SUCCESSIONI FUNZIONALI

Titolo nota 08/09/2009

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$$

Cerchiamo le soluzioni nella forma

$$a_n = \lambda^n$$

$$\lambda^{\cancel{n+1}\,2} = \alpha \lambda^{\cancel{n}\,1} + \beta \cancel{\lambda^{n-1}}$$

Trovo $\lambda_{1,2}$

A questo punto, tutte le soluzioni sono nella forma

$$a_n = \underline{p_1} \lambda_1^n + \underline{p_2} \lambda_2^n$$

$$\begin{cases} \overset{\text{DATO}}{\boxed{a_0}} = \boxed{p_1} + \boxed{p_2} \\ \boxed{a_1} = \boxed{p_1}\lambda_1 + \boxed{p_2}\lambda_2 \end{cases} \quad (*)$$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2} + \ldots$$

nello stesso modo

1) come mai il sistema (*) ha sempre soluzione?

Matrice di Vandermonde

$\lambda_1, \dots \lambda_n$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & \vdots \\ 1 & & \cdots & & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

<u>Fatto</u>: il determinante è

$$\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

In particolare, λ_i diversi fra loro

$\Rightarrow$ il sistema ha soluzione

2) Se i λ_i sono complessi

funziona tutto uguale

3) Se ci sono λ_i multipli

<u>esempio</u>

$(\lambda-2)^2(\lambda-4)^5$

soluzioni "speciali" sono:

$a_n = 2^n$

$a_n = 4^n$

$a_n = n\,2^n$

$n \cdot 4^n$

$n^2 \cdot 4^n$

$n^3\, 4^n$

$n^4\, 4^n$

inoltre

tutte queste sono soluzioni

La soluzione generica è combinazione lineare di

Come si dimostra?

<u>Fatto</u> $p(x)$ ha una radice doppia x_0

$\iff$ questo è radice anche di $p'(x)$

$$p(x) = (x-x_0)^2\, q(x)$$

$$\Big\downarrow \partial/\partial x$$

$$2\underline{(x-x_0)}\, q(x) + \underline{(x-x_0)}^2\, q'(x)$$

VICEVERSA,

$$p(x) = (x-x_0)\,q(x) \qquad q(x_0) \neq 0$$

$$\Big\downarrow \partial/\partial x$$

$$(x-x_0)\,q'(x) + q(x)$$

In generale, se x_0 è una radice di molteplicità k, è radice anche di tutte le derivate fino a $k-1$

$$p(x) = (x-\alpha)^2 \qquad x^2 = 2\alpha x - \alpha^2$$

$$a_n = 2\alpha a_{n-1} - \alpha^2 a_{n-2}$$

$a_n = \alpha^n$ è soluzione

$$p(x) = \boxed{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2} \quad (*)$$

$$p'(x) = \boxed{2x - 2\alpha} \quad (*)$$

$$a_n = n \cdot \alpha^n$$

$$n \cdot \alpha^{\cancel{n}\,2} \stackrel{?}{=} 2\alpha(n-1)\alpha^{\cancel{n-1}\,1} - \alpha^2(n-2)\alpha^{\cancel{n-2}\,0}$$

$$n\alpha^2 \stackrel{?}{=} 2\alpha^2 n - 2\alpha^2 - \alpha^2 n + 2\alpha^2$$

Cosa succede se ho "termini noti"

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + 5 \qquad (NH)$$

Equazione non omogenea

Equazione omogenea associata =

$$= \qquad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \qquad (H)$$

<u>Teorema</u>: Se io conosco <u>una</u> soluzione della non omogenea b_n (con qualunque dati iniziali)

e tutte le soluzioni dell'omogenea associata (H),

$$\Downarrow$$

$$p_1 a_n^{(1)} + p_2 a_n^{(2)} + \dots p_k a_n^{(k)}$$

<u>allora</u>

le soluzioni di (NH) si ottengono

$$\underbrace{p_1 a_n^{(1)} + p_2 a_n^{(2)} + \dots p_k a_n^{(k)}}_{\text{soluzione generica dell'omogenea}} + \underbrace{b_n}_{\text{soluzione speciale della NH}}$$

<u>dim</u> se C_n è soluzione di NH

$$c_{n+1} = \alpha c_n + \beta c_n + 5$$

$$b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_n + 5$$

$$(c-b)_{n+1} = \alpha (c-b)_n + \beta (c-b_{n-1})$$

$\Rightarrow$ $c-b$ è soluzione dell'omogenea

$$c_n - b_n = p_1 a_n^{(1)} + p_2 a_n^{(2)} + \dots + p_k a_n^{(k)} \qquad \square$$

Esempio

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} + \boxed{3n}$$

$\to$ funzione di n solo

1) troviamo tutte le soluzioni dell'omogenea

$$a_n = c_1 1^n + c_2 3^n$$

2) Troviamo una soluzione della NH

Quando va bene $a_n = pn + q$?

