ALGEBRA 2 (MEDIUM)

Titolo nota 10/09/2009

CAUCHY-SCHWARZ $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ REALI QUALUNQUE

Allora $$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{1/2}$$

Formulazioni alternative:

1. $$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right) \cdot \left(\sum b_i^2\right)$$

2. $A = (a_1, \dots, a_n)$ $\quad B = (b_1, \dots, b_n)$

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

prod. scalare

norme di A e B come vettori

Dimostrazioni di C-S

1. Polinomio di 2° grado
2. Prodotto scalare / coseno NI
3. Induzione
4. SOS (Sum Of Squares)
5. Omogeneità

Dim. 1
$$P(t) = (a_1 + tb_1)^2 + \dots + (a_n + tb_n)^2$$
$$= \left(\sum b_i^2\right) t^2 + 2 \sum a_i b_i \, t + \sum a_i^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

S.O.S.

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Allora $\Delta := \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \left(\sum a_i b_i\right)^2 - \underbrace{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}_{} \leq 0$$

si ottiene C.S. nella forma con i quadrati.

Quando vale il segno di uguale? Quando $\Delta = 0$, cioè quando $P(t) = 0$ ha una radice. Ma questo accade $\Leftrightarrow a_i + t b_i = 0 \ \forall i$ cioè se e solo se gli a_i sono multipli dei b_i

— o — o —

<u>Esempio</u> a, b, c, d, e reali positivi

$$a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} + 3c\sqrt{c} + 4d\sqrt{d} + 5e\sqrt{e} \geq (a+4b+9c+16d+5e)^{1/2} \cdot (a^2+b^2+c^2+d^2+5e^2)^{1/2}$$

Cosa possiamo dire?

$X = (\sqrt{a}, 2\sqrt{b}, 3\sqrt{c}, 4\sqrt{d}, \sqrt{5}\sqrt{e}) \qquad Y = (a, b, c, d, \sqrt{5}\, e)$

Se applico C.S., ottengo la disug. data con il verso opposto.
Quindi c'è uguaglianza, quindi $X = \lambda Y$, cioè
$\sqrt{a} = \lambda a, \quad 2\sqrt{b} = \lambda b,$ e così via
Da qui si trovano le relazioni tra a, b, c, d, e.

— o — o —

"Dim. ②" Proprietà del prodotto scalare tra 2 vettori:

$$\boxed{X \cdot Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos\theta},$$ con θ = angolo compreso tra i 2 vettori

Con questa notazione C.S. è immediato:

$$|X \cdot Y| = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

N.B. La formula usata è stata dimostrata in $\mathbb{R}^2$. In $\mathbb{R}^n$ il coseno dell'angolo tra 2 vettori si definisce proprio usando quella formula!

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

Ma per dare questa definizione serve che la frazione sia ≤ 1.

— o — o —

Dim ③ Induzione

$\boxed{n=2}$ $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$ svolgo:

$$\cancel{a_1^2b_1^2}+\cancel{a_2^2b_2^2}+2a_1b_1a_2b_2 \leq \cancel{a_1^2b_1^2}+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+\cancel{a_2^2b_2^2}$$

Resta $(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0$

Volendo si ricava anche il caso di uguaglianza.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2\right)$$

$$\boxed{\left(\sum a_ib_i\right)^2} + \cancel{a_{n+1}^2b_{n+1}^2} + 2a_{n+1}b_{n+1}\sum a_ib_i \overset{?}{\leq}$$

$$\boxed{\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2} + \cancel{a_{n+1}^2b_{n+1}^2} + a_{n+1}^2\sum b_i^2 + b_{n+1}^2\sum a_i^2$$

Mi basta dimostrare che

$$2a_{n+1}b_{n+1}\sum a_ib_i \overset{?}{\leq} a_{n+1}^2\sum b_i^2 + b_{n+1}^2\sum a_i^2$$

$$2a_{n+1}b_{n+1}a_1b_1 \leq a_{n+1}^2b_1^2 + b_{n+1}^2a_1^2 \quad \text{Quadrato}$$

$\vdots$

$$2a_{n+1}b_{n+1}a_ib_i \leq a_{n+1}^2b_i^2 + b_{n+1}^2b_i^2$$

Basta sommare su i e si ottiene la tesi.

