SENIOR 2010 - ADVANCED

Titolo nota 06/09/2010

$\boxed{\text{SERIE}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_n \xrightarrow{?}$ $L \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$, NON ESISTE LIM

Se $a_n \geq 0$ ci sono solo 2 poss.: $L \in \mathbb{R}$, $+\infty$

Esempio 1 Serie telescopica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Si dim. che $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$

$S_n = \log(n+1) - \log 1 \to +\infty$

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (a parametro) GEOMETRICA

$S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

- se $a \geq 1$ Div. a $+\infty$
- se $a \in (-1,1)$ Conv. a $\frac{1}{1-a}$
- se $a \leq -1$ Non ha limite

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ (armonica generalizzata)

- converge se $a > 1$
- diverge a $+\infty$ se $a \leq 1$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Con $a=1$ diverge

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \dots \geq$

$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}$ Formalmente: $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

A maggior ragione: con $a < 1$ diverge

Con $a=2$ converge visto ieri $S_n \le 2-\frac{1}{n}$

Oppure $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$

VISTA SOPRA

A maggior ragione: con $a \ge 2$ converge

Btw: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Non banale) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ c'è formula ($k \in \mathbb{Z}$)

Restano gli $a \in (0,1)$

Dim 2 Idea di Ieri: $S_n^a = \frac{1}{1^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$ $\qquad S_n^a \le M_a - \frac{N_a}{n^{a-1}}$

Cerco M_a ed N_a in modo da fare induzione

P.I. $$S_{n+1}^a = S_n^a + \frac{1}{(n+1)^a} \underset{\text{Hp}}{\le} M_a - \frac{N_a}{n^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a} \le$$

$$\underset{\text{Hope}}{\le} M_a - \frac{N_a}{(n+1)^{a-1}}$$

Serve $$\frac{N_a}{(n+1)^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a} \le \frac{N_a}{n^{a-1}}$$

$$N_a\left(\frac{1}{n^{a-1}} - \frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right) \ge \frac{1}{(n+1)^a}$$

$$N_a \ge \underbrace{\frac{n^{a-1}(n+1)^{\cancel{a-1}}}{(\cancel{n+1})^a\left[(n+1)^{a-1} - n^{a-1}\right]}}_{\text{serve che sia LIMITATO}} \sim \frac{n^{a-2}}{n^{a-2}}$$

$$\frac{\cancel{n^{a-1}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cancel{n^{a-1}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}-1\right]} = \frac{1}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1 - \frac{1}{n}\right]}$$

$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$

VERA per $x \ge 0$ e $\alpha \ge 1$ (se è così è OK solo per $a \ge 2$)

$$\ge \frac{1}{n\left(\cancel{1}+\frac{a}{n}\cancel{-1}-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{a-1}$$

OK!!

$N_a \to +\infty$ per $a \to 1$ (ottimo!)

Dim 3 Criterio di condensazione di Cauchy

$\sum_{n=\dots}^{\infty} a_n$ Ipotesi: • $a_n \geq 0$

• a_n debolm. decresc.

Allora $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum 2^n \cdot \boxed{a_{2^n}}$ converge

indice = potenza di 2

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 + \dots \geq$
$a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + \dots + a_8$

$= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16}$ se serve $\geq$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 \leq a_1 + \overbrace{a_2 + a_2}^{2-3} + \overbrace{a_4 + \dots + a_4}^{4-7} + \overbrace{a_8 + \dots}^{8-15}$
$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$

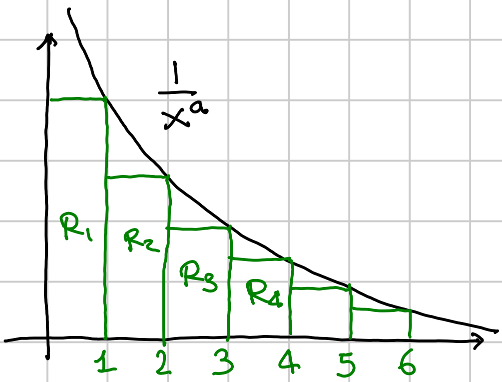
Applicazione:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{an}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{2^a}\right]^n$

= geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{2}{2^a} < 1$
$\Leftrightarrow a > 1$.