$$p(\cancel{n}+1) + \cancel{q} = \cancel{4pn} + \cancel{4q} - 3p(\cancel{n}-1) - \cancel{3q} + 3n$$

$$3p = 3n \qquad \text{NO}$$

$a_n = pn^2 + q$ SECONDO TENTATIVO

$$a_n = pn^2 + q$$

$$p(n+1)^2 = 4pn^2 - 3p(n-1)^2 + 3n$$

$$pn^2 + 2pn + p = 4pn^2 - 3pn^2 + 6pn - 3p + 3n$$

$$a_n = pn^2 + qn + r$$

$$p(n^2+2n+1) + q(n+1) + \cancel{r} = 4(pn^2 + qn + \cancel{r}) - 3\left[p(n-1)^2 + q(n-1) + \cancel{r}\right] + 3n$$

$$\cancel{pn^2} + 2pn + p + \cancel{qn} + q = \cancel{4pn^2} + \cancel{4qn} - \cancel{3pn^2} + 6pn - 3p - \cancel{3qn} + 3q + 3n$$

$$\begin{cases} 2p = 6p + 3 \\ p + q = -3p + 3q \end{cases}$$

$p = -3/4$

risolvo, trovo p e q

Euristiche

T.N.	GUESS
$p(n)\alpha^n$	$q(n)\alpha^n$

q dello stesso grado

però

di p

$$p(n)\alpha^n$$

con α soluzione del polinomio associato

$$q(n)\alpha^n$$

q di grado più alto rispetto a p di d, dove d è la molteplicità di α come soluzione

$$c \cdot \sin(\alpha n) = \frac{e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}}{2i}$$

come prima!

$$\begin{cases} e^{i\alpha n} = \cos\alpha n + i\sin\alpha_n \\ e^{-i\alpha n} = \cos\alpha n - i\sin\alpha n \end{cases}$$

$$\cos\alpha n = \frac{e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}}{2}$$

parentesi

$$\begin{cases} (*) \quad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n & + e \\ (**) \quad b_{n+1} = \gamma a_n + \delta b_n & + f \end{cases}$$

ingegnandosi spariscono

$$(*) \Rightarrow \boxed{b_n} = \frac{a_{n+1} - \alpha a_n}{\beta}$$

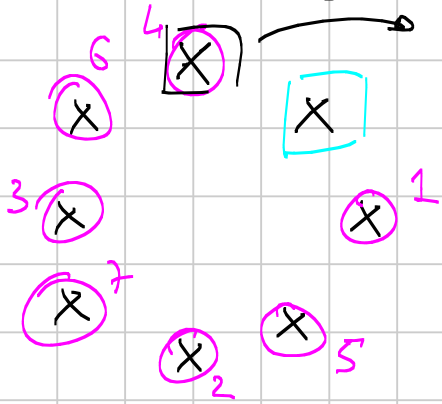
$$\boxed{b_{n+1}} = \frac{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}}{\beta}$$

ottengo un'equazione nel solo a_n

---

n persone in cerchio

→ primo



UCCIDO UNO OGNI 2

CHI SOPRAVVIVE PER ULTIMO?

Se ho 2n persone

1 2 3 4 5 ... 2n

prima uccido i pari

"k" nell'ordinamento dei soli dispari = "2k−1"-esimo dell'ordinamento intero

$$\rightarrow \quad f(2n) = 2f(n) - 1 \qquad (i)$$

~~1~~ ~~2~~ 3 X - X - ~~2n~~ 2n+1

uccido i pari più 1

RESTANO n

$$\rightarrow \quad f(2n+1) = 2f(n) + 1 \qquad (ii)$$

SPORCATEVI LE MANI E FATE I CASI PIÙ BASSI!

n	$f(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1

1 in 2^n $\forall n$

sale di 2 a ogni passo

$$\begin{cases} f(2n) = 2f(n) - 1 \\ f(2n+1) = 2f(n) + 1 \end{cases}$$

cerco di eliminare quell' "1"

$$g(n) := f(n) - 1$$

$$g(2n) = 2g(n) \qquad (i)$$

$$g(2n+1) = 2(g(n) + 1)$$

se y dispari

$$g(y) = g(y-1) + 2$$

Idea successiva

$$\boxed{x}\,0 \longmapsto \boxed{g(x)}\,0 \qquad (i)$$

$$\boxed{x}\,1 \longmapsto \boxed{g(x)+1}\,0 \qquad (ii)$$

non mi piace

Osservazione .... tutte le g finiscono per 0

$$h(x) := \frac{g(x)}{2} \quad \text{(senza lo 0 finale)}$$

$$\begin{cases} h(\boxed{x}\,0) = \boxed{h(x)}\,0 \\ h(\boxed{x}\,1) = \boxed{h(x)}\,1 \end{cases} \to \text{molto semplice}$$

