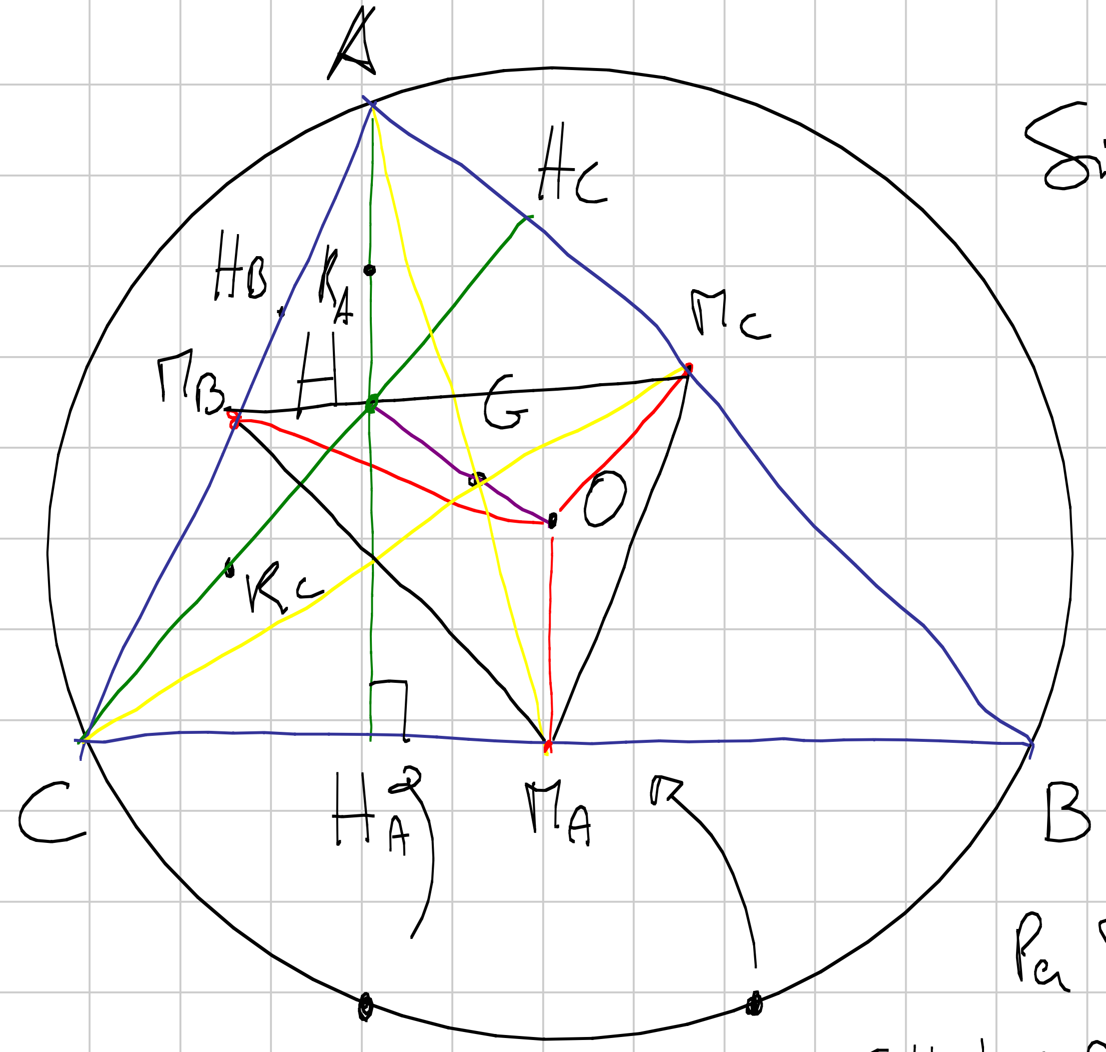
Oss: $h(O)=N$ $\frac{NG}{OG}=\frac{1}{2}$ sta tra G e H

$\Downarrow$

$ON=NH$

Centro della cf. di Feuerbach (circ. dei 9 punti)

$=$ circ. circo a $M_A M_B M_C$



Siano H_A, H_B, H_C piedi delle altezze,
K_A, K_B, K_C i punti medi di AH, BH, CH

$\Rightarrow H_A, H_B, H_C, K_A, K_B, K_C, M_A, M_B, M_C$ sono conciclici.

