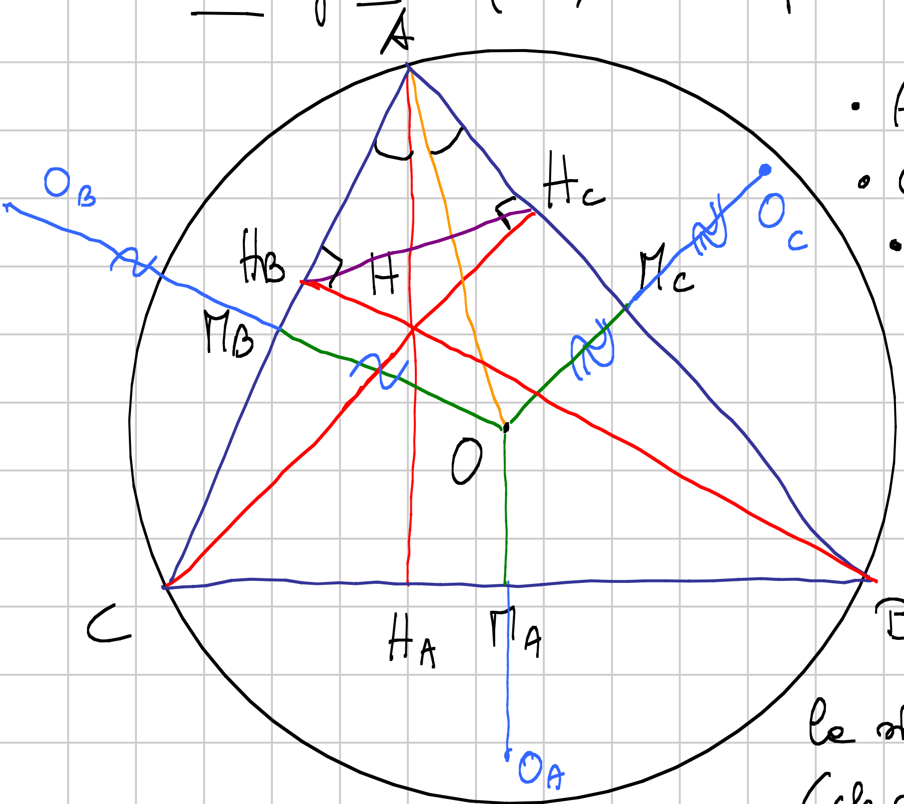
Geometria 3 – medium: Geo. sintetica del Triangolo

1) L'origine (O, ma un po' anche H)



- AH_BHH_C ciclico
- CH_BH_CB ciclico
- $C\hat{A}H = B\hat{A}O$ e cicliche
- $\triangle A\hat{B}C \sim \triangle AH_BH_C$
- O ortocentro di $M_AM_BM_C$
- H incentro di $H_AH_BH_C$ e A, B, C sono gli excentri
- $OA \perp H_BH_C$ e cicliche
- $H_AH_BH_C$ e $M_AM_BM_C$ hanno le stesse cfr. circoscritte. (cfr di Feuerbach o dei 9 punti)

- A, B, C, H sist. ortocentrico

i) • cfr. circoscritte ad ABC, HBC, AHC, ABH sono congruenti

ii) • i loro circocentri formano un altro sist. ortocentrico congruente al primo

iii) • H centro radicale per ogni terna di cfr. che hanno le altezze come corde

- circocentro di $H_AH_BH_C$ (o $M_AM_BM_C$) = pt. medio di OH

(i) il simm. di H risp. ad un lato sta sulla cfr. circoscritta ad ABC

$\Rightarrow$ il simm. di Γ_{ABC} risp. ad un lato passa per H.

$\Rightarrow$ tale cfr. è circoscritta al triangolo formato da H e da quel lato.

(ii) i centri di Γ_{HBC}, Γ_{AHC}, Γ_{ABH} sono i simm. di O risp. a BC, AC, AB e li chiamiamo O_A, O_B, O_C. Voglio $O_AO \perp O_BO_C$

$\Rightarrow$ voglio $O_BO_C \parallel BC$ che è vero ($BC \parallel M_BM_C \parallel O_BO_C$)

inoltre $O_BO_C = 2 \Pi_B \Pi_C = BC$ e ciclude.

(ii bis) Sappiamo che O, H sono simm. risp. a N = centro cf. Feuerbach e sappiamo che la cf. di F. passa x i pt med di AH, BH, CH
$\Rightarrow$ è cf. di F. anche x $\overset{\triangle}{AHB}$, $\overset{\triangle}{BHC}$, $\overset{\triangle}{CHA}$.
$\Rightarrow$ i circocentri O_A, O_B, O_C si ottengono dagli ortocentri dei risp. triangoli x simm. centrale in N, ma questi ortoc. sono A, B, C.

(iii) Calcoliamo le potenze di H risp alle 3 cf. con le corde AH_A, BH_B, CH_C $\Rightarrow$ basta dim che

$$AH \cdot HH_A = BH \cdot HH_B = CH \cdot HH_C \quad (?)$$

in BH_CH_BC (ciclico) ho $BH \cdot H_BH = CH \cdot HH_C$ (corde)
e così via $\Rightarrow$ la tesi.

