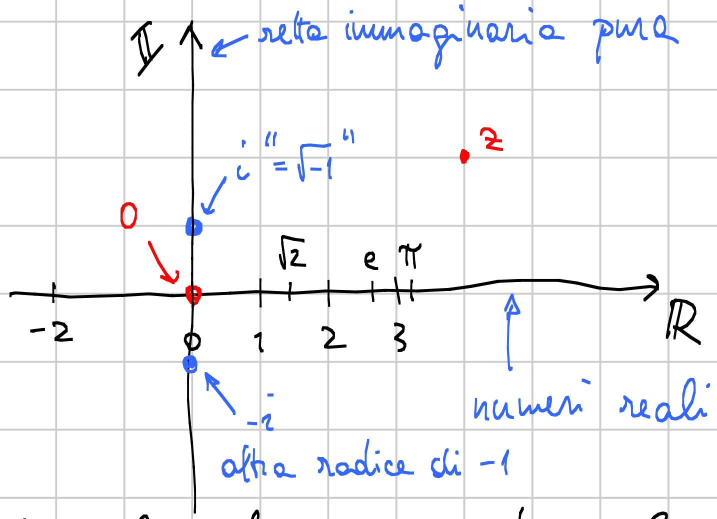
- Numeri complessi

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$



$\sqrt{2}$ $\quad x^2 = 2$

$-\sqrt{2}$

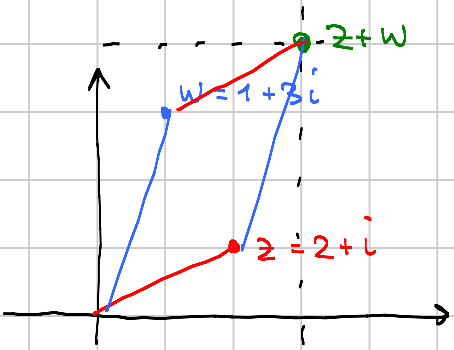
$\mathbb{C} \ni z = x + iy$ con x, y numeri reali che rappresentano le coordinate di z sul piano

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \longleftrightarrow x + iy$$

- Operazioni:
  - somma: componente per componente = come i vettori
    = regola del parallelogramma



$$z + w = 2 + i + 1 + 3i = 3 + 4i$$

  - prodotto: si esegue formalmente sulle espressioni $x + iy$
    equivale a moltiplicare le lunghezze e sommare gli angoli

$$z \cdot w = (2+i)(1+3i) = 2 + i + 6i + 3i^2 = 2 + i + 6i - 3 = -1 + 7i$$

$|z| = \sqrt{5} \qquad |w| = \sqrt{10} \qquad |zw| = \sqrt{50}$

$$zw = (x+iy)(s+it) = xs - yt + i(ys + xt)$$

$$|zw| = \sqrt{(xs-yt)^2 + (ys+xt)^2}$$

$$= \sqrt{x^2s^2 + y^2t^2 - 2\cancel{xs}yt + y^2s^2 + x^2t^2 + 2\cancel{y}sxt}$$

$$= \sqrt{x^2s^2 + y^2t^2 + y^2s^2 + x^2t^2} = \sqrt{(x^2+y^2)(s^2+t^2)} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{s^2+t^2} = |z||w|$$

$\mathrm{Arg}(z)$ angolo che il "vettore" z forma con il semiasse reale positivo

$z = x + iy$

$\mathrm{tg}\,\mathrm{Arg}(z) = y/x \qquad \mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos \mathrm{Arg}(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\cos \mathrm{Arg}(z \cdot w) = \frac{xs - yt}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{s^2+t^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos \mathrm{Arg}(z)} \cdot \underbrace{\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}}_{\cos \mathrm{Arg}(w)} - \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}(z)} \underbrace{\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}}_{\mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}(w)}$$

$$= \cos \mathrm{Arg}\, z \cos \mathrm{Arg}\, w - \mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}\, z\, \mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}\, w = \cos(\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w)$$

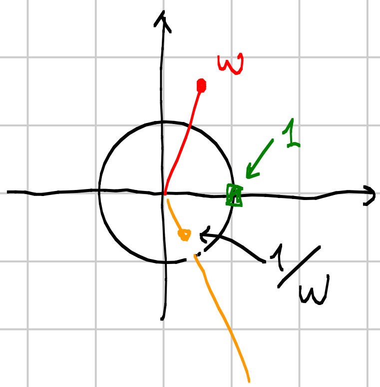
$$\mathrm{sen}\,\mathrm{Arg}(z \cdot w) = \ldots = \mathrm{sen}(\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)}$$

★ Bonus : $(n^2+m^2)(a^2+b^2)$ è sempre somma di due quadrati

• Divisione, reciproco

$z/w = z \cdot \dfrac{1}{w} \qquad w \neq 0 \qquad$ chi è $\dfrac{1}{w}$?