— o — o —

Dim. 4 Confronto serie integrali (convergenza per $a > 1$)



Area $(R_i) = \frac{1}{i^a}$

$R_2 + R_3 + \dots + R_n \leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx}_{\text{area sotto il grafico da 1 ad n}}$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

$\alpha = -a$

$= \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^n$

$= \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{n^{a-1}} - 1\right]$

$\frac{1}{n^{a-1}} \to 0$ se $a > 1$

IMO 1991? – 6 Determinare se esiste una successione x_n LIMITATA t.c.

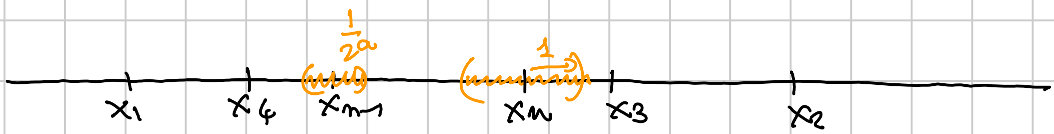
$$|x_n - x_m| \geq \frac{1}{|n-m|^a} \qquad \forall\, n \neq m$$

(a parametro > 1)

Oss.1 Se non ci fosse limitata sarebbe banale!

Oss2 Posso prendere x_n crescente? NO! Ognuno dista almeno 1 dal precedente!

Tento per induzione. Dati $x_1, \dots, x_n$, dove devo prendere x_{n+1}?



Devo escludere $I(x_n, 1)$ ← intervallo di centro x_n e raggio 1

$I\left(x_{n-1}, \frac{1}{2^a}\right)$

$I\left(x_{n-2}, \frac{1}{3^a}\right)$

⋮

il caso peggiore è se sono DISGIUNTI

L'area della zona esclusa è $\leq 2\left(1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a}\right)$

$\leq 2 M_a$ ← non dipende da n!!!

Ricostruzione della dim:

- fisso un intervallo di ampiezza $> 2 M_a$
- ad ogni passo resta sempre almeno un p.to buono nell'interv.

(Nota bene: gli intervalli esclusi passo-passo possono anche scappare da quello iniziale!)

—o—o—

Criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Ipotesi:
- $a_n \geq 0$
- $b_n > 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$

Allora le 2 serie hanno lo stesso comportamento (le somme possono essere diverse)

Dim. basta osservare che $\frac{1}{2} l \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$ per n grande

$$\frac{1}{2} l\, b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$$

Esempio (scriviva in RMM 2009) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\arctan \frac{1}{n}}_{a_n} = +\infty$

Prendo $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{x = \frac{1}{n}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Poiché $\sum \frac{1}{n}$ diverge, anche l'altra diverge ($\arctan x \sim x$ per $x \to 0$)

—o—o—

Serie a segno alterno

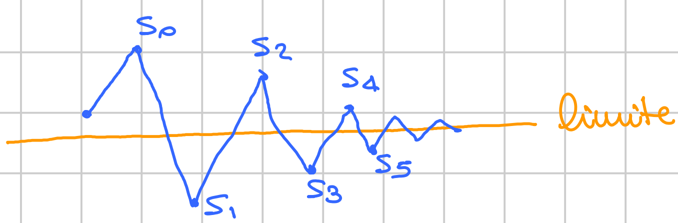
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

$\boxed{\text{CRITERIO DI LEIBNITZ}}$ Ipotesi:
1. $\alpha_n \geq 0$
2. $\alpha_n \to 0$
3. $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tesi: la serie converge

"Dim." $S_{2n} \searrow \qquad S_{2n+1} \nearrow \qquad S_{2m} \geq S_{2n+1} \quad \forall m \ \forall n$

$S_{2n} \to l \qquad S_{2n+1} \to m \qquad S_{2n} - S_{2n-1} = \alpha_n \to 0$



Esempio $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = \sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge !

(e si sa anche la somma: $\log 2$)

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n^a} \text{ converge} \iff a>0$$

— o — o — o —

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$$ Converge ?

Achtung !!!! $\sum a_n$ converge + $\sum |a_n|$ converge

$\Downarrow$

posso riordinare i termini !!!!

Se $\sum a_n$ converge, ma $\sum |a_n| = +\infty$, allora riordinando posso ottenere qualunque somma !