n	$f(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1

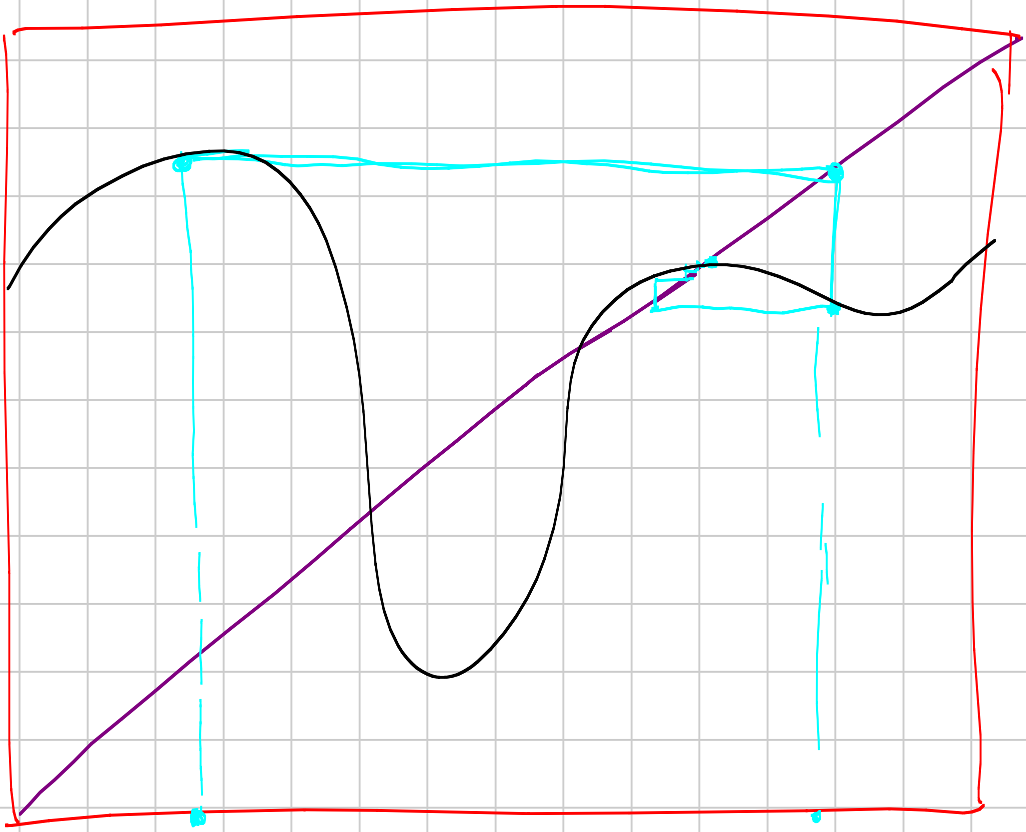
binario $\longrightarrow$

n	$f(n)$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	11
110	101
111	111
1000	1

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2$$

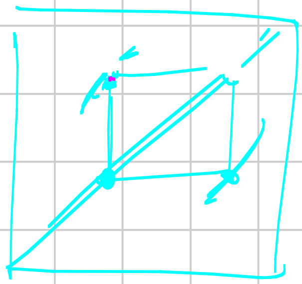
$$x_{n+1} = f(x_n)$$



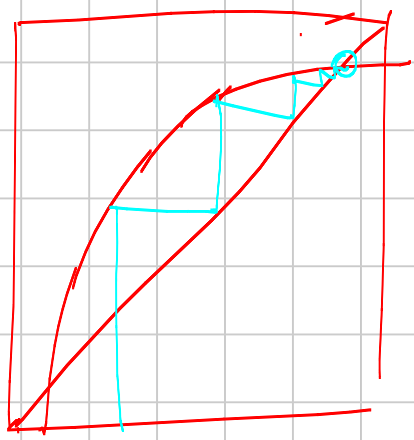
se converge a un limite, $L = f(L)$

cose che possono succedere:

1) punto fisso
2) punto periodico →

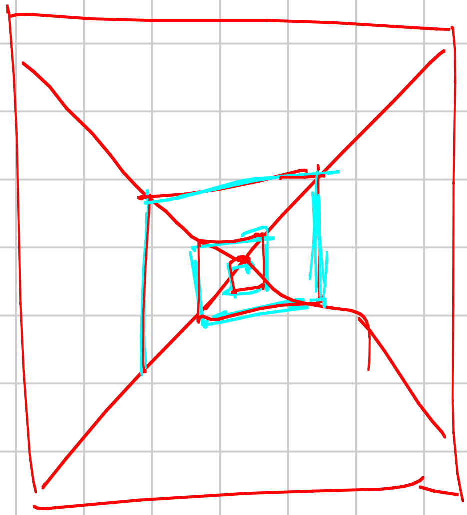


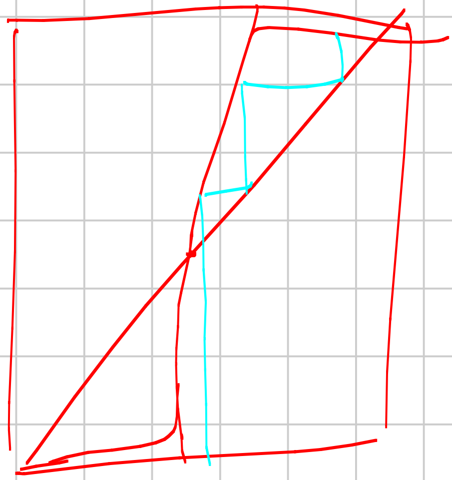
3) punto pre-fisso
4) convergenza monotone
5) convergenza "alternata"



6) in alcuni punti non "riesco a convergere"

7) "può succedere un po' di tutto" (caos)





THM: se una f continua $I \to I$ ha un punto fisso di ordine 3

$$\left[\begin{array}{ll} a \text{ t.c. } & fff(a) = a \\ & f(a) \neq a \end{array}\right]$$

allora ne ha uno di ordine n $\forall n$.

PARENTESI

$ffa = a$

$ff\boxed{fa} = a$

$f^{t} a = a$

Problema

Ameba

che ha: $\left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ probabilità di morire} \\ \frac{3}{4} \text{ di probabilità di dividersi in due} \end{array} \right.$

Qual è la probabilità che le amebe si estinguono?