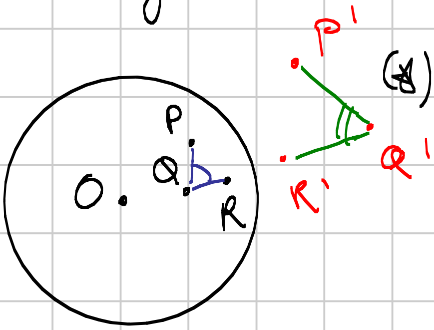
Personaggi

- Inversione : O, R

  P, P' inversi se sono all. con O e $OP \cdot OP' = R^2$

i) $P, Q, R \longrightarrow P', Q', R'$

Che legame c'è fra $P\hat{Q}R$ e $P'\hat{Q'}R'$?



(*) $\measuredangle PQR + \measuredangle P'Q'R' = \measuredangle POR$

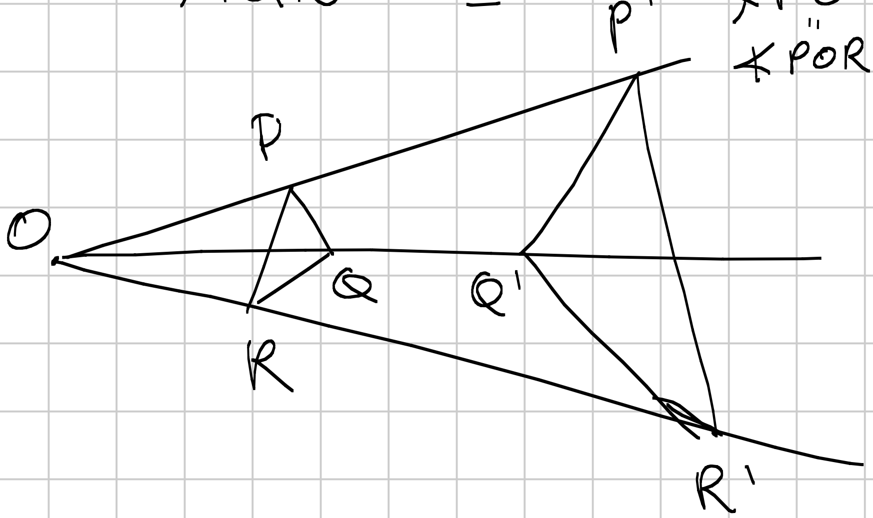
Dim: $\measuredangle PQO = \measuredangle OP'Q' = \begin{pmatrix} OP \cdot OP' = R^2 \\ OQ \cdot OQ' = R^2 \end{pmatrix}$

$= \measuredangle P'OQ' + \measuredangle OQ'P'$

$$\sphericalangle OQR = \sphericalangle Q'R'O = \begin{pmatrix} OQ\cdot OQ' = R^2 \\ OR\cdot OR' = R^2 \end{pmatrix}$$
$$= \sphericalangle R'Q'O + \sphericalangle Q'OR'$$

$$\sphericalangle PQO + \sphericalangle OQR = \underbrace{\sphericalangle P'OQ'} + \underbrace{\sphericalangle OQ'P'} + \underbrace{\sphericalangle R'Q'O} + \underbrace{\sphericalangle Q'OR'}$$

$$\sphericalangle PQR \quad = \quad \sphericalangle P'OR' - \sphericalangle P'Q'R'$$
$$\sphericalangle P'OR' = \sphericalangle POR$$



$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle PQR + \sphericalangle P'Q'R' = \sphericalangle POR$$

•) $P, Q \to P', Q'$

[$PQQ'P'$ ciclico]

$$OP\cdot OP' = R^2$$
$$OQ\cdot OQ' = R^2$$
$$\overset{\triangle}{OPQ} \sim \overset{\triangle}{OQ'P'}$$

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'} = \frac{OQ\cdot OP}{R^2}$$

$$\Rightarrow P'Q' = \frac{PQ}{OQ\cdot OP}R^2$$

Teor. di Tolomeo

A, B, C, D punti $\Rightarrow AB\cdot CD + BC\cdot AD \geq AC\cdot BD$

e vale l'ug. se $ABCD$ quad. ciclico

(o allineati e disposti in un det. modo)

Dim: inversione di centro D. (e raggio r)

$A, B, C \to A', B', C'$

e vale $A'C' \leq A'B' + B'C'$

$\Updownarrow$

$$\frac{AC}{DA\cdot DC}\cancel{r^2} \leq \frac{AB}{DA\cdot DB}\cancel{r^2} + \frac{BC}{DB\cdot DC}\cancel{r^2}$$