$\boxed{\text{Strategia generale}}$ Per dimostrare $A \leq B$ scrivo

$A = A_1 + \dots + A_n$ $\qquad$ $B = B_1 + \dots + B_n$

e dimostro che $A_i \leq B_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

— o — o —

Dim ④ Sum of Squares. Scrivo C.S. nella forma

$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - \left(\sum a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

e spero che LHS sia somma di quadrati !!!
In questo caso

$$\text{LHS} = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

Verificare questa identità è un esercizio sulle sommatorie

$$\sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \boxed{\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2} - \boxed{2 \sum_{i<j} a_i a_j b_i b_j}$$

D'altra parte

$$\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right) - \left(\sum_i a_i b_i\right)^2 = \boxed{\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2} + \cancel{\sum_i a_i^2 b_i^2} +$$
$$- \cancel{\sum_i a_i^2 b_i^2} \boxed{- 2 \sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j}$$

Anche da qui si vede il caso di uguaglianza.

— o — o —

Dim ⑤ La C.S. è omogenea (stesso grado a dx e sx).
Quindi posso assumere wlog che sia

$$\boxed{a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad b_1^2 + \dots + b_n^2 = 1} \qquad (\star)$$

Se so dimostrare C.S. nelle ipotesi $(\star)$, allora lo so dimostrare sempre. Perché? Prendo $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ qualunque.
Pongo

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = A \qquad b_1^2 + \dots + b_n^2 = B$$

Definisco

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{A}} \qquad \beta_i = \frac{b_i}{\sqrt{B}}$$

Proprietà Fondamentale

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = \frac{a_1^2}{A} + \dots + \frac{a_n^2}{A} = 1$$ e analogamente

$$\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2 = 1$$

Se C.S. vale per gli α_i e i β_i ho che

$$\sum \alpha_i \beta_i \le \left(\sum \alpha_i^2\right)\left(\sum \beta_i^2\right) = 1$$

$$\shortparallel$$

$$\sum \frac{a_i}{\sqrt{A}} \cdot \frac{b_i}{\sqrt{B}} \le 1$$, cioè $$\sum a_i b_i \le \sqrt{A}\sqrt{B}$$, cioè

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum b_i^2\right)^{1/2}.$$

Resta da dimostrare C.S. sotto l'ipotesi (✭). In questo caso:

$$2a_1b_1 \le a_1^2 + b_1^2$$
$$2a_2b_2 \le a_2^2 + b_2^2$$
$$\vdots$$
$$2a_nb_n \le a_n^2 + b_n^2$$

Sommando: $$2\sum a_i b_i \le \sum a_i^2 + \sum b_i^2 \overset{\text{per (✭)}}{=} 2$$

Basta ora semplificare il 2.

Con i valori assoluti è la stessa cosa: $2|a_i b_i| \le a_i^2 + b_i^2$

Sommando:

$$2\left|\sum a_i b_i\right| \underset{\text{proprietà dei valori assoluti.}}{\le} 2\sum |a_i b_i| \underset{\text{come prima}}{\le} \sum a_i^2 + \sum b_i^2$$

— o — o —

VARIANTI DI CAUCHY-SCHWARZ

$\boxed{1}$ Sono coinvolti 3 vettori: a_i, b_i, c_i (serve che siano ≥ 0)

$$\left(\sum a_i b_i c_i\right)^3 \leq \left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\left(\sum c_i^3\right)$$

Dimostrazione per omogeneità: wlog possiamo assumere che

$$\sum a_i^3 = \sum b_i^3 = \sum c_i^3 = 1.$$

(in realtà ci sarebbe anche il caso 0...)

Allora

$$a_i b_i c_i \leq \frac{a_i^3 + b_i^3 + c_i^3}{3} \qquad \text{(GM-AM)}$$

Sommando:

$$\sum a_i b_i c_i \leq \frac{1}{3}\sum a_i^3 + \frac{1}{3}\sum b_i^3 + \frac{1}{3}\sum c_i^3 = 1$$

$\boxed{1\text{ BIS}}$ Si estende facilmente al caso in cui sono coinvolti 4, 5, o in generale anche k-vettori.

