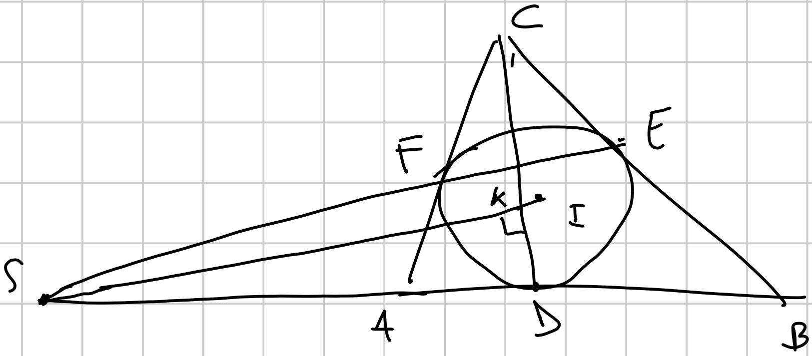
Titolo nota 10/09/2010

1. ABC triangolo, I incentro, D, E, F punti di tangenza, $S = EF \cap BA$. Th: $SI \perp CD$

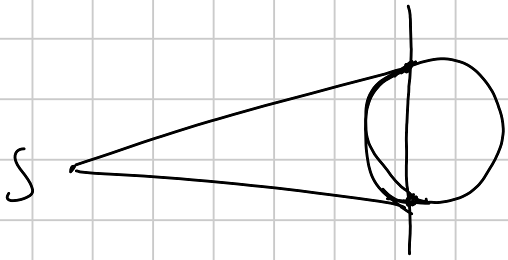


$D \in pol(S)$

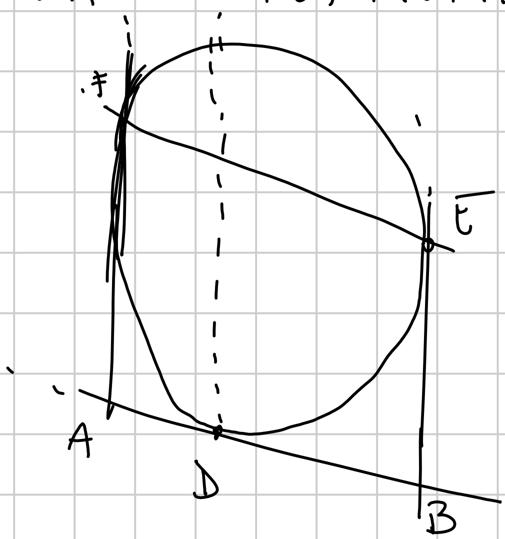
$S \in pol(C) \Rightarrow$

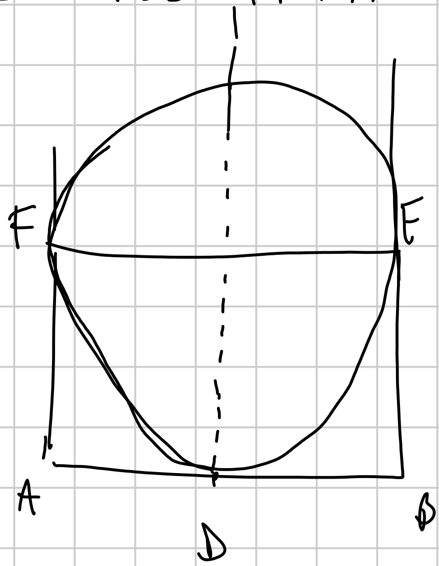
$C \in pol(S)$

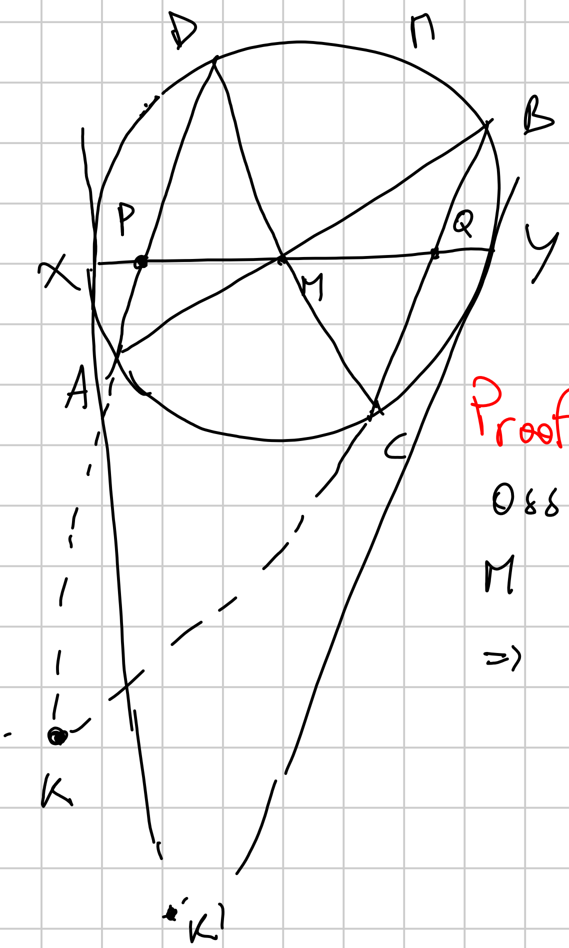
$\Rightarrow pol(S) = CD$



2ª SOL. MANDO LA RETTA SC ALL'INFINITO CON UNA PROIETTIVITA'







Butterfly theorem

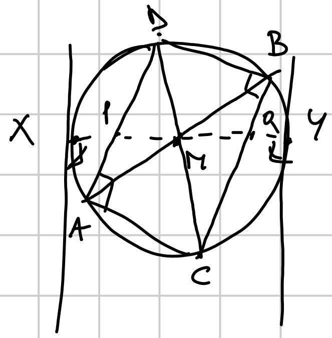
Hp: $XM = MY$ ⇝ X, M, Y, ∞ quat. armonica

Th: $PM = MQ$ ⇝ P, M, Q, ∞ quat. armonica

Proof: Mando la retta KK' all'infinito

OSSERVO CAF È LA POLARE DI M ⇒ $KK' \cap \Gamma = \emptyset$

⇒ Γ si può mantenere cfr.



