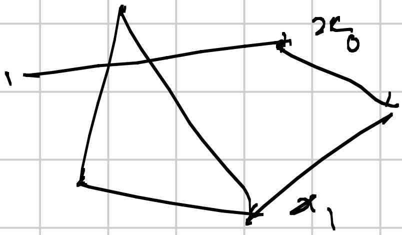
GRAFI

Grafo : vertici + archi (lati)



$d(x_0)=2$

$d(x_1)=3$

e = edges

x vertice $d(x)$ = (grado di x) = n° archi che partono da x.

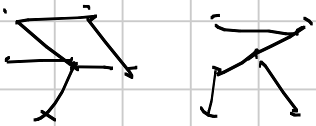
Formula gradi - archi :

$$\sum_{x\in V(G)} d(x) = 2\cdot(\underbrace{\text{n° archi del grafo}}_{e(G)})$$

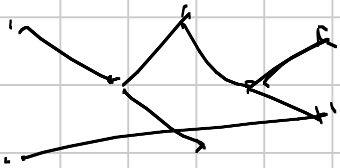
ALBERI (TREES)

Grafi connessi e senza cicli.

Connesso : si può "camminare" da ogni vertice a qualsiasi altro vertice.

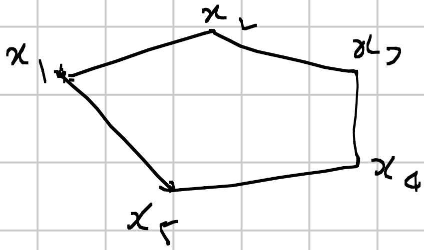


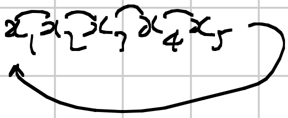
non connesso



← connesso

Ciclo

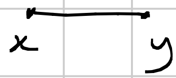




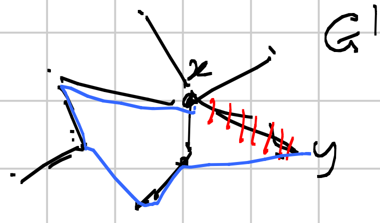
Proprietà fondamentali :

1. Un albero è un grafo connesso minimale (cioè se tolgo un arco non rimane connesso)
2. Un albero è un grafo senza cicli massimale (se aggiungo un arco creo un ciclo).

Dim. di ① : sia xy un arco di G



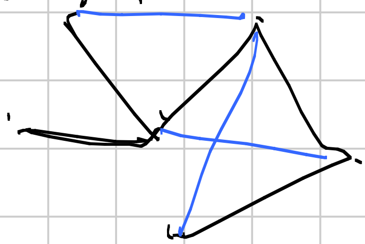
Considero il grafo G' $G - xy$ (G da cui è stato tolto l'arco xy)



∃ cammini da x a y?
no, perché verrebbe un ciclo

→ non è connesso.

"SPANNING TREE" di un grafo connesso G:
un albero (sottografo di G) che contiene tutti i vertici di G



G (nero + blu) grafo connesso
G' (nero) è SPANNING TREE.

<u>Oss.</u> Ogni grafo connesso contiene uno spanning tree.

<u>Dim.</u> $x \in V(G)$

$$V_i = \{ y \in V(G) \mid d(x,y) = i \}.$$

$y \in V_i$ $\quad \underbrace{x\ z_1 z_2 \cdots z_j}\cdots z_{i-1}\ y \quad$ $\underline{\underline{d(x,z_j) = j}}$

In particolare: ① $V_j \neq \emptyset \quad \forall j \leq i$

② $\forall y \in V_i \quad \exists\, y' \in V_{i-1}$ tale che $y'y$ è un arco

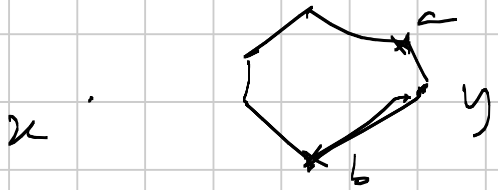
Costruisco uno spanning tree T così:

- vertici = vertici di G
- archi $\forall y \in V_i$ scelgo un solo $y' \in V_{i-1}$ tc $y'y$ sia un arco.