— o — o —

<u>Esempio</u> (TST 2009) $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reali positivi

$$\left[a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + b_1 \cdot \ldots \cdot b_n\right]^n \leq (a_1^n + b_1^n)(a_2^n + b_2^n) \cdot \ldots \cdot (a_n^n + b_n^n)$$

$X_1 = (a_1, b_1)$

$X_2 = (a_2, b_2)$

$\vdots$

$X_n = (a_n, b_n)$

Applico C-S a n vettori con esponenti uguali.

$LHS = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + b_1 b_2 \ldots b_n$ (prodotto prime componenti)

$RHS = (a_1^n + b_1^n)^{\frac{1}{n}} (a_2^n + b_2^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot (a_n^n + b_n^n)^{\frac{1}{n}}$

— o — o —

Analogamente:

$$\left[\prod a_i + \prod b_i + \prod c_i\right]^n \leq \prod (a_i^n + b_i^n + c_i^n)$$

$X_i = (a_i, b_i, c_i)$

[2] Sono coinvolti 2 vettori, ma con esponenti diversi.

$a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ reali ≥ 0.

$$\boxed{\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{vale se} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p, q > 0}$$

Disuguaglianza di Hölder (C.S. è il caso $p = q = 2$)

Si può ragionare per omogeneità assumendo

$$\sum a_i^p = \sum b_i^q = 1$$

(questo si può sempre ottenere moltiplicando gli a_i ed i b_i per opportune costanti)

Ora uso la disuguaglianza di Young:

$$\boxed{AB \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q \qquad \left(A \geq 0, B \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)}$$

Si ha quindi: $a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q$ e sommo su i:

$$\sum a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum a_i^p + \frac{1}{q} \sum a_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

—o—o—

[3] Si possono usare + vettori e + esponenti. Esempio (in 3 var.)

$a_i, b_i, c_i \geq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum a_i b_i c_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum c_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ \text{vera se } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \text{ con } p, q, r > 0 \end{array}}$$

Hölder a 3

La dimostrazione è per omogeneità a partire da YOUNG

$$\boxed{\begin{array}{ll} ABC \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q + \frac{1}{r} C^r & A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0 \\ & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \ p, q, r > 0 \end{array}}$$

$\boxed{\text{Esempio}}$ NESBIT: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ $\quad a,b,c > 0.$

$$a+b+c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}\sqrt{a}\sqrt{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}}\sqrt{b}\sqrt{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\sqrt{c}\sqrt{a+b}$$

$$\text{(C-S)} \leq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^{1/2} \left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right)^{1/2}$$

Ne segue che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}$$

Spero che: $2(a+b+c)^2 \overset{?}{\geq} 3\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]$

$$2a^2+2b^2+2c^2 + 4\cancel{(ab+bc+ca)} \overset{?}{\geq} \overset{2}{\cancel{6}}(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \quad \text{(vera per riarrangiamento)}$$

—o—

$\boxed{\text{IMO 2001 - 2}}$ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$ $\quad a,b,c > 0$

$$a+b+c = \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^2+8bc}} \sqrt{a}\sqrt[4]{a^2+8bc} \leq$$

$$\text{(CS)} \leq (\text{LHS})^{1/2} \left(\sum_{cyc} a\sqrt{a^2+8bc}\right)^{1/2}$$

$$\leq \text{LHS}^{1/2} \cdot \left(\sum_{cyc} \sqrt{a}\sqrt{a(a^2+8bc)}\right)^{1/2}$$

$$\leq \text{LHS}^{1/2} \cdot (a+b+c)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\right)^{\frac{1}{4}}$$

Quindi $\text{LHS} \geq \dfrac{(a+b+c)^{3/2}}{\left[\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\right]^{1/2}} \overset{?}{\geq} 1$

Spero che: $(a+b+c)^3 \overset{?}{\geq} \sum_{cyc} (a^3+8abc)$

$$\cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3} + 3\sum_{sym} a^2b + \cancel{6abc} \overset{?}{\geq} \cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3} + \overset{18}{\cancel{24}}abc \quad \text{(Banalità!)}$$

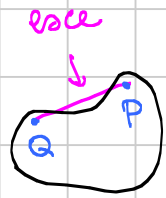
Soluz. ufficiale: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \dfrac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$

$$a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3} \geq a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^2+8bc} \quad \dots\dots$$

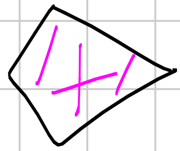
A2 MEDIUM

Titolo nota 10/09/2009

CONVESSITÀ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>convesso</u> se, comunque si scelgano 2 p.ti $P \in A$ e $Q \in A$, tutto il segmento $PQ \subseteq A$.