p = probabilità di estinzione

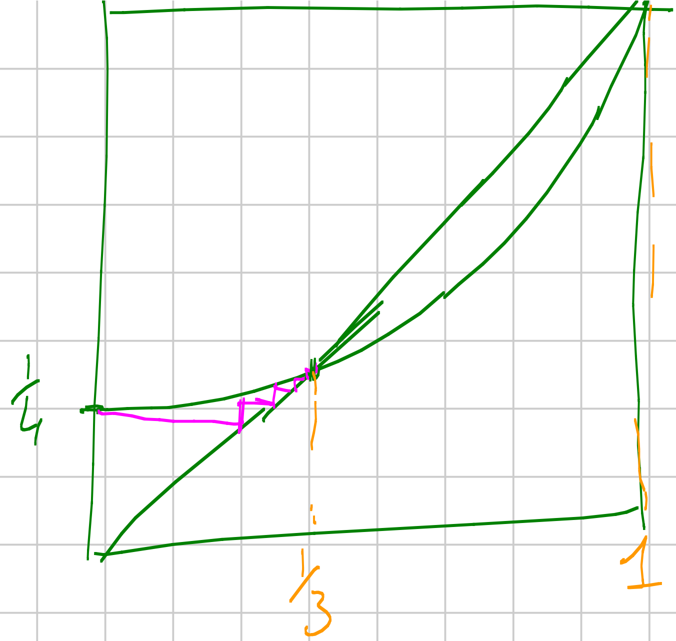
$$p = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \underbrace{P[\text{entrambi i figli muoiono}]}_{p^2}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} p^2}$$

$$p = \left\langle \begin{array}{l} 1/3 \\ 1 \end{array} \right.$$

$p_K = \{$probabilità di morire entro il turno $K\}$

$$\begin{cases} p_{K+1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} p_K^2 \\ p_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$



(INTUIZIONE)

↓

INDUZIONE

$$\begin{cases} p_{k+1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} p_k^2 \\ p_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

NON È TROPPO DIFFICILE DIMOSTRARE CHE:

1) $p_{k+1} \geq p_k$

2) $p_k \leq \frac{1}{3} \quad \forall$

$$p_{k+1} - \frac{1}{3} = \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4} p_k^2 - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

<u>Fatto</u>: se ho una frazione del tipo

$$\frac{\square x^2+\square x+\square}{(x-a)(x-b)(x-c)} \overset{\underline{\text{sempre}}}{=} \frac{\square}{x-a}+\frac{\square}{x-b}+\frac{\square}{x-c}$$

a, b, c distinti!!!

$$\frac{\square x^6+\dots}{(x-a)^3(x-b)^4}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-a)^3}+\frac{1}{x-b}+$$

$$+\frac{1}{(x-b)^2}+\frac{1}{(x-b)^3}+\frac{1}{(x-b)^4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k$$

1) BOVINO

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$$

deriviamo

$$1+2x+3x^2+\dots$$

$$\frac{-(n+1)x^n+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{n-1}(k)\,x^{k-1}$$

$$(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$$

$$\sum k \binom{n}{k}$$

$$\sum k^2 \binom{n}{k}$$

$$\sum k^5 \binom{n}{k}$$

(2) $\sum k x^k$ un po' più furbo

$$\begin{array}{ccccc}
x & & & & \\
x^2 & x^2 & & & \\
x^3 & x^3 & x^3 & & \\
x^4 & x^4 & x^4 & x^4 & \\
x^5 & x^5 & x^5 & x^5 & x^5
\end{array}$$

$$\frac{x-x^6}{1-x} + \frac{x^2-x^6}{1-x} + \frac{x^3-x^6}{1-x} + \frac{x^4-x^6}{1-x} \quad \frac{x^5-x^6}{1-x}$$

$$= \frac{\frac{x-x^6}{1-x} - 5x^6}{1-x}$$

EQ. FUNZIONALI

Basi di Hamel (basi di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$)

Idea: voglio B insieme di reali tali che

$\forall x \in \mathbb{R}$

(*) $$x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{b_i}_{\in B} \quad \text{in modo unico}$$

i) diciamo che G è un insieme di generatori se $\exists$ almeno una scrittura (*) per ogni $x \in \mathbb{R}$

ii) diciamo che I è un insieme linearmente indipendente se $\nexists$ a_i, b_i t.c.

$$\sum \underbrace{a_i}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{b_i}_{\in I,\ \text{diversi fra loro}} = 0$$

$$0 = 1 \cdot \pi - 1 \cdot \pi$$

Fatto (si dimostra con scelta) esistono insiemi di generatori linearmente indipendenti

Si chiamano basi (di Hamel)

Th ogni elemento di $\mathbb{R}$ si scrive in modo unico come (*)

dim

$$x = \sum_i q_i b_i = \sum r_i c_i$$

$$0 = \sum q_i b_i + \sum r_i c_i$$

poiché sono linearmente indipendenti, queste scritture devono essere uguali a meno dell'ordine $\square$

Fatti: se io ho un insieme l.i., posso sempre trovare una base che lo contiene

$$\left(\underline{\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1},\ \pi,\ \dots\right)$$

$$a(\sqrt{2}-1)+b(\sqrt{2}+1)=0$$

$$(a+b)\sqrt{2}+(a-b)1=0$$

Fatto ogni insieme di generatori contiene una base

A che servono?

Trovare soluzioni "non banali"

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \quad *$$

$1, \pi, \sqrt{2}-1, \ldots$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$m_1 \quad m_\pi \quad m_{\sqrt{2}-1} \quad \ldots$