$pol(M) \perp OM$

$OM \perp XY$

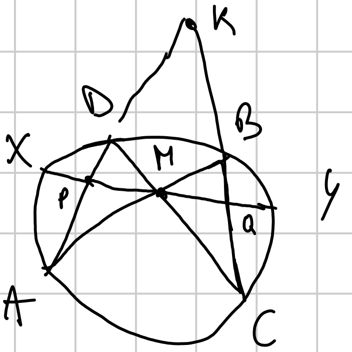
⇒ $pol(M) \parallel XY$

⇒ $\infty \in pol(M)$

Nel disegno nuovo:

- le tangenti in X e Y a Γ sono parallele
  ⇒ XY è diametro di Γ
- X, M, Y, ∞_{XY} rimane una quaterna armonica
  ⇒ $MX = MY$ ⇒ M è il centro di Γ
- $M \in DC$ ⇒ DC è diametro ⇒ $C\hat{A}D$ è retto e similmente gli altri angoli di $ACBD$
- Ora la figura risulta simmetrica ⇒ $PM = MQ$
  ⇒ P, M, Q, ∞_{XY} è quaterna armonica
  ⇒ Thesis!!

$\square$.

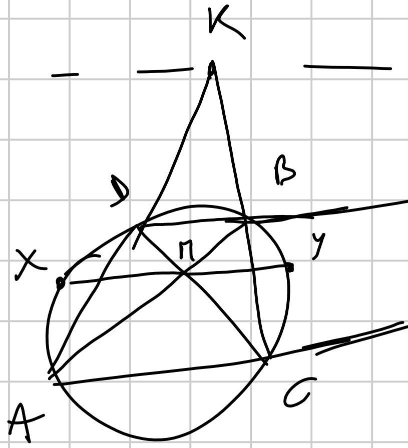


Birapporto X, B, D, Y
proiettando da C ottengo

$$(X, B, D, Y) = (X, Q, M, Y)$$
$$= (X, M, P, Y)$$

$$\frac{\cancel{XM} \cdot QY}{\cancel{XY} \cdot QM} = \frac{XP \cdot \cancel{MY}}{\cancel{XY} \cdot MP}$$

