Preliminari: Induzione & Pigeonhole

Titolo nota 06/09/2009

$P(n) =$ " ... n ...."

una affermazione a proposito di $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo di sapere che

(i) $P(0)$ é vera

(ii) $P(n)$ implica $P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora: $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esempi: $\boxed{I}$ (Gauss all'età di 9 anni)

$$\text{"}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{"} = P(n)$$

(i) $P(0) =$ "$0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$" Vera ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

se $P(n)$ è vera

Vera ✓

$\Rightarrow P(n)$ é vera $\forall n \in \mathbb{N}$

(II) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(i) $P(0)$: " $0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$ " ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ ✓

$\Rightarrow P(n)$ é vera $\forall n \in \mathbb{N}$

(III) $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Definizioni ricorsive (induttive)

$n!$ FATTORIALE

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n)(n-1)! \end{cases}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

Fibonacci: $F_n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

$a_n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n = 2^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 & \leftarrow \text{(i)} \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 & \leftarrow \text{(ii)} \end{cases}$$

$$a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_3 = 9,\ a_4 = 17,\ a_5 = 33$$

$P(n)$ $\boxed{2^n + 1 = a_n}$ Claim

Dimostriamo il claim x induzione

(i) $P(0) =$ " $a_0 = 2$ " Vera ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $a_n = 2^n + 1$

allora $a_{n+1} = 2a_n - 1 = 2 \cdot 2^n + 2 - 1 =$

$= 2^{n+1} + 1$ ✓

x la def. ricorsiva

$a_n = 2a_{n-1} - 1 \Leftrightarrow$

$a_n - 1 = 2a_{n-1} - 2 \Leftrightarrow$

$(a_n - 1) = 2(a_{n-1} - 1) \Leftrightarrow a_n - 1 = 2^n \Leftrightarrow a_n = 2^n + 1$

Senza induzione.

Esercizio semplice: $C_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot n!} \left[= \binom{2n}{n} \right]$

Tesi: $C_n \leq 4^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dim: per induz.

(i) PASSO BASE $P(0)$ è vera

$C_0 = \dfrac{1}{1 \cdot 1} = 1 \leq 4^0 = 1$ ok.

(ii) PASSO INDUTTIVO $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \le 4^n$$ supponiamo che sia vera,

allora $$C_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}{(n!)(n!)\,(n+1)(n+1)} =$$

$$= \underbrace{C_n \cdot \frac{2n+1}{n+1}\, 2 \le 4^n}_{\le} \cdot 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \le 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}$$

Ipotesi induttiva

Esercizio impossibile (con l'induzione)

$$C_n \le \frac{4^n}{\sqrt{3n}} \qquad \forall n \ge 1$$

Passo base: $P(1)$: $2 \le \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\qquad 2 \cdot \sqrt{3} \le 4$

$4 \cdot 3 \le 16$ ok.

Passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$C_{n+1} = C_n \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \le \frac{4^n}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1}\, 2 \overset{??}{\le} \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+3}}$$

ip. induttiva

Sarebbe bello se fosse vero

$$\cancel{4}\cdot\frac{2n+1}{n+1}\overset{??}{\le}\frac{\cancel{4}^{2}\cdot\sqrt{3n}}{\sqrt{3n+3}}$$

$$(3n+3)(2n+1)^2\overset{?}{\le}4(3n)(n+1)^2$$

$$(3n+3)(4n^2+4n+1)\overset{?}{\le}4\cdot 3n(n^2+2n+1)$$

$$\cancel{12n^3}+\cancel{12n^2}+3n+\cancel{12n^2}+\cancel{12n}+3\overset{?}{\le}\cancel{12n^3}+\cancel{24n^2}+\cancel{12n}$$

$$3n+3\overset{?}{\le}0$$

$$n\overset{?}{\le}-1 \quad \text{no!!}$$

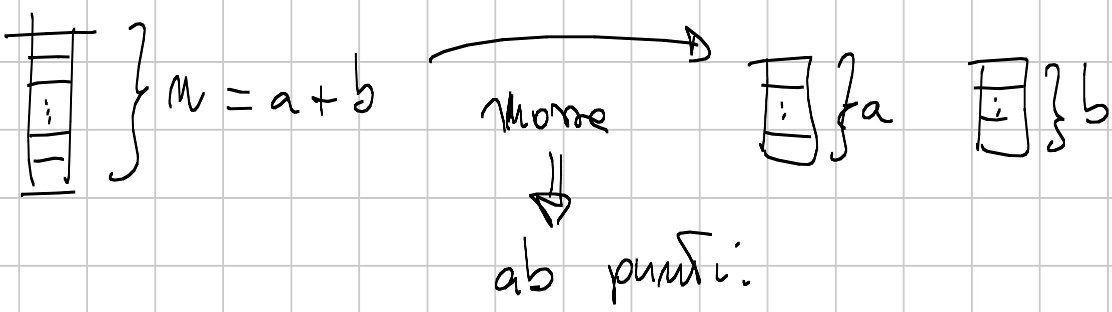
non funziona.