$$AC\cdot DB \leq AB\cdot CD + BC\cdot DA$$

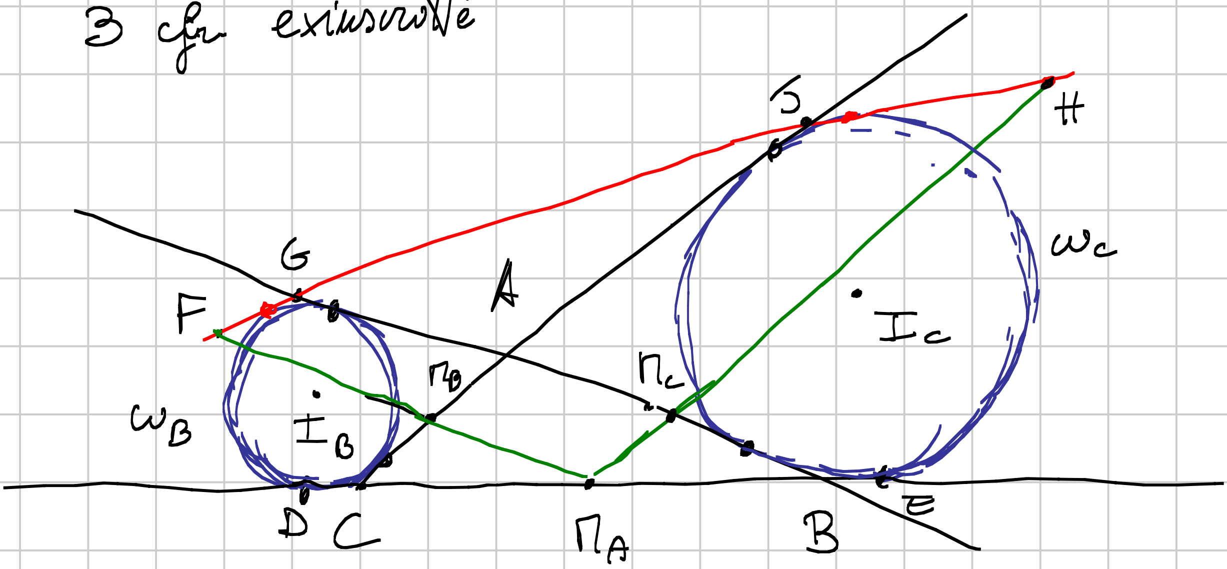
Vale l'ug. sse A', B', C' allineati

(i) la loro retta passa per D $\Downarrow$ deve valere D, A, B, C all. D, C, B, A all.

(ii) la retta non passa per D $\Rightarrow A, B, C, D$ stanno su una cfr.

Teor. di Feuerbach

La cfr. di Feuerbach è tangente alla cfr. inscritta e alle 3 cfr. exinscritte



Voglio un'inv. che manda $\Gamma_{\Pi_A\Pi_B\Pi_C} \longrightarrow$ retta rossa

e che fissa ω_C, ω_B. ($\Rightarrow$ cfr. di inv. $\perp \omega_B, \omega_C$)

Abbiamo che Π_A è pt. medio anche di DE $\quad (\Pi_A D = \Pi_A E)$

$\Rightarrow$ la cfr. di diam. DE è $\perp$ a ω_B, ω_C.

e manda Feuer. in una retta

G e C sono simm. risp. alle bisett. est. di A ($I_B I_C$)
J e B sono simm. " " " " " " ($I_B I_C$)

$$\Rightarrow AG = AC \qquad AJ = AB$$

$$M_A M_B \cdot M_A F = M_A M_C \cdot M_A H = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 = \left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2$$

$$\frac{M_C H}{AJ} = \frac{M_C G}{CA} \qquad M_C H = \frac{AB}{CA}\left(CA + \frac{1}{2}AB\right)$$

$$M_A H = M_A M_C + M_C H = \frac{AC}{2} + \frac{AB}{CA}\left(CA + \frac{1}{2}AB\right) = \frac{(AB+CA)^2}{2\,AC}$$

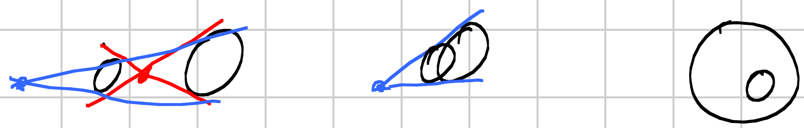
$$M_A H \cdot M_A M_C = \frac{(AB+AC)^2}{2\,AC} \cdot \frac{AC}{2} = \frac{(AB+AC)^2}{4}. \square$$

Si riadatta x cfr. inscritta + exinscritta.

Centri di similitudine delle cfr. inscritta e circoscritta

P, Q t.c. $\exists$ omot. di centro P o Q che manda la cfr. inscritta in quella circoscritta.