T è un albero?

- T connesso: $\forall y$ posso congiungere y a x
  $y \to y' \to y'' \to \cdots \to x$ (passando per x si può arrivare da ogni vertice a qualsiasi altro)

- T non ha cicli: Se ci fosse un ciclo C considero un vertice di C con distanza da x massimale

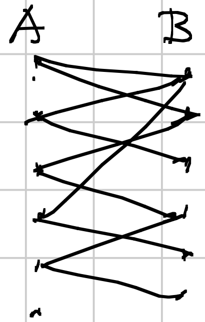


Avrei: $d(a,x) = d(b,x)$
$= d(y,x) - 1$

<u>Oss. 2</u> Questa costruzione "algoritmica" quanti archi lascia?
Se ci sono n vertici, lascio $n-1$ archi.

→ UN ALBERO HA $n-1$ ARCHI (n = n° di vertici)

GRAFI BIPARTITI



$V(G) = A \cup B \qquad A \cap B = \emptyset$

Gli unici archi consentiti collegano vertici di A con vertici di B.

<u>Oss.</u> Un grafo è bipartito $\Leftrightarrow$ non contiene cicli di lunghezza dispari.

<u>Dim</u> $\Rightarrow$ $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_1$ ciclo

$x_1 \in A \quad x_2 \in B \quad x_3 \in A$

$n-1$ elementi

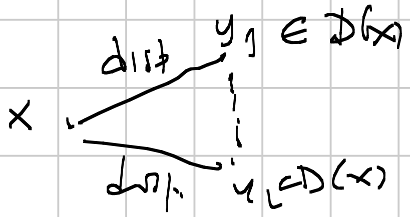
$x_n \in \begin{cases} A & n \text{ dispari} \\ B & n \text{ pari} \end{cases}$

$\Leftarrow$ Posso supporre G connesso.

$x \in V(G)$

$P(x) = \{ y \in V(G) \mid d(x,y) \text{ è pari} \}$

$D(x) = \{ y \in V(G) \mid d(x,y) \text{ è dispari} \}$



disp + disp + 1 = disp

pari + pari + 1 = dispari

TRAVELLING SALESMAN PROBLEM :

- n città da visitare
- partire ed arrivare nella stessa città

Descrivere un algoritmo per trovare un giro di costo minimale ?

Giro → ciclo. (ciclo hamiltoniano)

Cammino hamiltoniano = cammino contenente tutti i vertici del grafo.

<u>Problema</u> : SCACCHIERA 8x8

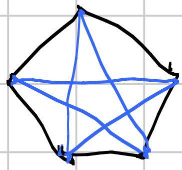
vertici = caselle della scacchiera

archi = due vertici sono uniti da un arco se e solo se ∃ una mossa di cavallo che porta dall'uno all'altro.

<u>Esercizio</u> un ciclo hamiltoniano.

Da sapere : quando un grafo COMPLETO su n vertici è unione di cicli hamiltoniani ? K^n

<u>Es.</u> $n=5$



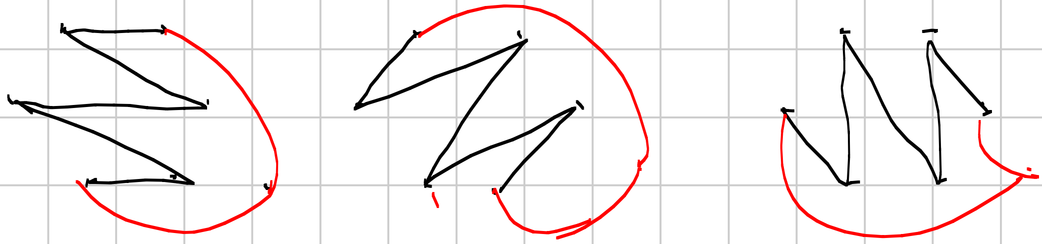
K^5

K^n (grafo $(n-1)$-regolare)

$n-1$ pari O.K.