Però funziona con $c_n \le \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$ $\left[\le \dfrac{4^n}{\sqrt{3n}}\right]$

questo si dimostra x induzione

(in realtà vale $c_n \le \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n+1}}$)

Gioco delle scatole



Vogliamo dim. che qualunque strategia ottiene $\frac{n(n-1)}{2}$ punti. Chiamo G_n il gioco che parte con una pila da n.

<u>I oss:</u> Se spezzo la pila da n in $a+b$, ora è come giocare prima G_a e poi G_b ovvero

$\Rightarrow$ Vorrei informazioni su G_a e G_b : non mi basta sapere qualcosa di G_{n-1} !!

<u>Principio di induzione estesa</u>

<u>Se</u> (i) $P(0)$ è vera
<u>e</u> (ii) $\{P(0), \dots, P(n)\}$ vere $\Rightarrow P(n+1)$ vera $\forall n$

<u>Allora</u> $P(n)$ è vera $\forall n$

<u>Tornando al gioco</u> : $P(n)$: "G_n si finisce con $\frac{n(n-1)}{2}$ punti"

(i) $P(1)$ vera / $P(2)$ "G_2 si finisce con 1 pt." ok

(ii) $P(1), \dots, P(n-1) \Rightarrow P(n)$

1^a mossa $n \to a+b$

$\times$ ip. ind. est. i giochi con a e b scatole danno

$$\frac{a(a-1)}{2} \quad e \quad \frac{b(b-1)}{2} \text{ punti}$$

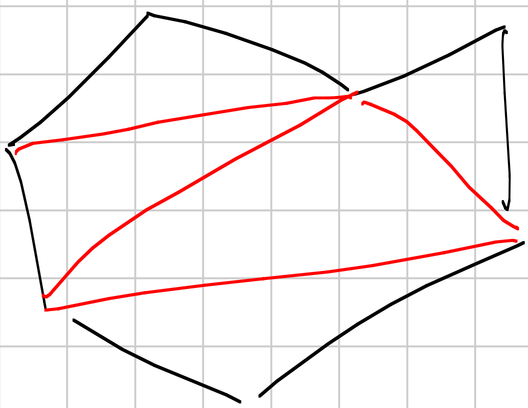
$$\Rightarrow G_n \text{ da } ab + \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} =$$

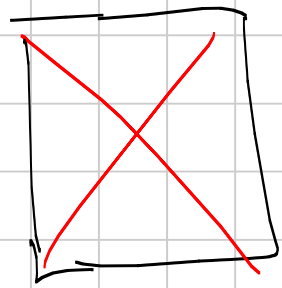
$$= \frac{2ab + a^2 - a + b^2 - b}{2} = \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \text{ ok.}$$

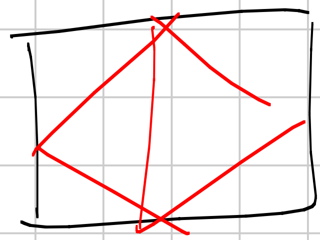
$\Rightarrow P(n)$ è vera $\forall n$.

<u>Es x casa</u>: Un poligono si dice <u>triangolato</u> se è diviso in triangoli disgiunti che hanno come vertici i vertici del poligono





no!



no!

<u>Tesi</u>: In un poligono triangolato si possono colorare i vertici con 3 colori in modo che vertici adiacenti nella triangolazione abbiano colori diversi.

Induzioni sbagliate

1) Dimenticare il caso base

$P(n)$: " $n \geq 500$ "

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$n \geq 500 \Rightarrow n+1 \geq 500$ ok vero ✓

$\Rightarrow P(n)$ vero $\forall n$. NO manca $P(0)$ vero (che non è vero...)

2) Fare il passo (base) troppo corto

F_n fibonacci è pari $\forall n$

$F_0 = 0$ è pari

induz. estesa $F_0, \dots, F_{n-1}$ sono pari $\Rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$=$ somma di pari $=$ pari

OK ...