$\Rightarrow$ Q, P dividono due segmenti uguali (XM e MY) nella stessa proporzione $\Rightarrow$ $PM = MQ$



J

$KJ = \text{pol}(M)$

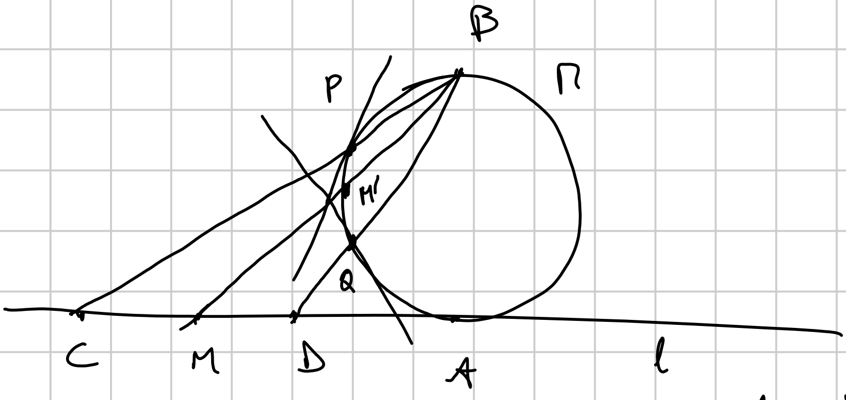
$KJ \cap XY = J'$

$$\boxed{(X, Y, M, J') = -1} \ ??$$

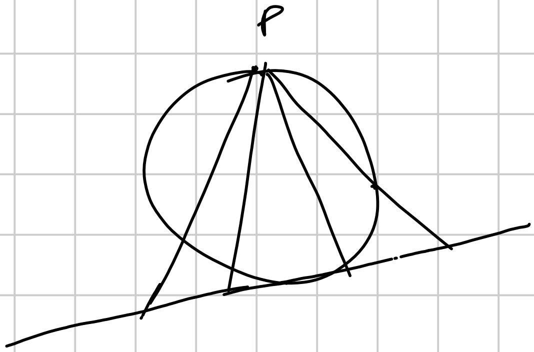
così dimostro $KJ \parallel XY$

$C, M, D, A \in l$ $\quad CM = MD \quad$ ω tange l in A

B diam. opp. ad A in ω



tangente in P
tangente in Q
BM
} Concorrono



1. inverto in B dimodoché

P va in C (di raggio BA)