Per Talete $K_A M_B \parallel CH$

$CH \perp AB \Rightarrow K_A M_B \perp AB$

$AB \parallel M_A M_B \Rightarrow K_A M_B \perp M_A M_B$

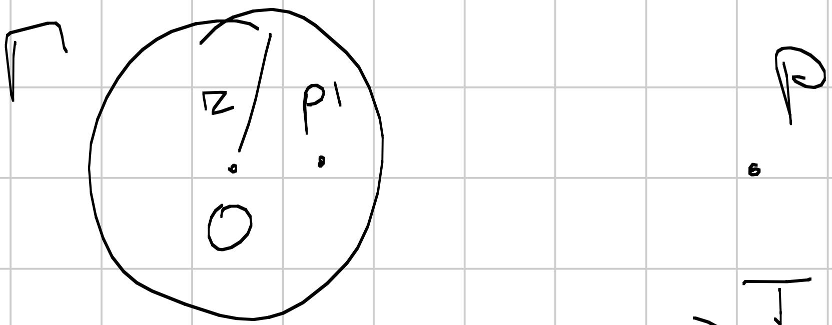
$\Rightarrow \widehat{K_A M_B M_A} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_A, M_B, H_A, M_A$ conciclici.

e così via.

Es: ABC triangolo, I incentro, D, E, F le proiez. dell'incentro sui lati, S_p è baricentro di DEF, N_a pt di Nagel di ABC
Allora I, S_p, N_a sono allineati.

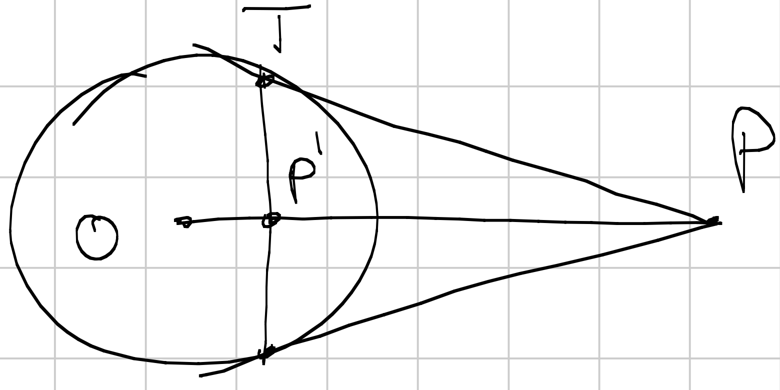
S_p = punto di Spieker.

Inversione (circolare)



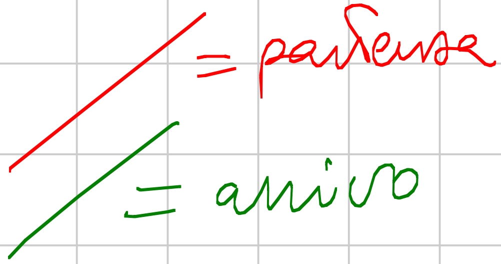
O, P, P' allineati, P e P' si dicono inversi risp a Γ se