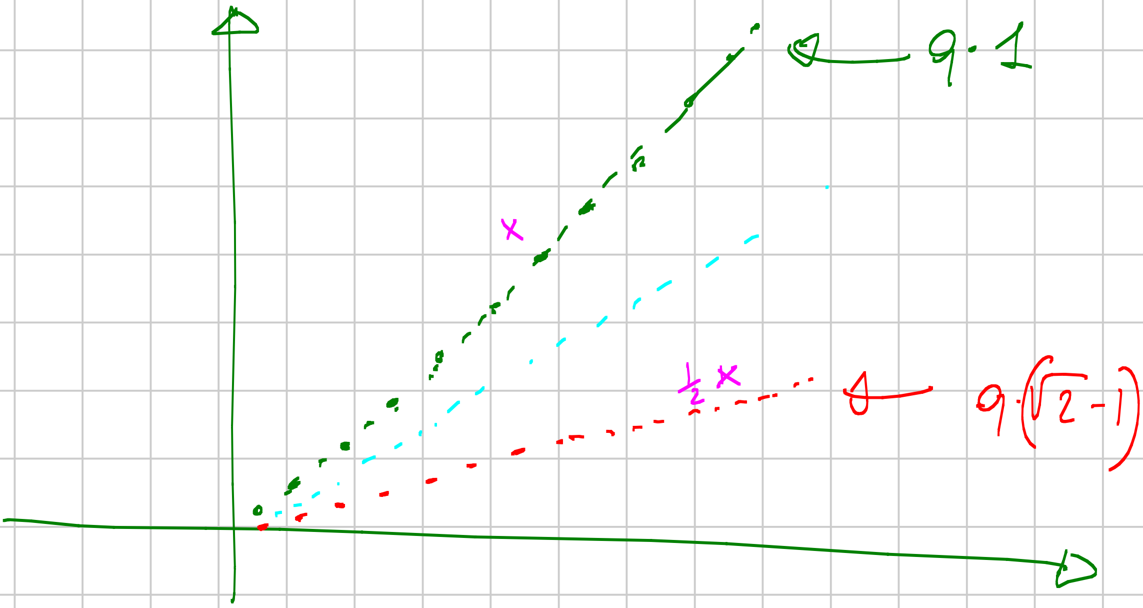
$$\boxed{\begin{aligned} f(1) &= m_1 \\ f(\pi) &= m_\pi \\ f(\sqrt{2}-1) &= m_{\sqrt{2}-1} \end{aligned}}$$

(*) implica

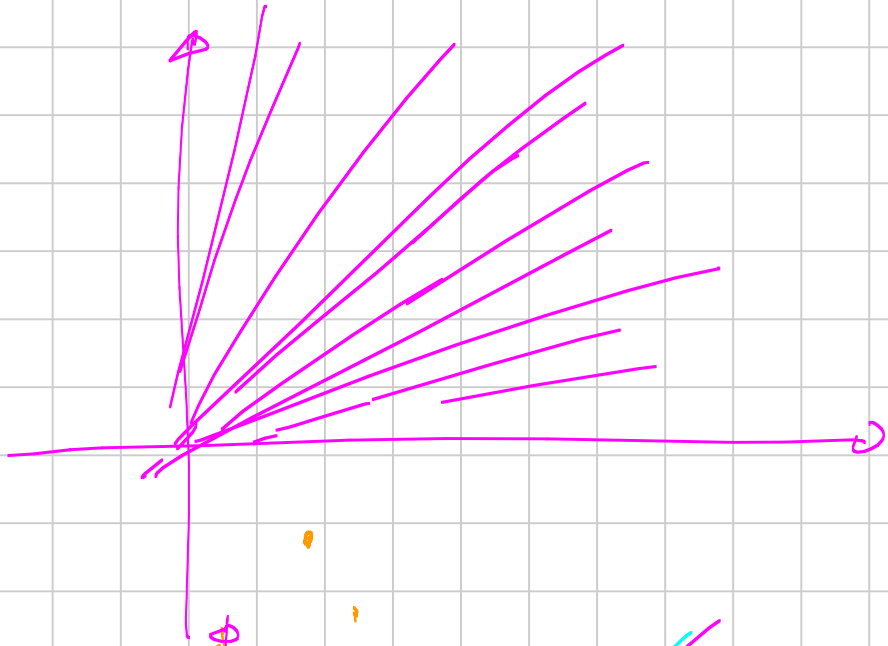
$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n) =$$
$$= q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \ldots + q_n f(x_n)$$

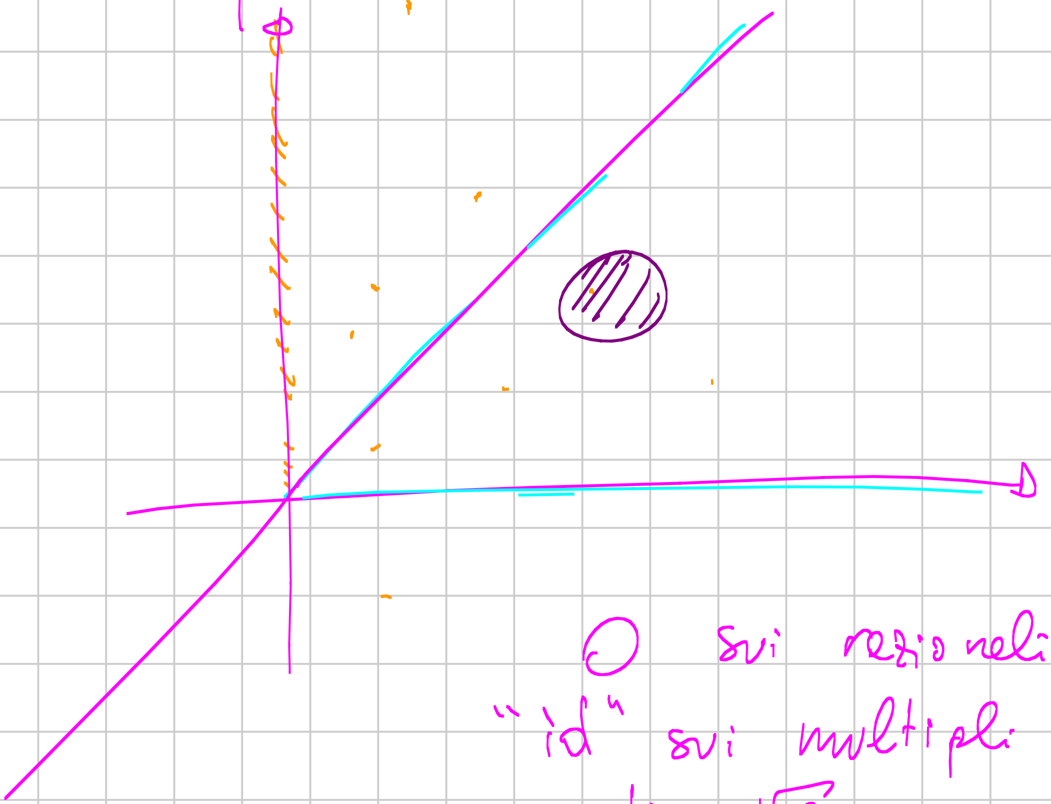
$$x = q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot \pi + q_3 \cdot (\sqrt{2}-1) + \ldots$$