Es:



P, Q dividono $O_1 O_2$ in rapporto $R_1 : R_2$ $\qquad$ O_i: centri
R_i: raggi

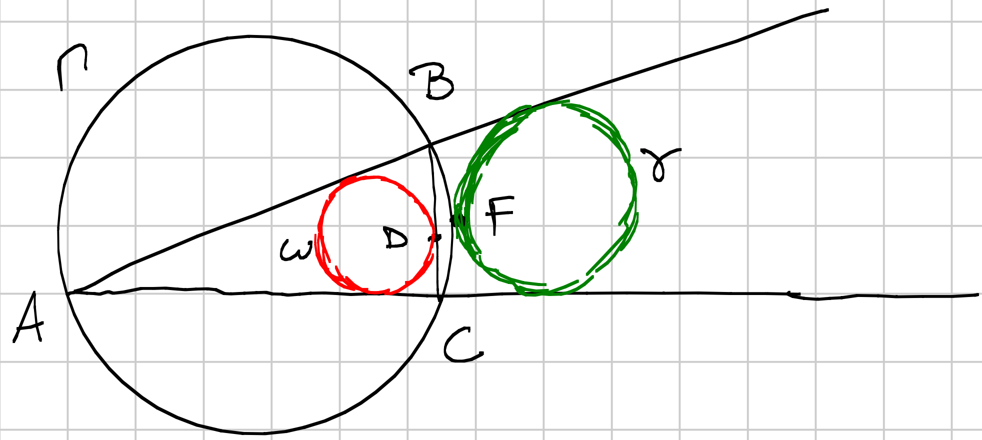
Oss: se c'è un'omot. di centro X che manda Γ_1 in Γ_2 e un'omot. di centro Y che manda Γ_2 in Γ_3 allora la comp. è un'omot di centro $Z \in XY$ che manda Γ_1 in Γ_3

- ABC, D proiez. di I su BC, E proiez. di I_A su BC (I_A excentro).
  Allora è centro di simil. tra inscr. e circo.
  Stanno sui simmetrici di AD e AE risp. alla bisett. di $B\hat{A}C$.

Idea furba: inversione di centro A, raggio $\sqrt{AB\cdot AC}$
+
simm. risp. alla bisettrice di A

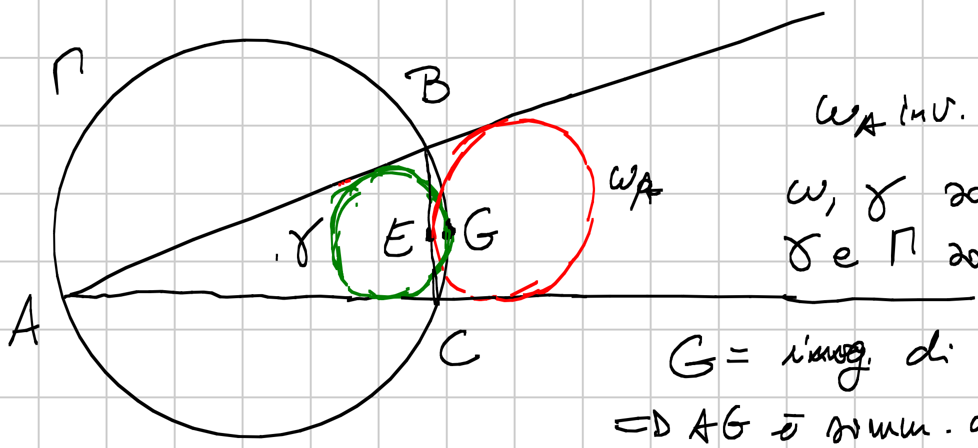
scambia B e C, fa il simm. delle rette uscenti da A.

Γ = cfr. circo ABC $\longrightarrow$ retta BC
ω = cfr. inscritta ABC $\longrightarrow$ cfr. tg. a AC, AB e $\Gamma = \gamma$



Centro di sim tra ω e γ è A
tra γ e Γ è F = inv di D
$\Rightarrow$ centro di sim. sta su AF
tra Γ e ω

$\Downarrow$
AF simm. di AD

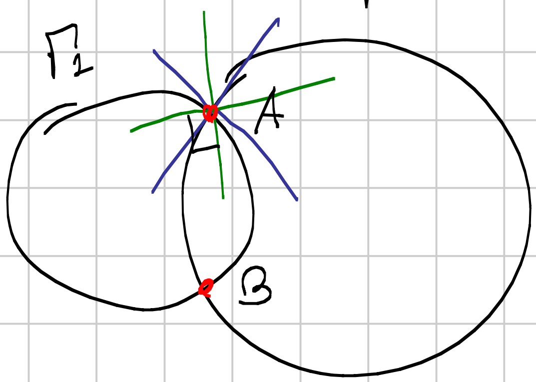


ω_A inv. di γ
ω, γ sono simili da A
γ e Γ sono simili da G

G = immag. di E
$\Rightarrow AG$ è simm. di AE. ∎

Teo: 4 punti non conciclici possono essere mandati tramite inversione nei 3 vertici di un triangolo + l'ortocentro.

Ingredienti: 1) Date due cf. intersecanti $\exists$ 2 cf. che le scambiano per inversione ← cf. di antisimil.



$\exists\, \omega_1, \omega_2$ t.c.

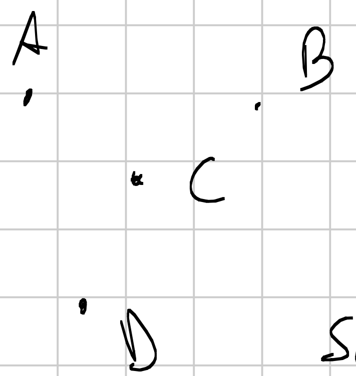
Γ_1 è inv. di Γ_2 risp. a ω_1 e anche a ω_2

$tg(\omega_i)$ in A deve essere bisett. x le Tg di Γ_1 e Γ_2 in A anche in B!