$$OP \cdot OP' = r^2$$

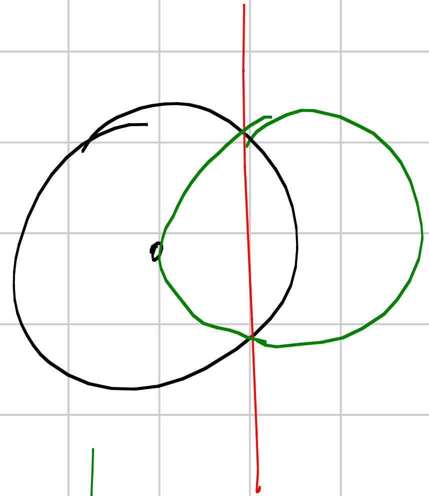


$$OP' \cdot OP = OT^2 = r^2$$

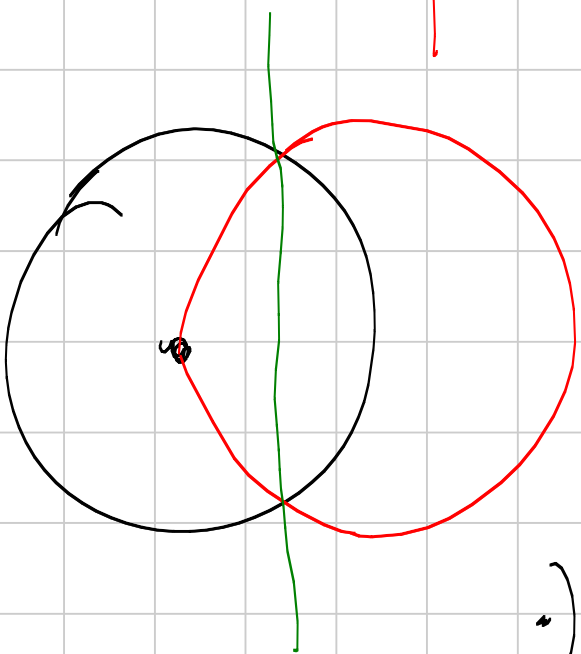
Cose che non dimostro



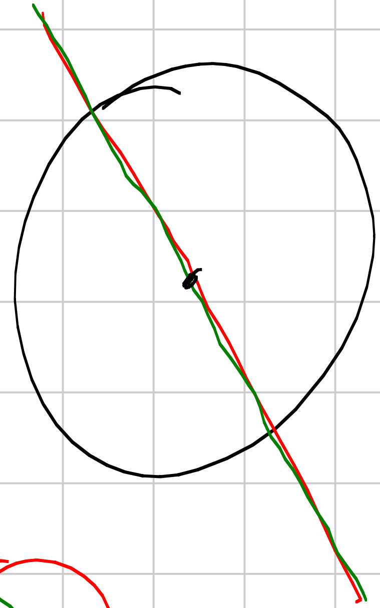
•)



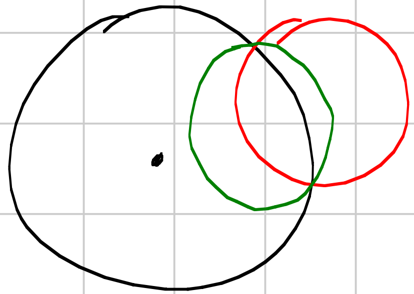
•)



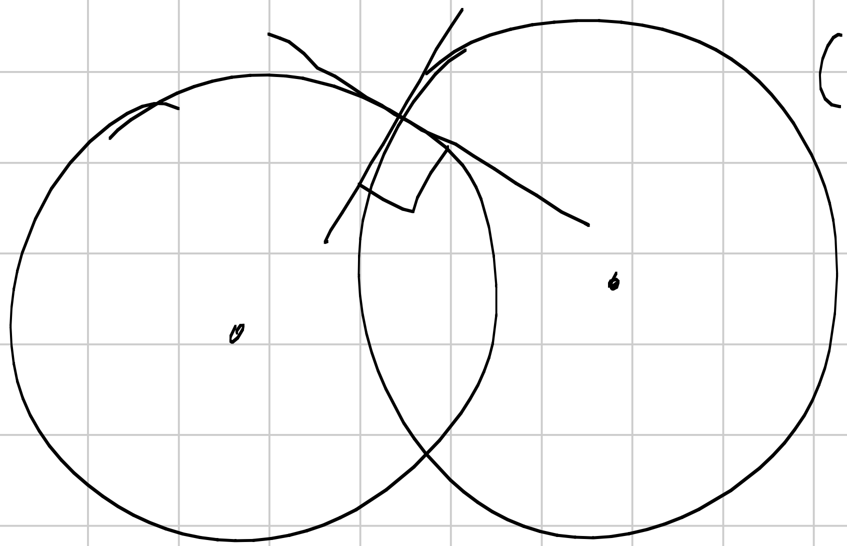
•)



•)



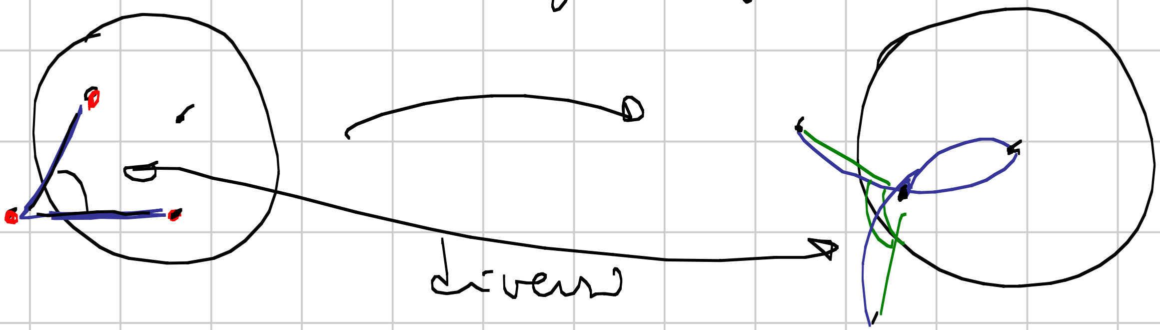
-) Una sf. resta ferma per inversione sse è ortogonale alla sf. di inversione



(le tg nell'int. sono ortog.)

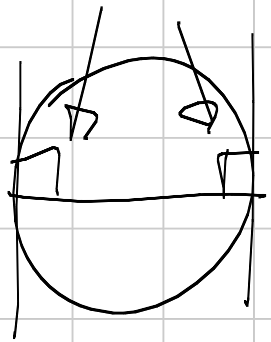
-) Un'inversione conserva gli angoli.

ES:



Attenzione: non si conservano - distanze
- aree
- i centri delle cfr.

Però: si conservano - angoli (vedi sopra)
- i diametri (se rimangono rette)



$\Downarrow$

i diametri x il centro di inversione.