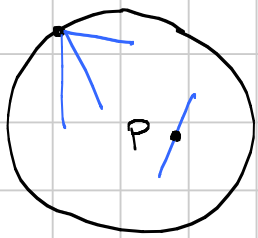
non convesso



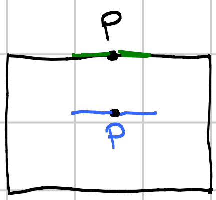
convesso

Si dicono <u>punti estremali</u> di un convesso i punti P con questa proprietà: se P sta su un segmento tutto contenuto nell'insieme, allora P è un estremo del segmento.

<u>Esempi</u>



Punti estremali = bordo



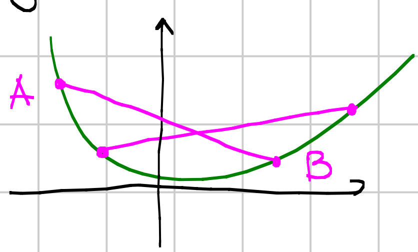
In questo caso gli unici punti estremali sono i vertici

—o—o—

In una variabile gli unici insiemi convessi sono
* tutto $\mathbb{R}$;
* le semirette (con o senza estremo);
* gli intervalli (con o senza estremi).

—o—o—

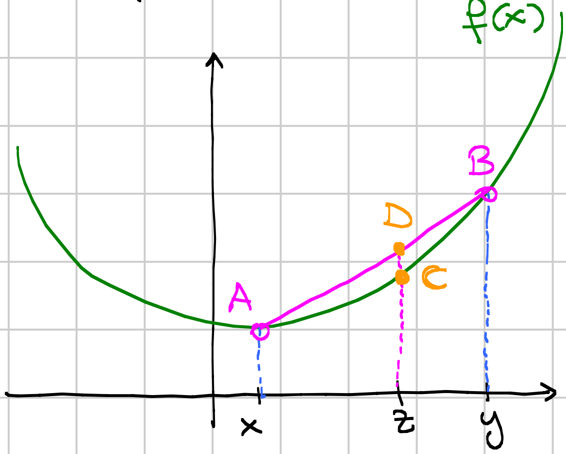
<u>Funzioni convesse di 1 variabile</u> Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un convesso. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se
- geometricamente: il grafico sta sotto le secanti, cioè dati 2 p.ti A e B del grafico, il grafico sta "sotto" il segmento AB



• analiticamente: se per ogni $x \in I$, $y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ si ha che

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$z = \lambda x + (1-\lambda) y$ è un punto variabile sul segmento xy

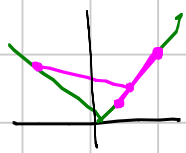


$f(z)$ = coordinata y del punto C
Con qualche conto (eq. retta) si vede che
$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ = coordinata y del punto D.

—o—o—

Precisazione: f si dice strettamente convessa se si ha uguaglianza solo quando $x = y$, oppure $\lambda = 0$, oppure $\lambda = 1$.

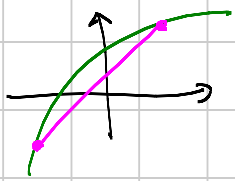
Esempi
- $f(x) = 2x+3$ è convessa, ma non strettamente convessa;
- $f(x) = x^2$ è strettamente convessa;
- $f(x) = |x|$ è convessa, ma non strettamente



—o—

Def. $f(x)$ si dice concava se verifica la relazione opposta

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Oss. $\boxed{1}$ $f(x)$ è concava $\Leftrightarrow$ $-f(x)$ è convessa

$\boxed{2}$ Le uniche funzioni che sono sia convesse, sia concave, sono le rette

$\boxed{3}$ Esistono funzioni che non sono né convesse, né concave!!