$\Rightarrow$ i centri di ω_1 e ω_2 sono diam. della cf. di Apollonio

$$\left\{ O_1X = k\,O_2X \;\middle|\; k = \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{R_1}{R_2} \right\}$$

2)



$\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3$

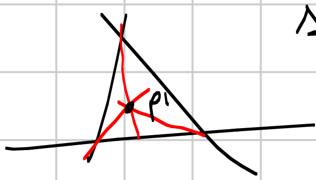
Scegliamo 3 cf. di antisimil.

$\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$

Invertiamo in A.

$\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \longrightarrow$ rette

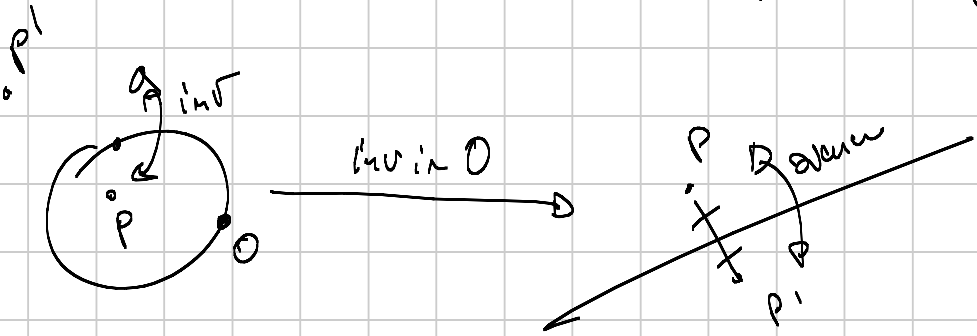
$\omega_{12}\ \omega_{23}\ \omega_{31} \longrightarrow$ rette

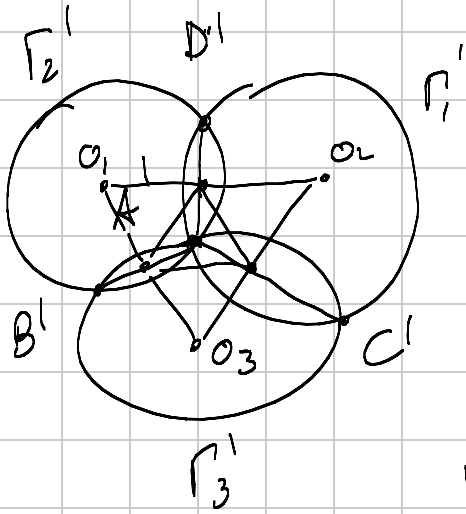


scegliamo le ω t.c. le bisett. siano interne

$\Rightarrow \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ concorrono in A e in P.

Se inverto in P $\quad \omega_{ij} \to$ rette
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Gamma_k \to$ circonferenze congruenti.





Lemma 3 cf. congruenti per A si intersecano in B, D, C in modo che A è ortocentro di $\overset{\triangle}{BDC}$.

Dim: 1 - $\overset{\triangle}{BDC}$ omotetico a $O_1 O_2 O_3$

2 - $O_1O_2 \perp DA$

$\Rightarrow O_1O_2 \parallel BC$

$\Rightarrow DA \perp BC$

Es: i) Le pt. si invertono nei vertici di un parallelogramma

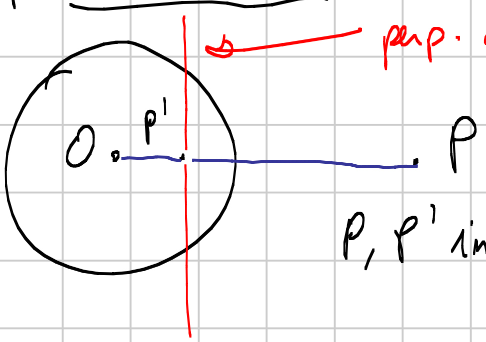
ii) 4 pt. conciclici si invertono nei vertici di un rettangolo

iii) $ABCD$ inscritto in Γ è armonico se e solo se $\exists$ inversione che lo trasforma in un quadrato

$AB \cdot CD = AD \cdot BC$ + ciclico

Retta polare di P rispetto a Γ

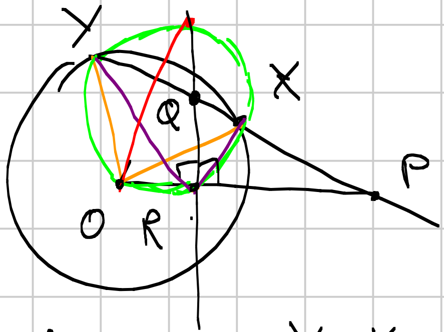
perp. a OP passante per P' = polare di P = $= \mathrm{pol}_\Gamma(P) = \mathrm{pol}(P)$



P, P' inversi risp. a Γ

$\mathrm{pol}_\Gamma(r) = P \Leftrightarrow \mathrm{pol}_\Gamma(P) = r$

polo di r risp. a Γ



$$\frac{XQ}{QY} = -\frac{XP}{PY}$$

$$\Downarrow$$

$QR = \mathrm{pol}(P)$

Proprietà:

$QR \perp OP$

ω = cfr. circo a YOX passa per R?