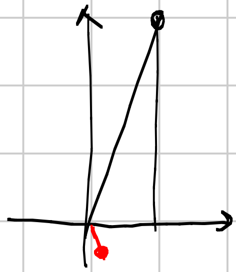


$\dfrac{1}{w}$ è un complesso tale che $w \cdot \dfrac{1}{w} = 1$

$\mathrm{Arg}\, \dfrac{1}{w} = -\mathrm{Arg}\, w \qquad \left|\dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{1}{|w|}$

$w = s + it \qquad \frac{1}{w} = s' + it'$

$$s' = \cos \operatorname{Arg} \frac{1}{w} \cdot \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{\cos(-\operatorname{Arg} w)}{\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{\cos \operatorname{Arg} w}{\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{s}{s^2+t^2}$$



$$t' = -\frac{\operatorname{sen} \operatorname{Arg} w}{\sqrt{s^2+t^2}} = -\frac{t}{s^2+t^2}$$

$w = 1+3i \qquad |w| = \sqrt{10} \qquad \cos \operatorname{Arg} w = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \operatorname{sen} \operatorname{Arg} w = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$s' = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10} \qquad t' = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{10}$

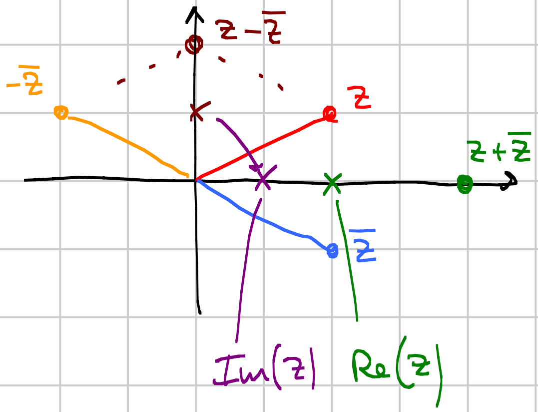
- Coniugio

$z = x + iy \qquad \bar{z} := x - iy \qquad z\bar{z}$ è sempre reale ≥ 0

$z\bar{z} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad \boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}$

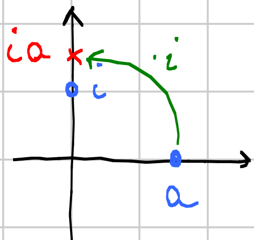
$z + \bar{z} = 2x \qquad \boxed{x =: \operatorname{Re}(z) := \frac{z+\bar{z}}{2}}$ parte reale

$z - \bar{z} = 2iy \qquad \boxed{y =: \operatorname{Im}(z) := \frac{z-\bar{z}}{2i}}$ parte immaginaria



se $u \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arg}(u) = 0$

- $a \in \mathbb{R} \qquad a \cdot i$



- moltiplicare per un reale = omotetia di centro 0
- moltiplicare per i = rotazione di 90°

POLINOMI

grado = deg p

coefficienti di solito numeri $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (o polinomi)

$$p(x) = a_n x^{\textcircled{n}} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

termine noto

coeff direttore (se $=1$ il pol. è MONICO)

x non è un numero, ma un simbolo può essere sostituito con qualunque oggetto di cui si sappiano fare somme e prodotti

pol. a coeff. reali

I polinomi hanno una struttura algebrica $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

- Prodotti notevoli

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\boxed{1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}}$$

serie geometrica

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots + x^2 - x + 1)$$

- identità di Sophie Germain

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

- $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

$(\mathbb{Z}[x])[y]$ $\quad (x-1)y^2 - (x^2+2)y + (x+2) = xy^2 - x^2y - y^2 - 2y + x + 2$

- Divisione (con resto)

$4x^3 - 3x + 7 = p(x)$ $\qquad$ $a(x) = 2x + 1$

$(2x+1)\cdot 2x^2 = 4x^3 + 2x^2$ $\qquad$ $p(x) - a(x)\cdot 2x^2 = -2x^2 - 3x + 7$