$\boxed{4}$ Quando si parla di concava o convessa, precisare sempre dove (per quali valori di x)

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di I, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali ≥ 0 tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Allora

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

Caso particolare: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Allora

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}}$$

Esempi di applicazione

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2$ è convessa (su tutto $\mathbb{R}$). Allora

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \qquad \text{(AM-QM)}$$

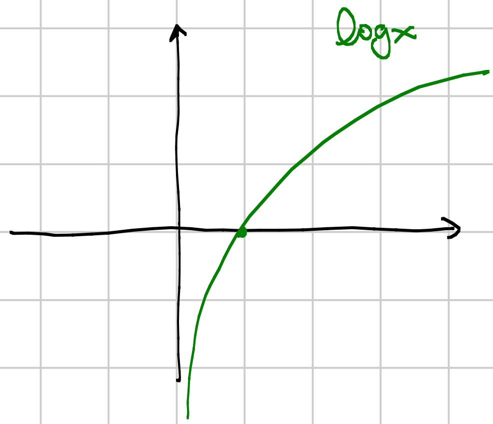
Vale anche in "versione pesata"

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \qquad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

$\boxed{2}$ $f(x) = x^\alpha$ è convessa (su $[0, +\infty)$) $\iff \alpha \geq 1$. Allora

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^\alpha \leq \frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \qquad (\text{AM} - M_{\alpha\text{-esima}})$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \log x$ è concava per $x > 0$.
Jensen vale con verso opposto



$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n}$$
$$= \frac{1}{n} \log(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$$

Ottengo così che $\cancel{\log}\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \geq \cancel{\log}\,(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$

Essendo crescente, semplifico il log e ottengo AM-GM.

Se uso pesi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ottengo

$$\log(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \log x_1 + \dots + \lambda_n \log x_n$$
$$= \log\left(x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}\right)$$

da cui

$$\boxed{\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}$$ AM-GM pesata

Ora pongo $\lambda_i = \frac{1}{p_i}$ e $x_i = a_i^{p_i}$. Diventa

$$\boxed{\frac{1}{p_1}a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}a_2^{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}a_n^{p_n} \geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$ YOUNG

La relazione $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$ diventa $\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_n} = 1$

—o—o—

Esempio $\quad x^\alpha + y^2 + z^2 \qquad xy\sqrt{z}$

$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}x^\alpha + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 \geq x^{\frac{\alpha}{4}}\, y\sqrt{z}$$

—o—o—

Dim. JENSEN Induzione **UP AND DOWN**

① $n=2$ è vera

② Se è vera per n, è vera per $2n$

③ Se è vera per n, è vera per $n-1$

① + ② + ③ $\Rightarrow$ vera per ogni $n \geq 2$.

① JENSEN per $n=2$ $\qquad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

$\lambda_2 = 1-\lambda_1 \qquad (1-\lambda_1) \qquad (1-\lambda_1)$

ci si riduce alla def. di funzione convessa

③ BANALE. Aggiungo una variabile a caso con coefficiente 0 !!!

② $\boxed{\text{Passaggio da } n \text{ a } 2n}$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} + \dots + \lambda_{2n} x_{2n}) =$$

$$f\Bigg(\underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{\Lambda_1} \underbrace{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}_{X_1} + \underbrace{(\lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{2n})}_{\Lambda_2} \underbrace{\frac{\lambda_{n+1} x_{n+1} + \dots + \lambda_{2n} x_{2n}}{\lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{2n}}}_{X_2}\Bigg)$$

$\Lambda_1 + \Lambda_2 = 1 \Rightarrow$ posso applicare JENSEN a 2:

$$\leq \Lambda_1 f(X_1) + \Lambda_2 f(X_2)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{\text{si semplifica con il denom. dei pesi}} f\underbrace{\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right)}_{\text{posso applicare JENSEN a } n \text{ con pesi } \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}} + (\lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{2n}) f\underbrace{(\dots)}_{\text{IDEM}}$$

$$\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \dots + \lambda_{2n} f(x_{2n})$$

— o —

<u>Oss.</u> Lo stesso tipo di induzione vale per AM-GM e varie altre disuguaglianze a + variabili.

— o — o —

$\boxed{\text{DISUGUAGLIANZA DI KARAMATA}}$ Sia $f(x)$ convessa in I. Siano x_i e $y_i \in I$.