$n-1$ dispari non O.K. → Ogni ciclo si "prende" due archi che partono da un vertice

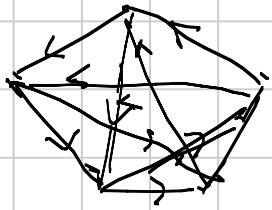
<u>Costruzione per $n=7$</u> $n-1=6$



Circuito euleriano = circuito contenente tutti gli archi

Cammino euleriano = cammino contenente tutti gli archi (1 e una sola volta)

K^5



$d(x)$ pari

pto di partenza
pto di arrivo — gradi dispari

altri — gradi pari

Teo. G grafo connesso

① esiste un circuito euleriano $\iff$ $d(x)$ è pari $\forall x \in V(G)$

② esiste un cammino euleriano da x a y $\iff$ x e y sono gli unici vertici di grado dispari.

Dim ① (perché si può fare se la condizione è soddisfatta).

Induzione sul numero totale $e(G)$ del numero degli archi del grafo.

Caso iniziale: 0 archi $|V(G)| \leq 1$.

$e(G) \geq 1$ ogni vertice ha grado pari $d(x) \geq 2$

$\Rightarrow$ G contiene un ciclo.

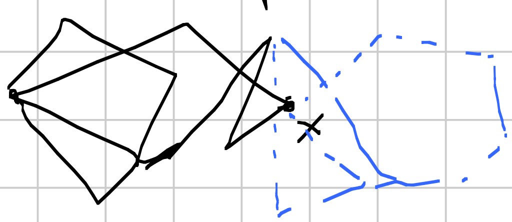
$$\sum_{x \in V} d(x) \geq 2n$$

(NON PUÒ ESSERE UN ALBERO)

$e(G) \geq n$

Sia C un circuito con n° di archi massimale. Spero che C li contenga tutti.

Supponiamo di no (per assurdo).

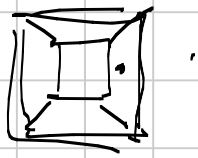


blu = H

G − C

C'è un vertice x nel circuito C per cui non sono stati usati tutti gli archi partenti da x.
Il grafo blu ha la proprietà che ogni vertice ha grado pari
Induzione (H ha meno archi di G):
in H trovo un circuito Euleriano
Adesso basta "incollare i pezzi".

GRAFI PLANARI
(si possono disegnare su un piano senza incrociare gli archi).
Formula di Eulero $v - s + f = 2$. (per grafi connessi)



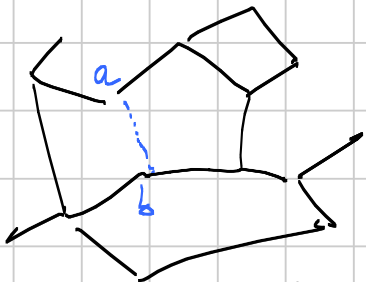
faccia esterna

facce → comprendono 1 faccia all'infinito.

Dim. di Eulero: induzione su f = n° facce
Caso iniziale: $f = 1$ (faccia "all'infinito")
vuol dire che non ci sono cicli → ALBERO

$$v - 1 = s$$
$$v - s + f = v - (v-1) + 1 = 2.$$

Passo induttivo ($f > 1$) (ci sono cicli)
Considero ab un arco all'interno di un ciclo

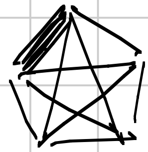


$G - ab = G'$
(v, s, f) (v', s', f')
$v' = v$ $s' = s - 1$ $f' = f - 1$

Per induzione $v' - s' + f' = 2$
$\Rightarrow$ $v - s + f = 2$.