$$f(x) = q_1 \cdot m_1 + q_2 m_\pi + q_3 m_{\sqrt{2}-1} + \ldots$$



$$q\sqrt{2} = q(\sqrt{2}-1) + q \cdot 1 =$$
$$= q \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) + q \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$



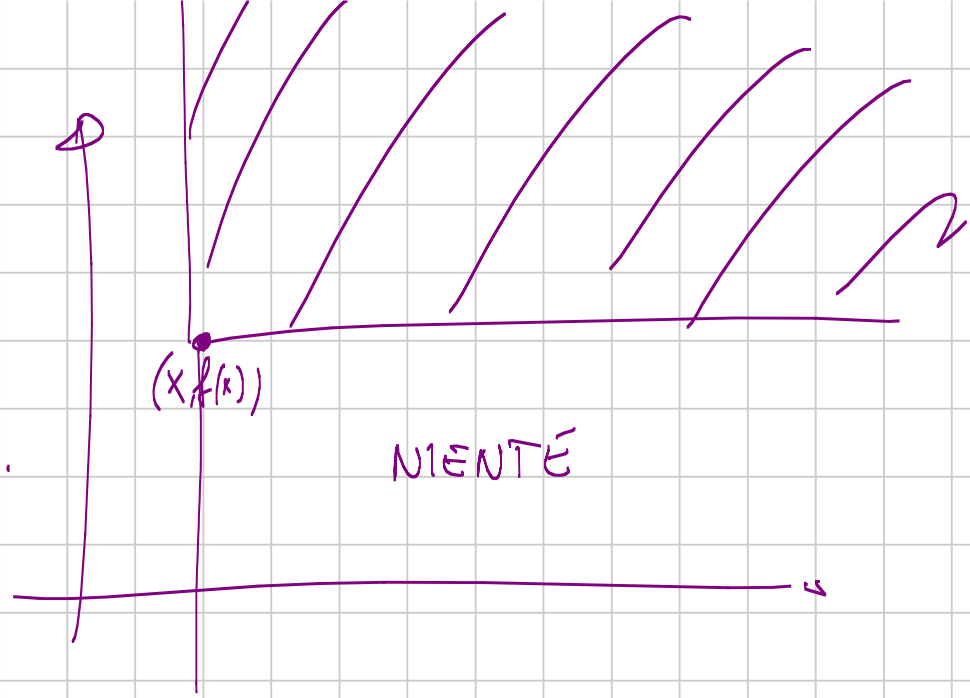


0 sui razionali

"id" sui multipli razionali di $\sqrt{2}$

$$x = M\sqrt{2} - N \cdot 1$$

$$f(x) = M \cdot \sqrt{2}$$



$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

periodica di periodo 1
e di periodo π

$\{1, \pi\} \subseteq B$ base di Hamel

Definita f sulla base: $f(1)=0$
$f(\pi)=0$
$f(\text{qualunque altra cosa})=1$

$$x = q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot \pi + q_3 \cdot b_3 + q_4 \cdot b_4 + \dots$$