$M \longleftrightarrow l$

$\boxed{BCD \sim BQP}$

BM è simmediana

$\Rightarrow$ Lemma simmediana

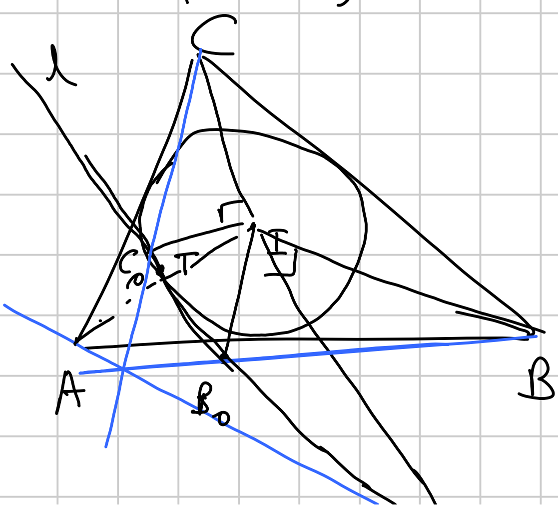
$BPM'Q$ è quadrilatero armonico

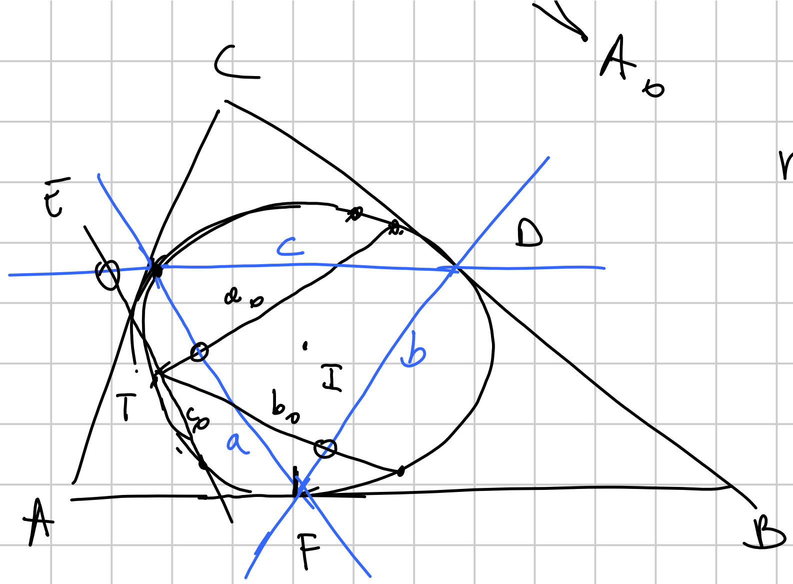
$\Rightarrow$ tangenti e diagonale concorrono

— o —

18. ABC triangolo I incentro. Sia l tangente all'incerchio. Siano $A_0, B_0, C_0 \in l$ tali che $\widehat{AIA_0} = \widehat{BIB_0} = \widehat{CIC_0} = 90^\circ$

Th. AA_0, BB_0, CC_0 concorrenti





retta di Simson

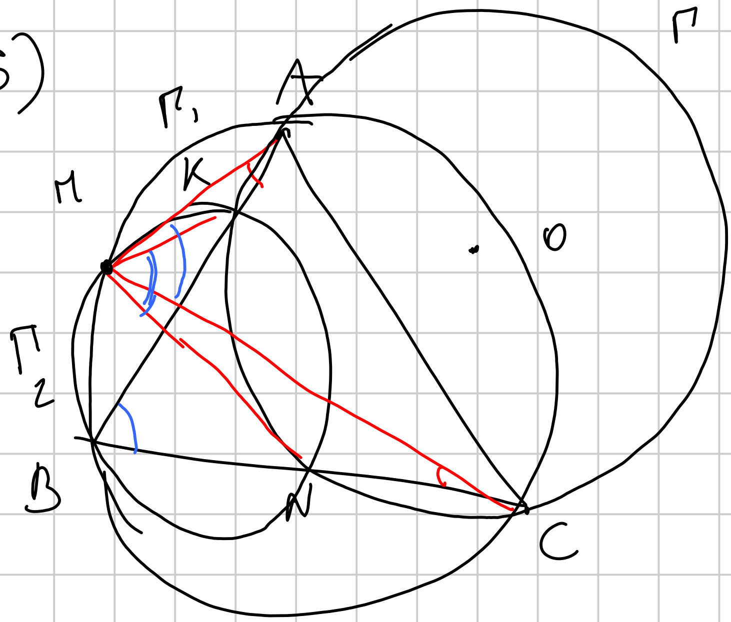
$c \perp c_0$

$a \perp a_0$

$b \perp b_0$

$T \in \Gamma \Rightarrow$ triangolo pedale è degenere $\Rightarrow$ i punti sono allineati

(IMO 1985)



Th: $OM \perp MB$

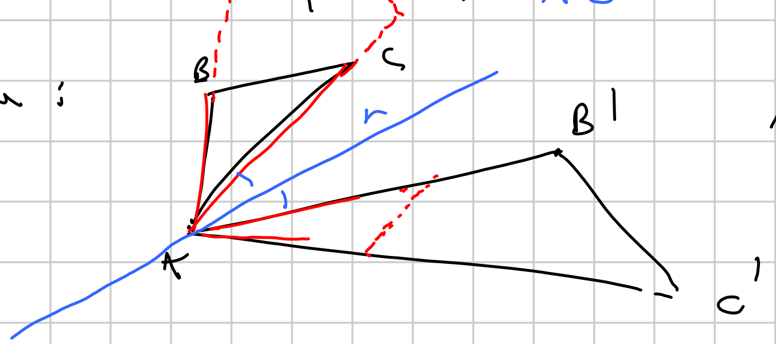
KN, MB, AC concorrono (assi radicali)