$(2x+1)(-x) = -2x^2 - x$ $\qquad$ $p(x) - a(x)(2x^2 - x) = -2x + 7$

$(2x+1)(-1) = -2x - 1$ $\qquad$ $p(x) - a(x)\underbrace{(2x^2 - x - 1)}_{q(x)} = 8 = r(x)$

$q(x) = 2x^2 - x - 1$ $\qquad$ $a(x) = 2x + 1$

$a(x)q(x) = 4x^3 - 3x - 1 = p(x) - r(x)$ $\qquad$ $\boxed{p(x) = a(x)q(x) + r(x)}$

$\deg r < \deg a$

$\exists!\ q(x), r(x)\ \ \deg r < \deg a \ : \ p(x) = a(x)q(x) + r(x)$

$p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$ $\qquad$ $a(x) = 2x + 1$

$\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ $\qquad$ $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
4 & -3 & 0 & 7 & 2 & 1 & \\
\hline
4 & 2 & & & 2 & -5/2 & 5/4 \\
 & -5 & 0 & 7 & & & \\
 & -5 & -5/2 & & & & \\
 & & 5/2 & 7 & & & \\
 & & 5/2 & 5/4 & & & \\
 & & & 23/4 & & &
\end{array}
$$

$\in \mathbb{Q}[x]$

$q(x) = 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}[x]$

$r(x) = 23/4$

$(96, 60) = 12$

$$
\begin{array}{c|c}
96 & 60 \\
\hline
60 & 36 \\
36 & 24 \\
24 & 12 \\
\hline
12 & 0
\end{array}
$$

- Algoritmo euclideo per MCD

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = p(x)$ $\qquad$ $q(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 3/2 & 1/2 & & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \\
 & 3/2 & 5/2 & 1 & & & \\
 & 3/2 & 9/4 & 3/4 & & & \\
 & & 1/4 & 1/4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
p(x) & q(x) \\
q(x) & r(x) \\
r(x) & 0
\end{array}
$$

MCD non è unico

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ è un $MCD(p, q)$

$x + 1$ è un $MCD(p, q)$

è unico a meno di fattori di deg 0

$$
\begin{array}{ccc|cc}
2 & 3 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
2 & 2 & & 8 & 4 \\
& 1 & 1 & & \\
& 1 & 1 & & \\
& & 0 & &
\end{array}
$$

$p(x) = 2 \qquad \deg p = 0$

$q(x) = 0 \qquad \deg q = -\infty$

- Fattorizzazione

scrivere $p(x)$ come prodotto di polinomi più piccoli "minimi" ($=$ irriducibili)

$18 = 9 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \qquad 18 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

la fattorizzazione unica vale per tutti gli insiemi di polinomi che voi troverete $\mathbb{Z}[x], \dots, \mathbb{C}[x], \dots \mathbb{R}[x][y], \dots$

y^3

$$x^7 - 2x^4 - 2x^3 + 4 = (x^3 - 2)(x^4 - 2) \qquad \mathbb{Z}[x] \text{ o } \mathbb{Q}[x]$$

$$= (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$$

$$= (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2}) \qquad \mathbb{R}[x]$$

$$= (x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}\,\xi)(x - \sqrt[3]{2}\,\bar{\xi})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2})$$

dove $\mathbb{C} \ni \xi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

- Alla fine su $\mathbb{C}$ si riesce sempre ad arrivare a $\deg p$ fattori di grado 1 $\in \mathbb{C}[x]$ (thm fond algebra)

- Su $\mathbb{R}$ non devono restare fattori di grado > 2 (nell'ipotesi che $p \in \mathbb{R}[x]$) (esercizio)

- Su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Z}$ si arriva alla stessa fattorizzazione (a meno di costanti) (nell'ipotesi che $p \in \mathbb{Z}[x]$) (lemma di Gauss)

- Vediamo nei dettagli

- Thm di Ruffini

$\mathbb{C}$ $\exists \alpha$ radice di p $\iff$ $p(\alpha)=0$ ovvero $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0$

Se α è radice di p, $(x-\alpha)$ divide p

$a(x) = (x-\alpha)$ $\qquad$ $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$

$0 = p(\alpha) = \underbrace{\underset{0}{a(\alpha)}\, q(\alpha)} + r(\alpha) \Rightarrow r(\alpha) = 0$

$\deg r < \deg a = 1$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow r(x) = c \\ r(\alpha) = 0 \end{array}\right\} r(x) = 0$