— o — o —

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ "Dimostrazione"

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \dots$$

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\pi x - \frac{1}{6}\pi^3 x^3 + \dots\right) = \pi - \frac{1}{6}\pi^3 x^2 + \dots$$

$$g(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

In un polinomio, la somma dei reciproci delle radici al $\square$ è

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$ $r_1, \dots, r_n$ radici

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_n^2} = \text{Somma}^2 - \text{doppi prodotti}$$
$$= \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}$$

Se fosse vero per le serie di potenze... $$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} = -2\frac{a_2}{a_0} = \frac{\pi^2}{3}$$

contano 2 volte...

$\boxed{\text{Max e min}}$ $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

Teorema di WEIERSTRASS $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$, allora

estremi compresi

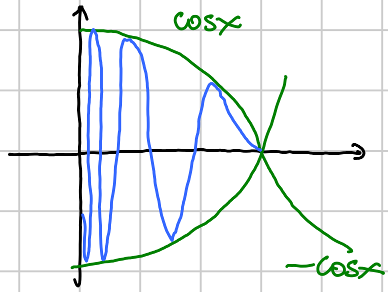
esistono $\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$\min\{\quad " \quad\}$

Esercizio $\exists f : (0,1]$ continua che non ammette né max, né min ?

Esempio 1 : $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ e se la volessi pure limitata ...

Esempio 2 : $f(x) = \cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$



Dove trovare max / min

3 categorie di candidati :

① p.ti $x \in (a,b)$: $f'(x) = 0$ (stazionari interni)

② " " f' non esiste (singolari interni)

③ Bordo $x = a$ e $x = b$.

Esempio $[-2,2]$ $f(x) = |x|$ min $= 0$ p.to di min $x = 0$ ②

max $= 2$ p.ti di max $x = \pm 2$ ③

—o—o—

In 2 o più variabili $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : A \to \mathbb{R}$

- A si dice limitato se è contenuto in una opportuna palla

$$B(\underset{\mathbb{R}^n}{x_0}, \underset{>0}{r}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) \le r\}$$

- A si dice chiuso se (brutalmente: contiene il bordo)

rigorosamente $\forall x \notin A \ \exists r > 0$ t.c. $B(x,r) \cap A = \emptyset$

- A si dice compatto se è chiuso + limitato

Teo. Weierstrass $f : A \to \mathbb{R}$ con f continua e A compatto

$\Rightarrow$ esistono max e min.

Dove trovare p.ti di max / min

① P.ti $x \in$ interno di A (p.ti $x \in A$ per cui $\exists\ B(x, r) \subseteq A$) con derivate parziali nulle

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \text{ in 2 variabili} \qquad \underset{\text{gradiente di } f}{\nabla f} = (f_x, f_y) = (0, 0)$$

② P.ti $x \in$ interno di A in cui "qualche deriv. parz. non esiste".

③ Bordo (in generale sono ∞ p.ti)

— o — o —

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE Caso di 1 moltiplicatore

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\Phi(x) = 0}_{\text{equazione di } V}\}$$

Data $f(x)$, trovare max/min di f in V

__Teorema__ Supponiamo x_0 p.to di max/min per f in V (se V fosse compatto, esisterebbero tali punti).
Allora ci sono 3 possibilità

① In x_0 non esiste ∇f o non esiste $\nabla \Phi$
② In x_0 $\nabla \Phi(x_0) = 0$ (cioè si annullano tutte le deriv. parziali)
③ In x_0 $\nabla \Phi(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$ sono paralleli, cioè $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \boxed{\lambda} \nabla \Phi(x_0)$$

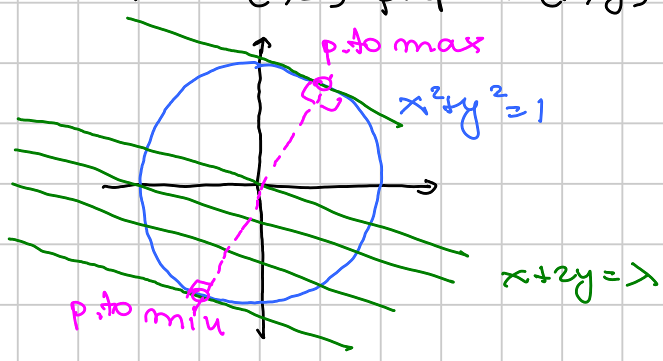
moltiplicatore

__Esempio 1__ max/min $\{x + 2y : x^2 + y^2 = 1\}$

Per via elementare: AM-QM pesata o C-S:

$$x + 2y \leq \sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{con} = \iff (1,2) \text{ prop a } (x, y)$$