In $\overset{\Delta}{YRX}$ RQ e RP sono bisett. interna e esterna.

Se volessimo: $R = \text{inv di } P \Rightarrow \frac{XQ}{QY} = -\frac{XP}{PY}$

$\Downarrow$

ORXY ciclico $\Rightarrow O\hat{R}Y = O\hat{X}Y$ e $O\hat{Y}X = \pi - O\hat{R}X$

$\Rightarrow Y\hat{R}Q = Q\hat{R}X \Rightarrow$ bisett.

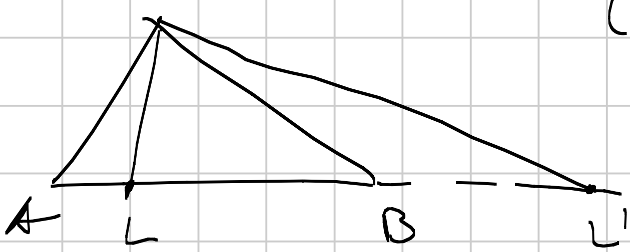
Def: A, B, C, D allineati:

$$(A,B;C,D) = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} \quad \text{birapporto.}$$

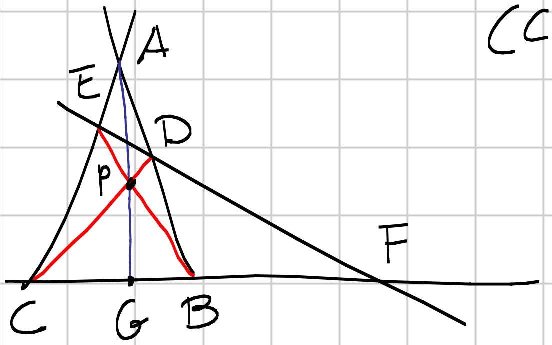
$(A;B;C,D) = -1$ quaterna armonica.

•) Vertici + piedi bisettrici

$(A,B;L,L') = -1$



Birapporto e Quadrilateri



$$(C,B;G,F) = -1$$

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BF}{FC} = -1$$

Dim: Menelao: $\frac{A\cancel{E}}{\cancel{E}C}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{B\cancel{D}}{\cancel{D}A} = -1$

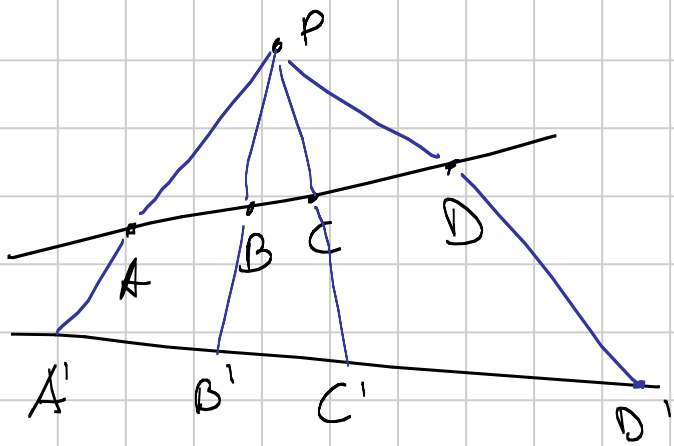
Ceva: $\frac{A\cancel{E}}{\cancel{E}C}\cdot\frac{CG}{GB}\cdot\frac{B\cancel{D}}{\cancel{D}A} = 1$

$$\frac{\text{Ceva}}{\text{Menelao}} = -1$$

$$\parallel$$

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BF}{FC} = -1 .\quad \underline{\text{OK}}$$

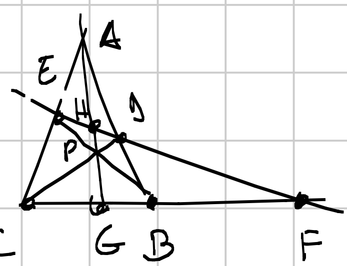
Prop.:



$$(A,B;C,D) = (A',B';C',D').$$

$\frac{AC}{CB}$ dipende da $\frac{\text{sen } APC}{\text{sen } CPB}$

Oss:



$$(C,B;G,F) = -1$$

$\Downarrow$ proietto da A

$$(E,D;H,F) = -1$$

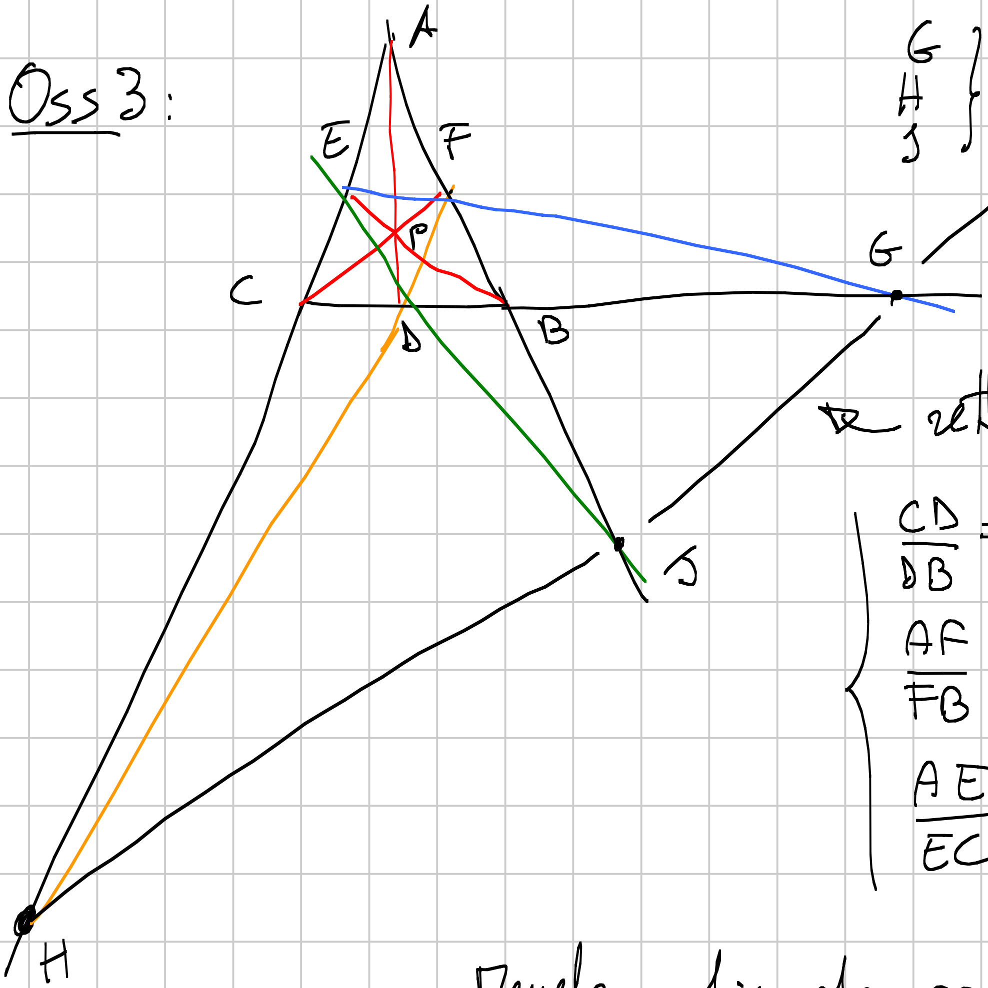
Oss 2: Se CBDE ciclico $\Longrightarrow AG = \text{pol}_\Gamma(F)$

$\uparrow$
Γ

Prop. delle polare: $A \in \text{pol}_\Gamma(B) \Longrightarrow B \in \text{pol}_\Gamma(A)$.

(facile)

Oss 3:



G, H, J t.c. $\begin{cases} (C,B;D,G)=-1 \\ (A,B;F,J)=-1 \\ (A,C;E;H)=-1 \end{cases}$

sono allineati.

→ retta Tripolare di P

$$\begin{cases} \dfrac{CD}{DB} = -\dfrac{CG}{GB} \\ \dfrac{AF}{FB} = -\dfrac{AJ}{JB} \\ \dfrac{AE}{EC} = -\dfrac{AH}{HC} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Menelao dice che sono allineati

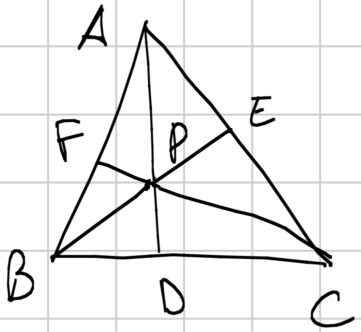
P = ortocentro $\Rightarrow$ retta Tripolare di P = asse ortico $\perp$ retta di Eulero.

$\parallel$

asse radicale di circ. circo e circ. di Feuerbach

— ✱ —

Coniugato Isogonale



Considero AD' simm. di AD risp. alla bisett. di A

BE' ---- di BE ---- di B

CF' --- di CF ---- di C

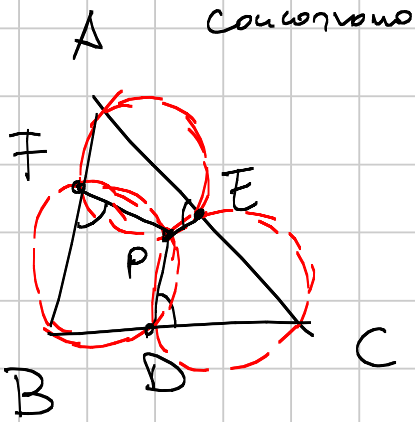
$\Rightarrow$ (Ceva Trig.) AD', BE', CF' concorrono.