★ Thm fond algebra : $p \in \mathbb{C}[x]$ $\quad \exists \alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$
+ induz + Ruffini
$\Rightarrow p$ si fattorizza in $\deg p$ polinomi di grado 1

- Su $\mathbb{R}$

$z, w \in \mathbb{C}$ $\quad \boxed{\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}}$ $\quad \boxed{\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}}$ (verifica per casa)

$p \in \mathbb{R}[x]$ thm.f.alg. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ $p(\alpha) = 0$

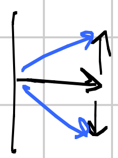
$0 = \bar{0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0} = \overline{a_n\alpha^n} + \dots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0}$
$= \bar{a}_n\bar{\alpha}^n + \dots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 = a_n\bar{\alpha}^n + \dots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = p(\bar{\alpha})$

Ho scoperto che se α è una radice, anche $\bar{\alpha}$ lo è
- $\alpha \in \mathbb{R}$ non dice niente però $(x-\alpha) \mid p$ per Ruffini
- $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ $\bar{\alpha}$ è radice $(x-\alpha)$ e $(x-\bar{\alpha}) \mid p$ " "

$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{\mathbb{R}}x + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{\mathbb{R}} = x^2 - \underset{2\mathrm{Re}(\alpha)}{a}x + \underset{|\alpha|^2}{b} \in \mathbb{R}[x]$

I fattori di grado 2 irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono sempre fatti così

$x^2 + ax + b \qquad x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$



~ Conseguenza : $p \in \mathbb{R}[x]$ $\deg p$ dispari
$\Rightarrow$ p ha almeno una radice reale

- Lemma di Gauss
  $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad r$ numero primo

  Se r divide tutti i coefficienti di $p(x)q(x)$
  allora r divide tutti i coefficienti di p o tutti quelli di q

Dim $\quad p(x) = p_0(x) + p_1(x)$ $\quad$ tutti i coeff di $p_0(x)$ sono
$\quad q(x) = q_0(x) + q_1(x)$ $\quad$ multipli di r e nessun coeff
di $p_1(x)$ è multiplo di r

$$p(x)q(x) = \underbrace{p_0(x)q_0(x) + p_0(x)q_1(x) + q_0(x)p_1(x)}_{\text{tutti i coeff multipli di } r} + p_1(x)q_1(x)$$

almeno il termine direttivo non è $\equiv 0 \pmod r$

trovo che il coeff corrispondente di $p(x)q(x)$ non è multiplo di r $\longrightarrow$ assurdo a meno che uno tra p_1 e q_1 sia nullo ovvero uno tra p e q abbia tutti i coeff divisibili per r.

★ $p \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad p(x) = a(x)b(x)$ $\quad a, b \in \mathbb{Q}[x]$
tesi: allora $\exists$ fattorizzazione $p(x) = \tilde{a}(x)\tilde{b}(x)$ $\quad \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}[x]$

Dim $\quad$ Sia m il mcm di tutti i denominatori dei coeff di a
Sia n il mcm di tutti i denominatori dei coeff di b

$a(x) = \frac{1}{m} a'(x)$ $\quad b(x) = \frac{1}{n} b'(x)$ $\quad$ con $a', b' \in \mathbb{Z}[x]$

$p(x) = \frac{a'(x)b'(x)}{mn} \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad$ ciascuno dei coeff di $a'(x)b'(x)$ deve essere divisibile per mn

r primo $\quad r \mid mn$ $\quad$ + Lemma di Gauss $\Rightarrow$ a' o b' ha coeff divisibili per r. Ad esempio è a'

$$p(x) = \frac{\frac{a'(x)}{r} \cdot b'(x)}{mn/r} \in \mathbb{Z}[x]$$ prendo r' primo $r' \mid \frac{mn}{r}$ + L.G. ...

per induzione sul numero di fattori primi di mn

$$p(x) = \underbrace{\frac{a'(x)}{\prod r_i}}_{\in \mathbb{Z}[x]} \cdot \underbrace{\frac{b'(x)}{\prod r'_i}}_{\in \mathbb{Z}[x]} = \tilde{a}(x) \cdot \tilde{b}(x)$$

★ Se $p \in \mathbb{Z}[x]$ ha una radice razionale $\alpha = \frac{a}{b}$, $(a,b)=1$ allora $a \mid$ il termine noto e $b \mid$ il termine direttivo