Via linee di livello:



Via moltiplicatori:

- Max e min esisto per W.
- Vedo 3 possibili situazioni $\qquad \phi(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad f(x,y) = x+2y$

① Nulla $\emptyset$

② $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $\qquad \nabla\phi(x,y) = (2x, 2y)$

Nulla $\emptyset$ (di solito è così!)

③ Devo cercare i p.ti $(x,y) \in V$ t.c. $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla \phi(x,y)$

$(1, 2) = \lambda(2x, 2y)$

$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ 3 equ in 3 incognite

Dalla 1ª e 2ª ottengo $y = 2x$
sostituisco nella 3ª e fine!

—o—o—

Esempio 2 $\quad$ AM-GM $\quad \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

Osservo che è omogenea, quindi posso assumere LHS = 1 oppure RHS = 1

Scelgo LHS = 1 Vuol dire che

$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$

È compatto? NO! $\quad (\frac{1}{n}, n, 1, \ldots, 1) \in V \quad \forall n \quad$ NO LIMITATO

Scelgo RHS = 1 $\quad V = \{(\ ) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$

Ora $V \subseteq [0,1]^n \Rightarrow$ limitato

Ora so che esiste Max del LHS (per W.)

cerco i p.ti di max in ①, ②, ③

$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$

① $\emptyset$ ② $\emptyset$ $\quad \nabla\Phi = (1, \ldots, 1)$ ③ $\nabla f = \lambda \nabla \Phi$

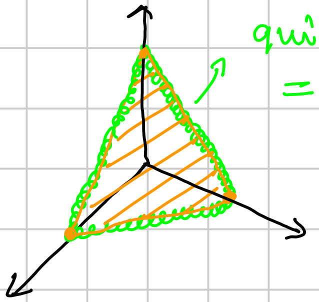
$\begin{cases} x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \lambda \\ x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \lambda \\ \vdots \\ x_1 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$ Tutte le variabili sono uguali (se posso dividere)

$\rightarrow x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ e si conclude

Achtung! Se V è descritto da 1 equazione + un po' di disequazioni compaiono i "bordi dei bordi"

$\boxed{n=3}$

qui un $\geq$ diventa $=$



Il metodo va bene per trovare i candidati nell' "interno" di V, cioè dove le disug. sono strette.

Cosa dire
- Max e min esistono per W.
- Se p.to di max sta nel "bordo del bordo" allora LHS$=0$
- Se non sta lì, posso dividere e finisco

—o—

Esempio 3 $\quad \min \{x^2+y^4+z^6 : \underbrace{xyz=n}_{\text{non compatto}}\}$ $\quad x, y, z \geq 0$

Mettendo $x=n$, $y=1$, $z=1$ ottengo $\min \leq n^2+2$

Quindi min originario $= \min \underbrace{\{x^2+y^4+z^6 : xyz=n, x\leq n, y \leq n, z \leq n\}}_{\text{compatto !!!}}$

Quindi il minimo esiste, e non è in un bordo del bordo (perchè altrimenti cambio n con $2n$ ...)

⋮

i p.ti di minimo stanno nel gruppo 3 $\quad \nabla f = \lambda \nabla \phi$

$$(2x, 4y^3, 6z^5) = \lambda (yz, xz, xy)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda yz & \cdot x \\ 4y^3 = \lambda xz & \cdot y \\ 6z^5 = \lambda xy & \cdot z \\ xyz = n \end{cases}$$

$2x^2 = 4y^4 = 6z^6$ e da qui si chiude basta sostituire nella 4ª:

$$x^2+y^4+z^6 \geq c\,[xyz]^{\frac{12}{11}}$$

—o—o—

Achtung! Alla fine i punti vanno sostituiti per trovare max/min

$f(x,y) = x^2-y^2$