Cose utili:

G planare $\Rightarrow$ $s \le 3v - 6$



K^5

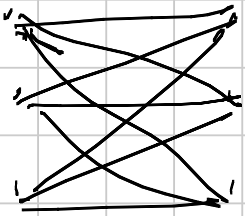
$s = 10 \quad v = 5$

$10 > 3 \cdot 5 - 6$

Esiste un miglioramento:

$g(G) = $ (girth of G) = minima lunghezza di un ciclo di G (ev. ∞)

$$s \le \max\left\{ \frac{g}{g-2}(v-2),\ v-1 \right\}.$$



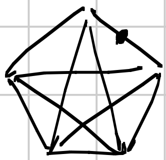
$K^{3,3}$

$v = 6$

$s = 9 \qquad g = 4$

$9 > \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$

$> 6-1 = 5$



Kuratowski

Planare $\Leftrightarrow$ non contiene nessuna "suddivisione" di K^5 o $K^{3,3}$.

COLORAZIONI DI UN GRAFO

A - colorazione dei vertici : vertici adiacenti $\to$ colori diversi

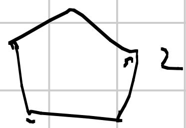
B - colorazione degli archi : archi con un vertice in comune $\to$ colore diverso.

Un risultato sul problema A : G grafo connesso con $\max_{x \in V} \deg(x) = \Delta$, Allora bastano Δ colori, eccetto due casi: G completo, G = ciclo di lunghezza dispari

[4 colori : vertici = regioni

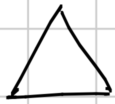
archi - regioni confinanti

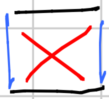
grafo planare $\to$ bastano 4 colori.]



③ Il minimo n° di colori necessario è sempre compreso fra Δ' e $\Delta+1$.

Esempi: Grafi completi. K^n

K^3  3 colori

K^4  3 colori

Congettura: $K^n \to \begin{cases} n \text{ colori} & n \text{ dispari} \\ n-1 \text{ colori} & n \text{ pari} \end{cases}$

CESENATICO 01. n.6

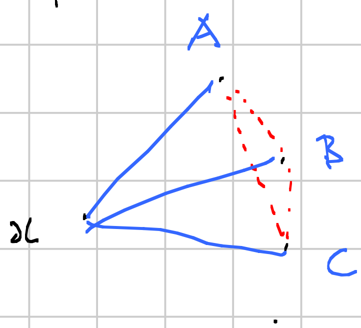
$n-1$ colori $\quad \frac{n-1}{2}$ archi

TOT. $\quad \frac{n-1}{2}(n-1)$ archi $< \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

RAMSEY TYPE

6 persone → ce ne sono o 3 che si conoscono a due a due

o ... NON ...



BLU – conosce

ROSSO – non conosce

G con archi colorati in r colori

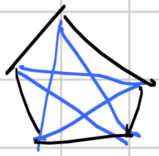
Problema: G contiene un sottografo (di tipo assegnato) monocromatico?

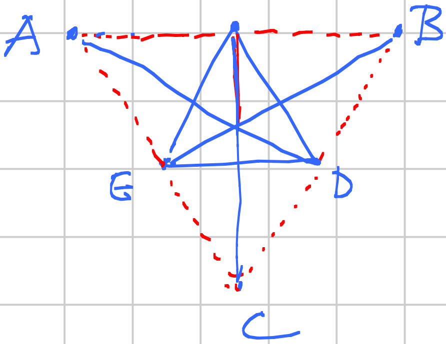
$G = K^6$ 2 colori sottografo K^3

Qual è il minimo n per cui K^n colorato con 2 colori contenga un quadrilatero (= ciclo di lunghezza 4) monocromatico?

$n = 6$

($n = 5$ NON BASTA:





AB blu → ABED blu

AB rosso, BC rosso, AC rosso

ABC C_4 rosso

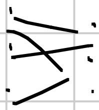
Variante: problema di Turán

Quanti archi può possedere un grafo senza triangoli?