NO il passo induttivo da 0 a 1 non funziona

2bis) Tutti i cavalli sono dello stesso colore

$P(n) =$ Un ins. di n cavalli contiene solo cavalli dello stesso colore

$P(1)$ vera

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Se ho $n+1$ cavalli e ne

Tolgo 1 i restanti sono dello stesso colore, se poi rimetto quel cavallo e ne tolgo un altro i restanti sono dello stesso colore

$\Rightarrow$ sono tutti dello stesso colore.

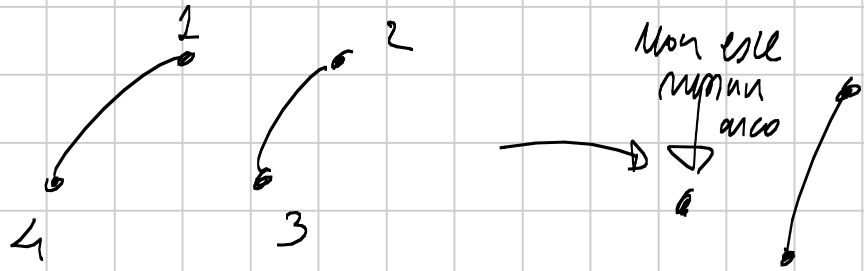
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ non è vera se $n=1$.

(e $P(2)$ è falsa per fortuna...)

3) <u>Costruzioni ascendenti</u>

<u>Es</u>: Un grafo con n vertici t.c. da ogni vertice esce almeno 1 arco è connesso.

<u>Falso</u>:



<u>Dim</u>: $P(2)$ è vera

$P(n+1)$: Tolgo un vertice e applico al grafo restante $P(n)$.

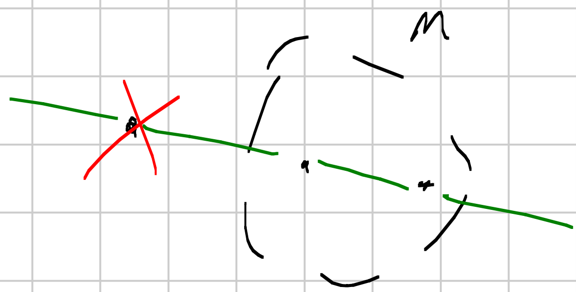
<u>NO!</u> non è detto che il grafo così ottenuto rispetti l'ipotesi di $P(n)$: che da ogni vertice esce almeno un arco.

<u>Es</u>; <u>Teor. di Sylvester</u>: n punti in cui, comunque presi 2, la retta per loro ne incontra un 3° sono allineati

Dim sbagliata: $P(3)$ vera

$P(n+1)$: Tolgo un punto e applico $P(n)$. No!

non è detto che togliendo un punto continua a valere che le rette x 2 qualsiasi passa x un 3°.



Pigeonhole ovvero Principio dei cassetti

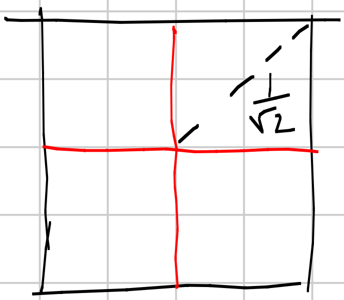
Se ho n cassetti e $n+1$ oggetti nei cassetti, allora c'è almeno 1 cassetto contenente 2 oggetti.

Generalizzazione:

Se ho $nk+1$ oggetti e n cassetti
ho un cassetto con almeno $k+1$ oggetti

Es1: Dati 5 punti all'interno di un quadrato di lato 1, ce ne sono 2 che distano meno di $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Dim: Divido il quadrato in 4



Per il PdC c'è un riquadro con 2 punti. questi distano meno di $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Es2: Ad una festa con n persone ce ne sono 2 con lo stesso numero di amici.

Dim:

n° di amici possibili: $\underbrace{0, 1, \ldots, n-1}_{n}$

n° di persone: n

Così non funziona, però se c'è qualcuno che non è amico di nessuno, nessuno è amico di tutti.
E viceversa.

$\Rightarrow$ ho due casi possibili $\{0, 1, \dots, n-2\}$

$\{1, 2, \dots, n-1\}$

entrambi gli insiemi sono di $n-1$ elem.