$$x+\pi = q_1 \cdot 1 + (q_2+1)\cdot\pi + \dots$$

è l'unica scrittura in base di x

$$f(x) = a_3\, f(b_3) + \dots$$

$$f(x+\pi) = a_3\, f(b_3) + \dots$$

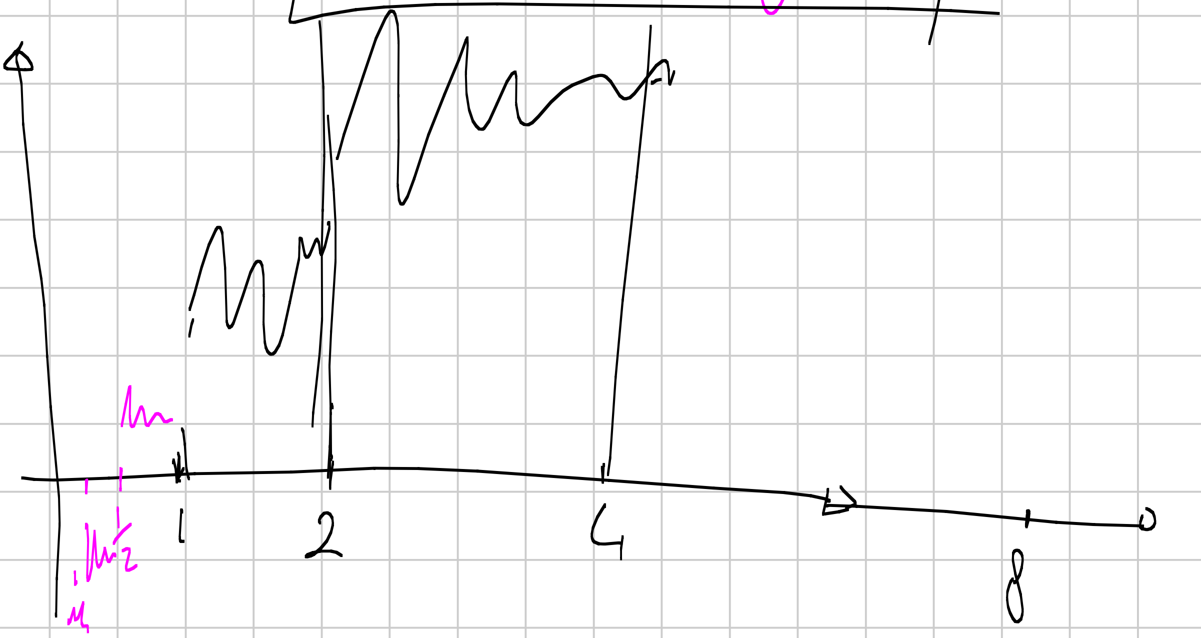
Trovare tutte le $f : (+1, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x^2) - f(x) = 1$$

$$f(e^{2z}) - f(e^z) = 1 \qquad \forall\, z > 0$$

Definisco $\quad g(z) := f(e^z) \qquad g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

g soddisfa $\quad \boxed{g(2z) - g(z) = 1}$



$[1,2)$

Sia $\quad \bar{g} : [1,2) \to \mathbb{R} \quad$ arbitraria

Definisco

$$g(\cancel{x}) = \begin{cases} \bar{g}(x) & \text{se } x \in [1,2) \\ \bar{g}(x/2) + 1 & \text{se } x \in [2,4) \\ \bar{g}(x/4) + 2 & \\ \bar{g}(x \cdot 2^{-n}) + n & \text{se } x \in [2^n, 2^{n+1}) \end{cases}$$

$$f(x) = g(e^{x})$$

Questo mi costruisco infinite funzioni che soddisfano $\exists$

INIETTIVITÀ , SURIETTIVITÀ

$$f(x) + f(y) = f(\text{mostro})$$

Supponiamo $\exists$ a, b t.c. $fa = fb$

pongo $a = x$ $\quad$ mostro $= b$

$$\Downarrow$$

$$f(y) = 0$$

e cerco di arrivare a un assurdo

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\quad$ $f(x) = 1$ per che quantità finite di x

e

$$f(x + y f(x)) = f(x) f(y)$$

1) in realtà $f(x) = 1$ mai

2) se $f(a) = f(b)$

$x = a$, mostro $= b$

$\Downarrow$

$f(y) = 1$ $\Rightarrow$ assurdo

"Qual è l'immagine della funzione"

$$f(\mathbb{R}) \doteq \{ f(x) ; x \in \mathbb{R} \}$$

$$f(x) + f(y) = f(\text{mostro})$$

$$a, b \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow a + b \in f(\mathbb{R})$$

Sottogruppi (additivi) di $\mathbb{R}$:

S sottogruppo additivo se:

$$x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$$
$$-x \in S$$

Spesso si riesce a dire che l'immagine è un sottogruppo

$$x \in S \Rightarrow \{ n x ; x \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z} \} \subseteq S$$

<u>Lemma</u>: se S è un sottogruppo di $\mathbb{R}$,

→ o S è denso

→ o $S = \{ n x ; n \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z} \}$ per qualche x

dim

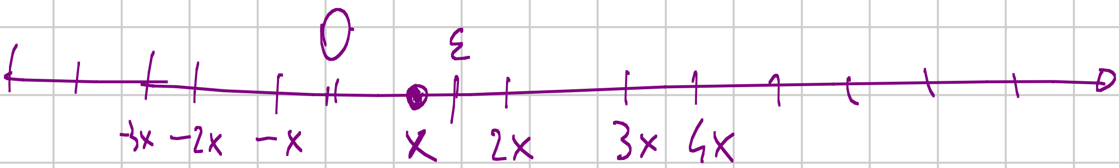
$$C = \inf\{x \in S,\ x > 0\}$$

due casi:

I $\rightarrow C = 0$

II $\rightarrow C > 0$

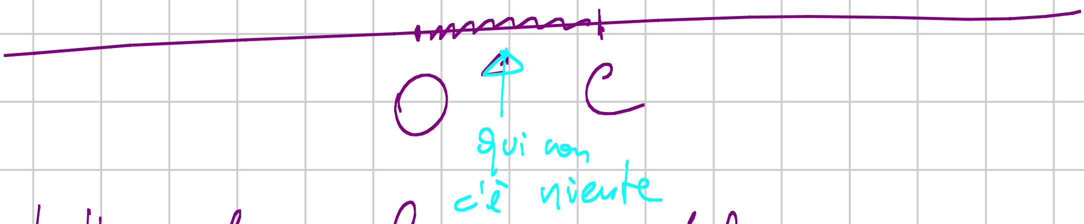
I Per ogni ε trovo $x \leq \varepsilon$ in S