$p(\alpha) = 0$ $\quad (x-\alpha) = \left(x - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b}(bx - a)$ $\quad bx - a \mid p$ su $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = (bx-a)(c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0) = bc_n x^{n+1} + \dots - ac_0$$

- Identità polinomi

$p, q \in \mathbb{C}[x]$ $\quad p(x_i) = q(x_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, n+1$

$\mathbb{C} \ni x_i$ distinti $\quad n = \max(\deg p, \deg q)$

Allora $p = q$

$r(x) = p(x) - q(x)$ $\quad r(x_i) = 0$ $\quad i = 1, 2, \dots, n+1$

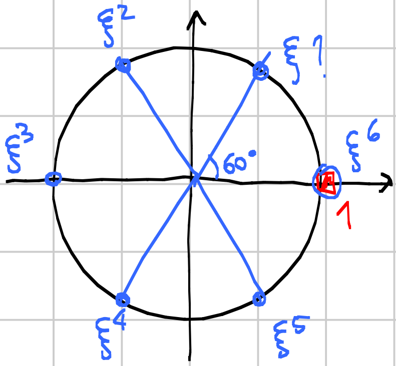
$\deg r \leq n$ $\quad$ ma r ha $n+1$ radici distinte,

quindi $\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}_{\deg\, n+1} \mid \underbrace{r(x)}_{\deg\, \leq n}$

$\Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow p = q.$

- RADICI UNITÀ

$x^n = 1$ $\quad \cancel{x = 1}$ $\quad x^n - 1 = 0$ $\rightarrow$ n radici complesse distinte



$n=6 \quad x\in\mathbb{C} : x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = 1$

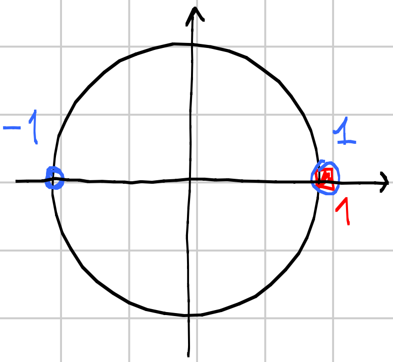
$1 = |1| = |x^n| = |x|^n \Rightarrow |x| = 1$

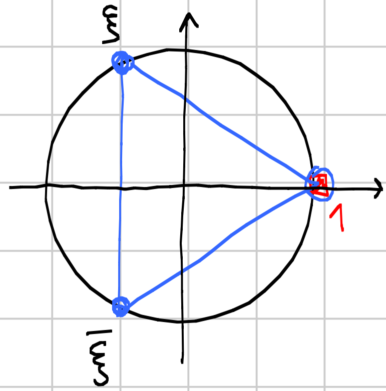
$\xi = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ è soluzione di $x^6-1=0$

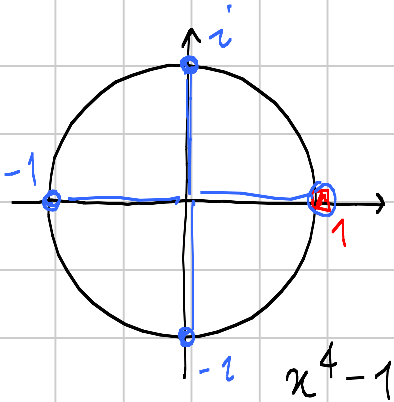
$\xi^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\xi^2)^6 = \xi^{12} = (\xi^6)^2 = 1^2 = 1$

$(\xi^m)^6 = (\xi^6)^m = 1^m = 1$

★ In generale le radici di x^n-1 sono numeri complessi che stanno sui vertici di un n-agono regolare di raggio 1 e che ha un vertice in 1







x^2-1

x^3-1

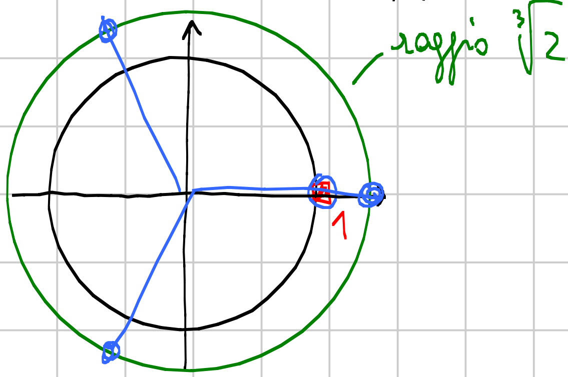
$1, \xi, \bar{\xi} \qquad \xi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^3-1 = (x-1)(\underbrace{x^2+x+1})$