Oss: O, H coniugati isogonali

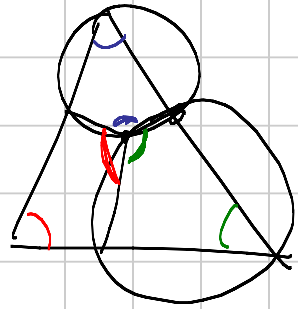
i centri di sim. di cf. inscritta e circoscritta sono coniug. isog. dei punti di Nagel e Gergonne

— ✱ —

Teo (Miquel): ABC Triangolo, D, E, F punti su BC, CA, AB.
$\Longrightarrow$ le circonf. circoscritte a AEF, BDF, CDE concorrono.



Dim:



Oss: $\widehat{PFB} = \widehat{PDC} = \widehat{PEA}$

Oss 2: $\angle BPC = \angle BAC + \angle EDF$

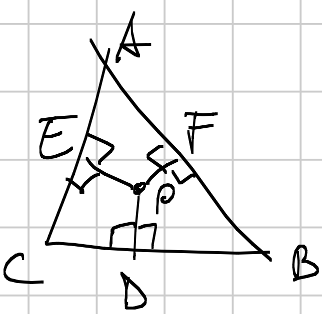
Oss 3: Se DEF, D'E'F' danno P come punto di Miquel

$\Longrightarrow$ DEF, D'E'F' sono simili con centro della simil. in P.

cambia l'angolo con cui PD, PE, PF incontrano i lati
PD', PE', PF'

se tale angolo è $\frac{\pi}{2}$ DEF si dice Triangolo pedale di P

Lati del Tri pedale



EF = ?

AEPF ciclico (diam. AP)

$\Downarrow$

$EF = AP \sin\alpha = AP \cdot \frac{BC}{2R}$

$ED = CP \sin\gamma = CP \cdot \frac{AB}{2R}$

$FD = BP \sin\beta = BP \cdot \frac{AC}{2R}$

Chi è il tri pedale di un punto sulla cf. circoscritta?

Se $P \in \Gamma_{ABC}$ $\quad ABCP$ ciclico $\quad (P \in$ arco $CA)$

Tolomeo
$$\Rightarrow \quad AB \cdot CP + BC \cdot PA = AC \cdot BP$$

$$\cancel{AB}\,\frac{ED}{\cancel{AB}}\cdot \cancel{2R} + \cancel{BC}\cdot\frac{EF}{\cancel{BC}}\,\cancel{2R} = \cancel{AC}\cdot\frac{FD}{\cancel{AC}}\,\cancel{2R}$$

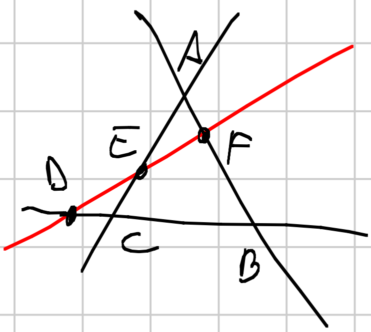
$$ED + EF = FD$$

$\Rightarrow$ D, E, F allineati

Teo (Simson): Le proiezioni di P sui lati sono allineate $\Leftrightarrow$ P sta sulla cf. circoscritta

Teo (Miquel) (delle 4 rette) Date 4 rette a 3a3 non incidenti e non parallele, queste individuano 4 triangoli. Le loro 4 cf. circoscritte sono concorrenti in un punto che si dice pt. di Miquel delle 4 rette.

Dim: dall'Oss 2 sul pt di Miquel segue che se DEF sono allineati, allora $P \in$ cf. circo ad ABC.



$\Rightarrow$ Γ_{AEF}, Γ_{CDE} Γ_{BDF} concorrono nel pt di Miquel del tri ABC rispetto a D, E, F poiché D, E, F sono allineati, tale punto sta su Γ_{ABC}.

Propr: s = retta di Simson di P, s passa per il punto medio di PH e tale punto sta sulla cf. di Feuerbach.

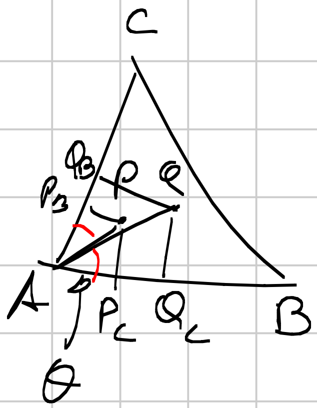
Propr: s = r. di S di P, r = r. di S di Q; r, s fanno un angolo $\frac{P\hat{O}Q}{2}$

— ∗ —

Teo: P, Q coniug. isogonali $\Rightarrow P_A P_B P_C$, $Q_A Q_B Q_C$ (tri pedali) hanno la stessa cf. circoscritta di centro il pt medio di PQ.

Dim:

$\theta = Q\hat{A}B$



$$AP_C \cdot AQ_C = AP_B \cdot AQ_B$$

$$AP_C = AP \cos P\hat{A}B$$
$$AQ_C = AQ \cos\theta$$

$$AP_B = AP \cos\theta$$
$$AQ_B = AQ \cos Q\hat{A}C = AQ \cos P\hat{A}B$$

Teo (Eulero): Area del tri pedale di P è

$$\frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC}$$

$R^2 - OP^2 = -\mathrm{pow}_{\Gamma_{ABC}}(P)$