Angoli su Γ_1 $\rightsquigarrow$ $M\hat{A}K = M\hat{C}N$

Angoli su Γ_2 $\rightsquigarrow$ $K\hat{M}N = K\hat{B}N$ $\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{MAK} \sim \overset{\triangle}{MCN}$

Angoli su Γ $\rightsquigarrow$ $A\hat{B}C = A\hat{M}C$

Lemma:



$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB'C'}$

$\Rightarrow \exists$ inv. in A composta con una sim. assiale che manda $B \rightsquigarrow C'$ e C in B'

Prendo $\text{raggio}^2 = AB \cdot AC' \overset{\text{sim.}}{=} AC \cdot AB'$

Simetria wrt r fa esattamente quello che vogliamo.

Γ rimane dunque in se stessa.

1. poiché il raggio rimane lo stesso $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma$ con l'inversione.

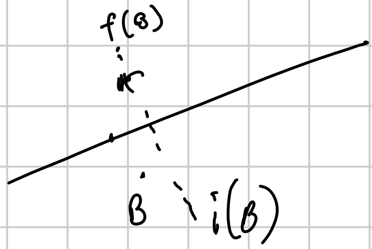
2. $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma$ con la riflessione $\Rightarrow O \in r$

B dove va? $B = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$

$$i(B) = i(\Gamma_1) \cap i(\Gamma_2) = i(A)i(C) \cap i(K)i(N)$$

$$f(B) = f(A)f(C) \cap f(K)f(N) = NK \cap CA \in MB$$

$\Rightarrow f(B)$ e' su MB, ma anche $i(B) \in AB$



$\Rightarrow i(B)f(B) \cap r = M$

$i(B)f(B) \perp r$

$r \perp i(B)M = BM$

$OM \perp BM$

$\square$.

$i(P)$ = immagine di P senza l'inversione

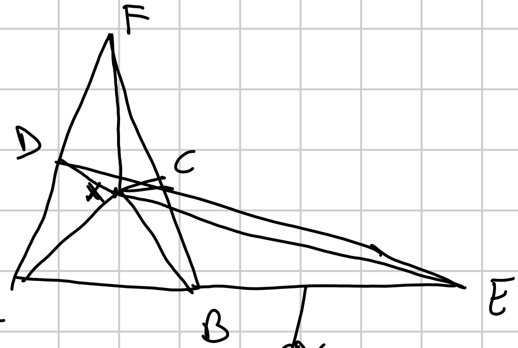
$f(P)$ = immagine di P senza inversione + riflessione

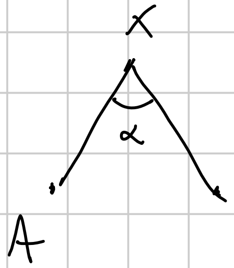
ROBA DI VERTECHI: http://veluca.altervista.org/olimpiadi/

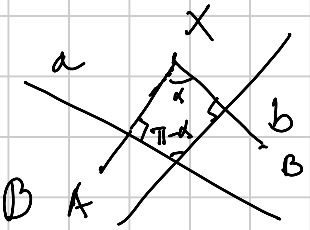
Yufei Zhao (billzaho su ML). (fonte degli esercizi)