Es: SENZA CICLI DI LUNGHEZZA DISPARI

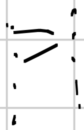
$n = n°$ dei vertici

$n = 2m$ $\qquad K^{m,m}$



$$n° \text{ archi} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

$n = 2m+1$ $\qquad K^{m,m+1}$



$$m(m+1) = m^2 + m = \frac{n^2-1}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

Congettura Se G su n vertici non ha triangoli allora $e(G) \leq \frac{1}{4} n^2$.

Dim. $v_1, \dots, v_n$ vertici

Ad ogni vertice v_i associamo un "peso" x_i $(x_i \geq 0)$

con $x_1 + \dots + x_n = 1$

Consideriamo

$$S = \sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j$$

Vogliamo massimizzare S (trovare i pesi giusti)

Supponiamo che v_k e v_e siano due vertici non uniti da un arco

a = somma dei pesi dei vertici collegati a v_k $\quad x_k$

b = " " " " " " a v_e $\quad x_e$

$$a \geq b$$

Contributo degli archi collegati a v_k e v_e:

$$x_k a + x_e b$$

$\varepsilon > 0$

$$(x_k + \varepsilon) a + (x_e - \varepsilon) b \geq x_k a + x_e b$$

Conclusione: S è massimale quando tutto il peso è concentrato su un sottografo COMPLETO di G.

$\to$ DUE VERTICI

$$S = x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Considero la situazione con $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$

$$S = \frac{1}{n^2} \cdot e(G) \qquad \frac{e(G)}{n^2} \leq \frac{1}{4}.$$

$\blacksquare$

Teo (Turán) Se G (grafo su n vertici) contiene più di

$$M(n,p) = \frac{p-2}{2(p-1)} n^2 - \frac{r(p-1-r)}{2(p-1)} \text{ archi,}$$

allora G contiene un "K^p" (completo).

(Notazione: $n = t(p-1) + r \qquad 1 \leq r \leq p-1$).

$\uparrow$

Esempio. Divido i vertici di G in $p-1$ parti più o meno uguali $X_1, \dots, X_{p-1}$

e collego tutti i vertici $x_i, x_j \in X_i, X_j$ $i \neq j$.

L'altra metà della dimostrazione:

induzione su t

$t=0$. $(n \leq p-1)$ $M(n,p) = \binom{n}{2}$

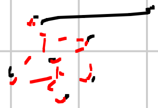
CASO OVVIO

Passo induttivo $t \to t+1$

Consideriamo G n vertici, nessun K^p

e con un n° di archi MASSIMALE rispetto a questa proprietà.

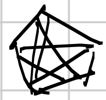
Quindi G contiene un K^{p-1}



$p-1$ vertici

$G - K^{p-1}$

v



"fuori" v può essere collegato ad al più $p-2$ vertici "dentro"

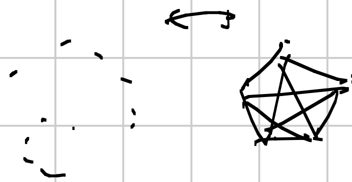
Ovviamente, per induzione, $G - K^{p-1}$ (t più piccolo) non contiene K^p.

Il numero degli archi di G è

$\leq$ n° archi di $G - K^{p-1}$ +

+ collegamenti misti

+ collegamenti in K^{p-1}



$$\leq M(n-p+1,p) + (p-2)(n-p+1) + \binom{p-1}{2}$$

$G - K^{p-1}$

$$= M(n,p).$$

11) **Esercizio 1** G n vertici, e archi

Allora il n° di triangoli è $\geq \frac{1}{3}\left(\frac{4e^2}{n} - en\right)$.

(12) **Esercizio 2** G n vertici, $e \geq \frac{1}{2} n\sqrt{n-1}$.

Allora $g(G) \leq 4$

girth (= minima lunghezza di un ciclo)

($12\frac{1}{2}$) **Esercizio 3** G ha n vertici, tutti di grado $\geq \frac{n}{2}$.

Allora G ha un ciclo di lunghezza n.

(circuito hamiltoniano).

VAN LINT – WILSON (COMBINATORIA)