Supponiamo che

(1) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$

(2) $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$

(3) $x_1 \geq y_1$

$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3$

$\vdots$

$x_1 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + \dots + y_{n-1}$

In questi casi si scrive che

$$[X] \succ [Y]$$

Allora $f(y_1) + \dots + f(y_n) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n)$

Esempio banale: Dati $x_1, \dots, x_n$ (che wlog assumo $x_1 \geq x_2 \geq \dots$) pongo $y_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ (tutti uguali)

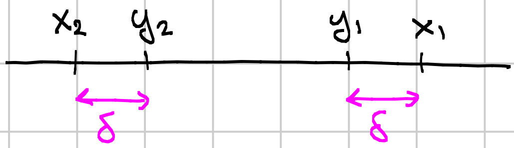
Allora (1) OK, (2) OK, (3) FACILE perchè somma dei k più grandi è $\geq$ k volte la media.
Posso applicare KARAMATA e ottengo

$$n f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n)$$

cioè Jensen con i pesi uguali.

$\boxed{\text{KARAMATA per } n = 2}$ $x_1 \geq x_2$ $y_1 \geq y_2$

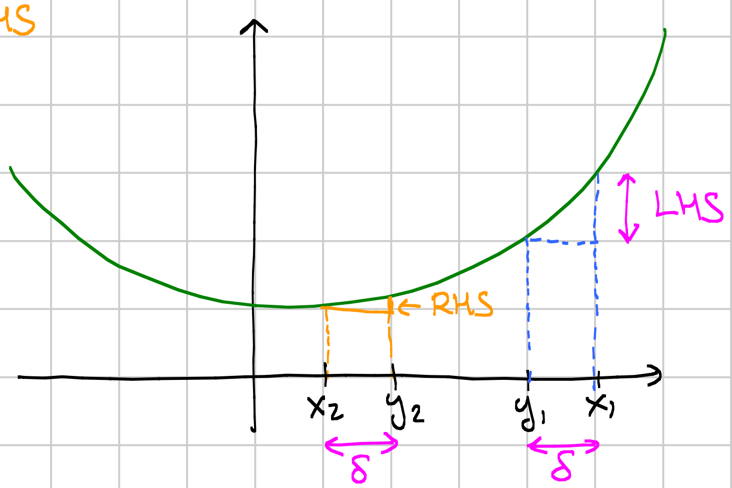
Per forza: $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$



Karamata dice che

$$f(y_1) + f(y_2) \leq f(x_1) + f(x_2), \text{ cioè}$$
$$f(y_1) - f(x_1) \leq f(x_2) - f(y_2), \text{ cioè}$$
$$\underbrace{f(x_1) - f(y_1)}_{\text{LHS}} \geq \underbrace{f(y_2) - f(x_2)}_{\text{RHS}}$$

A parità di differenza sull'asse delle x, la differenza sull'asse delle y cresce man mano che ci si sposta a destra.



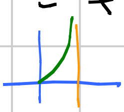
— o — o —

Nesbit con convessità $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c}$

S = somma.

wlog $S = 1$. $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} =$

$$= f(a) + f(b) + f(c) \geq 3 f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3 f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$



BASTA DIM CHE f è convessa $f(x) = \frac{x}{1-x}$ in $[0, 1)$

A2 - MEDIUM

Titolo nota 10/09/2009

DISUGUAGLIANZA DI SCHUR Siano $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

FORMA 1

$$\sum_{sym} (x^3 - 2x^2y + xyz) \geq 0$$

$$\underbrace{\sum_{sym} x^3}_{[3,0,0]} + \underbrace{\sum_{sym} xyz}_{[1,1,1]} \geq 2 \underbrace{\sum_{sym} x^2y}_{[2,1,0]}$$

$[3,0,0] \succ [2,1,0] \succ [1,1,1]$ FORTE + DEBOLE $\geq$ 2 MEDI

FORMA 2 $x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$

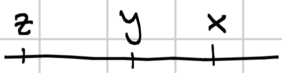
(facendo i conti viene la stessa cosa)

Dim. Partiamo dalla forma 2. Si tratta (grazie alla 1) di una espressione simmetrica. Quindi wlog $x \geq y \geq z \; (\geq 0)$

In questo caso i 3 termini hanno segno $+, -, +$.

Mi basta dunque dimostrare che $1° + 2° \geq 0$

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) \overset{?}{\geq} 0$$ cioè



$$x\cancel{(x-y)}(x-z) \overset{?}{\geq} y\cancel{(x-y)}(y-z)$$

Ora $x \geq y$ e $x - z \geq y - z$. Basta moltiplicare !!!