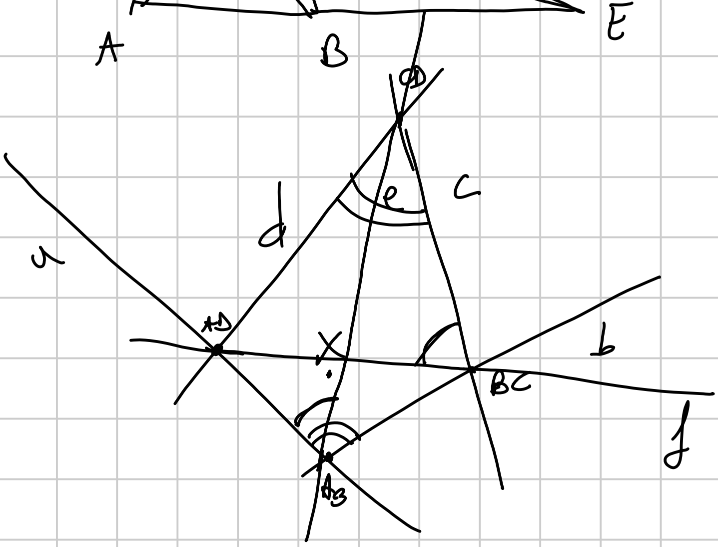
14. ABCD quadrilatero convesso. $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$

Esiste X dentro il quad. t.c. $\widehat{AXE} = \widehat{CXF}$. Th: $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$







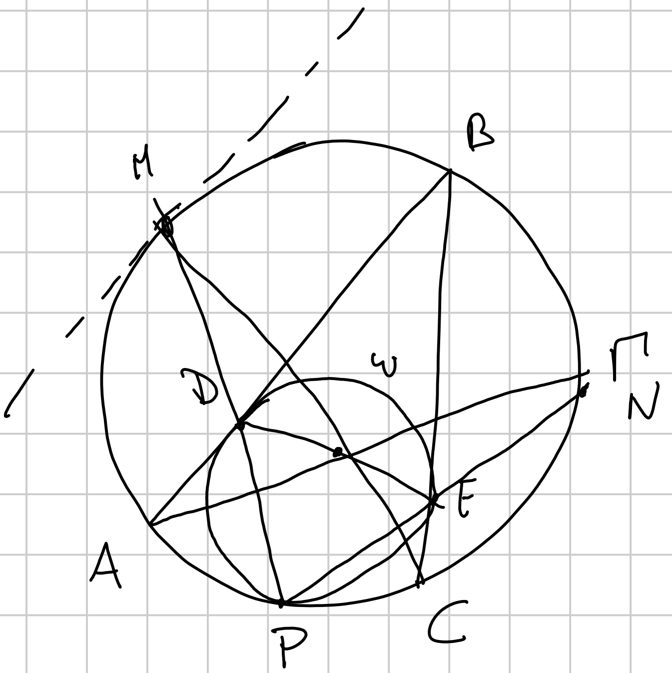


$\widehat{AXE} = 180° - \widehat{CXF}$

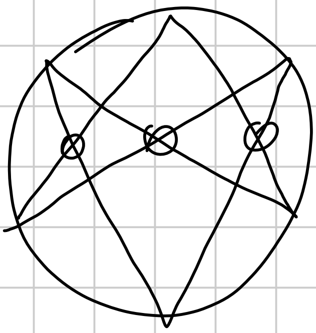
$\Downarrow$ X interno + ciclicità

$\widehat{AXB} = 180° - \widehat{CXD}$

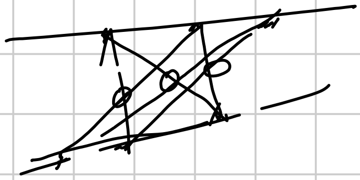
□.



Th: p.to medio di DE è l'incentro di ABC



Pappo-Pascal



Pascal: D, E, $CM \cap AN$ sono allineati

M, N punti medi degli archi $\Rightarrow$ CM e AN sono bisettrici in ABC $\Rightarrow$ $CM \cap AN = I$

D, I, E allineati. Considero DBE, isoscele, dunque I è punto medio di DE.

ABCD q. convesso $BC = AD$ ma $BC \not\parallel AD$

$E \in BC$ $F \in AD$ t.c. $BE = DF$.

$AC \cap BD = P$, $BD \cap EF = Q$, $EF \cap AC = R$

Considero PQR al variare di E ed F. Dimostrare che tutti i circocerchi hanno un punto in comune diverso da P