$\Rightarrow$ ogni intervallino lungo "x" contiene almeno un elemento

$\Rightarrow$ ogni intervallino lungo ε contiene un elemento $\Rightarrow$ denso

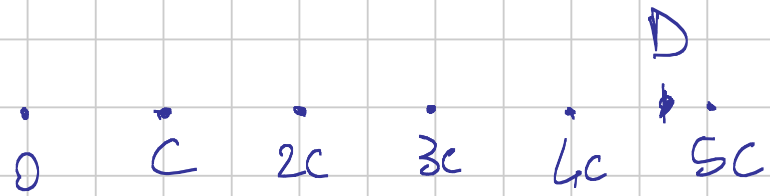
II $C > 0$



Tesi: tutti gli elementi del gruppo sono multipli di C (interi)

$S = \{nC : n \in \mathbb{Z}\}$

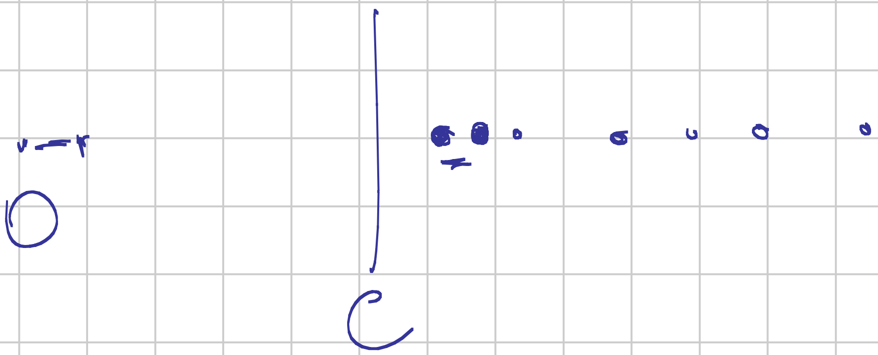
Dim: supponiamo un non-multiplo D



Allora $5c-D$ è più piccolo di c e sta nel sottogruppo $\Rightarrow$ assurdo

---

③ $\inf = c$, ma c non è nel sottogruppo!



Formalizzando

$\exists\ c+t \in S$ con $0<t<\frac{c}{2}$

$\exists\ c+u \in S$ con $0<u<t$

$\Rightarrow 0<t-u<\frac{c}{2}$ sta nel gruppo

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f(x)\,f(y) = 2 f(x + y f(x))$$

Idea 1) $x = x + yf(x)$ NO

$$y = x + yf(x)$$

$$y = \frac{x}{1-f(x)}$$

se $f(x) < 1$, riesco a porli uguali

$\Downarrow$

$f(x) = 2$ ASSURDO

$$f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))$$

Idea: lavoriamo con l'immagine

1) $a, b \in f(\mathbb{R}) \to \frac{ab}{2} \in f(\mathbb{R})$

2) $f(\mathbb{R}) \geq 1$

1 $\Rightarrow$ $\left(\frac{a}{2}\right)b$ $\quad \left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}b\right)$ $\quad \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot b$ sta nell'immagine

$\Rightarrow$ Se $a < 2 \in f(\mathbb{R})$,

allora $\left(\frac{a}{2}\right)^n b \in f(\mathbb{R})$, ma per n abbastanza grande è ≤ 1, ASSURDO

VIDEO DI MAX PREIMO 08 $\Rightarrow$ altri ragionamenti interessanti

---

BMO 07

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)-f(y)) + 4f(x)f(y) \quad \forall x,y$$

$$f(f(y)+f(x)) = f(f(y)-f(x)) + 4f(y)f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(f(x)-f(y)) = f(f(y)-f(x))$$

Su alcuni $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = f(-z)$

Su tutti quelli che si scrivono come

$f(x)-f(y)$

$z \in f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R})$

guardatelo bene!

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

Dato b, scelgo x t.c. $f(x) \neq 0$, $y = \frac{b}{4f(x)}$

$\Rightarrow b = f(\text{mostro}) - f(\text{mostro})$

$\Rightarrow f$ è pari: $f(z) = f(-z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

IMO 99/6 Traccia soluzione:

- fatela su $f(\mathbb{R})$
- fatela su $f(\mathbb{R}) + f(\mathbb{R})$
- fatela su $f(\mathbb{R}) + f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R})$

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

$$f(fx+fy) = f(fx-fy) + 4f(x)f(y)$$

$$f(f(x)) = \text{mostro}(x) \longrightarrow \quad f(f(f(x))) \longrightarrow \text{mostro}(f(x))$$

$$\downarrow$$

$$f(\text{mostro}(x))$$

$$f(fx+fy) = f(fx-fy) + 4f(x)f(y)$$

$$f(fx+fy+f^{z}z) = f(fx-fy-f^{z}z) + 4fx(\cancel{fy}+f^{z}z)$$

$$= f(fy-fx-f^{z}z) + 4fy(\cancel{fx}+f^{z}z)$$

Stessa idea di prima: $fy - fx = t \in \mathbb{R}$

$$f(t - f^{z}(z)) = f(-t - f^{z}(z)) + 4f^{z}(z)\cdot t$$

Pongo $t = f^{z}(z)$

$$f(0) = f(+2f^{z}(z)) + 4[f^{z}(z)]^2$$

f pari

$$f(t) = -t^2 + f(0) \quad \text{per ogni } t \in \underline{2\cdot f(\mathbb{R})}$$

Non sembra utile...

Però: torniamo indietro e guardiamo dove abbiamo usato che ci sia scritto "$f(z)$" e non z

Idea da avere nel "Toolbox":

1) lavorare con l'immagine $f(\mathbb{R})$

2) risolvere (se ci riesco) su $f(\mathbb{R})+f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})-f(\mathbb{R})$

quando la soluzione è $\sim x^2$, spesso fa comodo