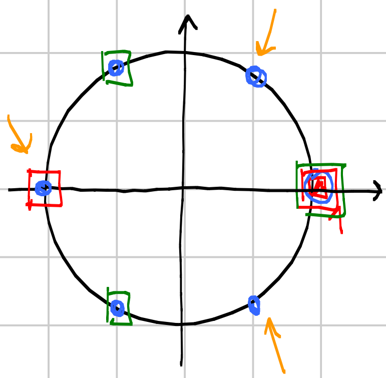
$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$

$1, -1, i, -i$

$x^3-2 = (x-\sqrt[3]{2})(x-\xi\sqrt[3]{2})(x-\bar{\xi}\sqrt[3]{2})$



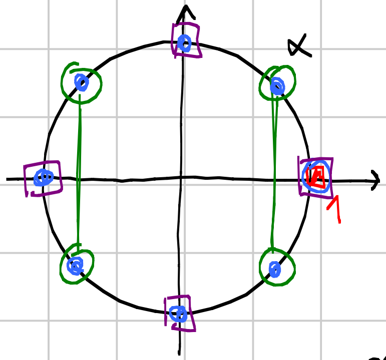
$x^3+1=0$



$x^6-1 = (x^3-1)(\qquad) = (x-1)(x^2+x+1)(\qquad)$

$= (x^2-1)(\qquad) = (x-1)(x+1)(\qquad)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$



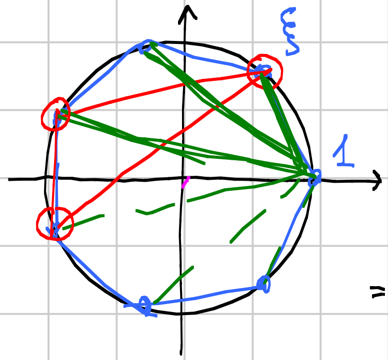
$$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$(x-\alpha)(x-\bar\alpha)=x^2-2\mathrm{Re}\,x+|\alpha|^2=x^2-\sqrt2\,x+1$$

$$x^4+1=(x^2-\sqrt2\,x+1)(x^2+\sqrt2\,x+1)$$

quindi non si fattorizza su $\mathbb{Z}[x]$

Esercizio



Q: prodotto dei lati del triangolo

$$\text{prod}=\sqrt{\prod 6 \text{ corde verdi}}$$

$$=\sqrt{|\xi-1|\,|\xi^2-1|\,|\xi^3-1|\,|\xi^4-1|\,|\xi^5-1|\,|\xi^6-1|}$$

$$(\xi-1)(\xi^6-1)=(\xi-1)(\overline{\xi-1})=|\xi-1|^2=|\xi-1|\,|\xi^6-1|$$

$$\text{prod}=\sqrt{(\xi-1)(\xi^2-1)(\xi^3-1)(\xi^4-1)(\xi^5-1)(\xi^6-1)}=\sqrt{p(1)}=\sqrt7$$

dove $p(x)=\dfrac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+\dots+x+1 \qquad p(1)=7$

$$x^7-1=(x-\xi)(x-\xi^2)\cdots(x-\xi^6)(x-1)$$

RELAZIONI RADICI COEFFICIENTI

$p\in\mathbb{C}[x] \qquad p(x)=a_nx^n+\dots \qquad q(x)=\dfrac{p(x)}{a_n}$ è monico e ha le stesse radici

$$q(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

$\alpha_1\dots\alpha_n\in\mathbb{C}$ sono le radici

$$=x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)x^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\dots\alpha_2\alpha_n+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}$$
$$-\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\,x^{n-3}+\dots\pm\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$$

★ I coefficienti di q sono delle particolari funzioni simmetriche delle radici

— Ogni polinomio simmetrico di $\alpha_1 \dots \alpha_n$ si può scrivere in funzione di questi coefficienti

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 7$$

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} = \frac{\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \dots + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = -\frac{b_1}{b_0} = \frac{3}{7}$$

$$b_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$
$$b_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$$
$$b_1 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$
$$b_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

x, y $\qquad x + y = 7 \qquad xy = 5 \qquad x, y = ?$

$T^2 - (x+y)T + xy$ ha per radici x, y

$$T^2 - 7T + 5$$

$$x, y = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$