$\Rightarrow$ esistono, tra gli n presenti, due con lo stesso n° di amici

Teor. di approssimazione di Dirichlet

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, dato n naturale positivo

$\exists$ k intero con $0 < k \leq n$, $b \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|k\alpha - b| \leq \frac{1}{n}$$

Oss: $\left|\alpha - \frac{b}{k}\right| \leq \frac{1}{nk} \leq \frac{1}{k^2}$

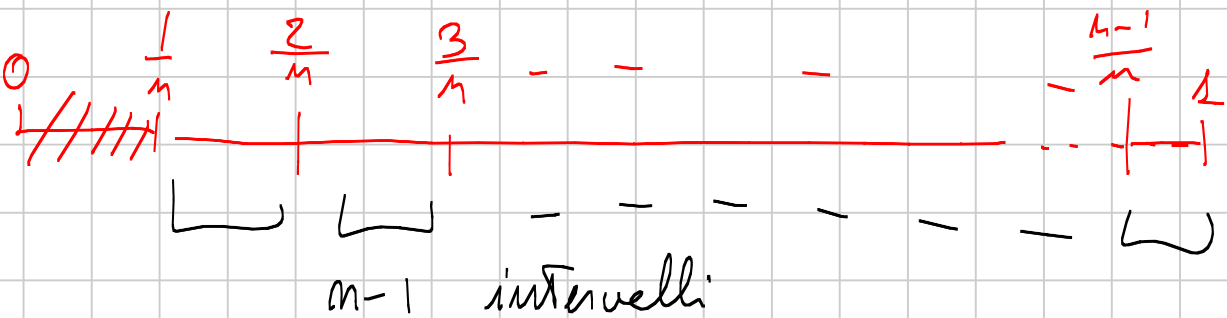
Dim: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $\qquad \{1,4\} = 0,4$

$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$

Se $\exists$ k t.c. $\{k\alpha\} \leq \frac{1}{n}$ ho finito: prendo $b = \lfloor k\alpha \rfloor$

Supponiamo che non ci sia un tale k.

$\Rightarrow$ $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$ stanno in $\left[\frac{1}{n}, 1\right)$



$\Rightarrow \exists\ i > j$ t.c. $\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]$

$$|\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| \leq \frac{1}{n}$$

$$|\, i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor - j\alpha + \lfloor j\alpha \rfloor \,| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \Big|\underbrace{(i-j)}_{=k}\alpha - \underbrace{\overbrace{(\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor)}^{=b}}_{\text{intero}}\Big| \leq \frac{1}{n}$$

$$|k\alpha - b| \leq \frac{1}{n}.$$ Fine.

Es: Comunque dati n^2+1 numeri distinti $a_1, \dots, a_{n^2+1}$ ne esistono $n+1$ in ordine crescente o decrescente.

Dim: Per ogni a_i cerchiamo la + lunga succ. crescente che parte da a_i e chiamiamo b_i la sua lunghezza.

I b_i sono numeri interi tra 1 e n^2+1

$\Rightarrow$ Se un b_i è $\geq n+1$ abbiamo finito.

Altrimenti $1 \leq b_i \leq n$ per $i = 1, \dots, n^2+1$

$\Rightarrow$ ci sono $n+1$ b_i con lo stesso valore.

$$b_j \overset{k}{=} b_i$$

$$a_1 \qquad a_j \qquad a_i \underbrace{\cdots\cdots}_{k} \qquad a_{n^2+1}$$

Se $a_j < a_i$ posso "attaccare" alla succ. che parte da a_i, a_j come primo termine

$\Rightarrow$ ho una succ da a_j lunga $k+1$, assurdo ($b_j = k$)

Quindi se $b_j = b_i$ e $j < i$, allora $a_j > a_i$

$\Rightarrow$ gli a_i che corrispondono agli $n+1$ b_i uguali formano una succ. decrescente. Fine!

IMO (1985 / non so che numero)

Ho $3 \cdot 2^n + 1$ numeri interi di modo che i loro fattori primi siano scelti tra al più n numeri primi.

Allora ne posso scegliere 4 il cui prodotto è una 4ª potenza.

Idea: probl. ausiliario: riesco a trovare una coppia il cui prodotto è un □?

M = insieme dei num. dati

$m = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ è □ sse a_i pari $\forall i$

ho 2^n possibilità e $3 \cdot 2^n + 1$ numeri

$\Rightarrow$ ne ho 1 coppia con gli esp con la stessa parità

$\Rightarrow$ il prodotto è un quadrato.

Posso iterare trovando 2^n+1 coppie che danno $\square$

Considero le $\sqrt{\ }$, ne ho 2^n+1 $\Rightarrow$ ne ho 2 il cui prodotto è $\square$. $\Rightarrow$ Fine.