Metodo ABC Dati x, y, z si pone

$S = x+y+z$

$Q = xy+yz+zx$

$P = xyz$

Fatto generale: ogni polinomio simmetrico in 3 variabili si può scrivere come polinomio in S, Q, P.

$$\sum_{sym}(x^3+xyz-2x^2y) = 2(x^3+y^3+z^3)+6xyz-2\sum_{sym}x^2y$$

$$\frac{1}{2}\sum_{sym}(x^3+xyz-2x^2y) = x^3+y^3+z^3+3xyz-\sum_{sym}x^2y$$

$$= (x+y+z)^3-3\sum_{sym}x^2y-6xyz+3xyz-\sum_{sym}x^2y$$

$$= S^3-3P-4\sum_{sym}x^2y$$

$$= S^3-3P-4(SQ-3P) = S^3-4SQ+9P$$

$$SQ = (x+y+z)(xy+yz+zx) = 3P+\sum_{sym}x^2y$$

FORMA 3 DI SCHUR $\boxed{S^3-4SQ+9P \geq 0}$

Metodo ABC: scrivere l'espressione in funzione di S, P, Q.
Immaginando S e Q costanti, pensare l'espressione come funzione della sola P. È monotona in P (fissati S e Q)?
Nel nostro caso sì! Nota bene: questo succede tutte le volte che P compare "di 1° grado" (gratis fino al 5° grado).
Se come funzione della sola P è monotona, allora il max ed il min dell'espressione iniziale si può avere in soli 2 casi:

* 2 variabili uguali
* una variabile uguale a zero

In questo modo per cercare max / min basta ridursi ai casi (a,a,b) e $(a,b,0)$. In ogni caso abbiamo solo 2 variabili !!!

Nota: questo funziona se il vincolo iniziale era $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
Se il vincolo iniziale non c'era ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$), allora basta considerare il caso (a,a,b).

LEMMA ABC

$\boxed{1}$ Dati 3 numeri reali a, b, c esistono $\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1$ e $\beta_0, \beta_0, \beta_1$ tali che le 3 terne hanno

* stessa S $\quad (a+b+c = \alpha_0+\alpha_0+\alpha_1 = \beta_0+\beta_0+\beta_1)$
* stesso Q
* $\alpha_0 \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 \leq abc \leq \beta_0 \beta_0 \beta_1$

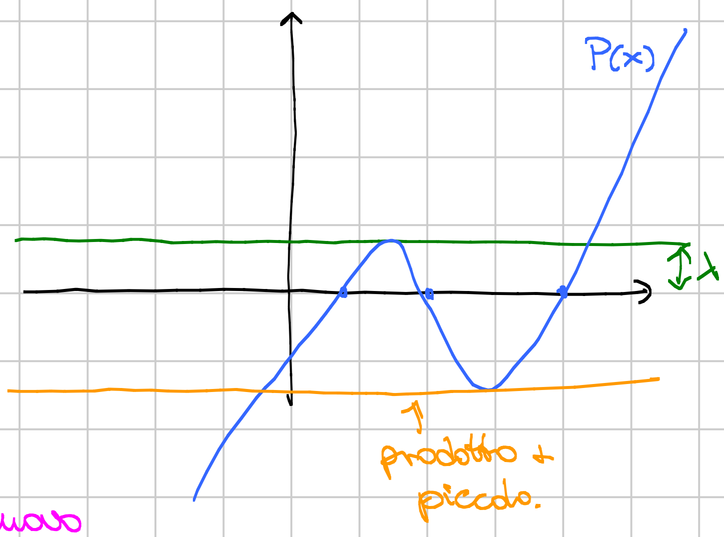
Morale: ogni terna (a,b,c) si può sostituire con una terna con 2 variabili uguali, stessa S, stesso Q, e P dalla parte che voglio.

Quindi sia alla ricerca del max, sia alla ricerca del min, posso sostituire a, b, c con una nuova terna con 2 variabili uguali.

— o —

Dim. Lemma a,b,c $\quad a, b, c$ sono le radici del polinomio

$$P(x) = x^3 - Sx^2 + Qx - P = 0$$



Se risolvo $P(x) = \lambda$, trovo 3 radici di cui 2 coincidenti

$$x^3 - Sx^2 + Qx - P - \lambda = 0$$

S: VECCHIA e NUOVA SOMMA

Q: IDEM

$P+\lambda$ è il nuovo prodotto