A3 BASIC -Moria-

Titolo nota 10/09/2010

- Identità
- Successioni
- Eq funzionali.

Oss: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

$$\begin{aligned} &\shortparallel \\ |a+ib|^2 \cdot |c+id|^2 &= |(a+ib)(c+id)|^2 \\ &= |(ac-bd)+i(bc+ad)|^2 \end{aligned}$$

Es: $p \in \mathbb{R}[x]$: $P(x) \geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \quad \exists\, q, r \in \mathbb{R}[x]$:

$p(x) = q(x)^2 + r(x)^2$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \quad (\text{con } n \text{ dispari})$$

$$\shortparallel$$

$$x^n - (-y)^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\shortparallel$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n-2 + n-1 + n$$

$$\frac{n}{2}(n+1) \qquad \frac{n+1}{2}$$

Se n è dispari $\quad \frac{n-1}{2}(n+1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dim 1: per induz.

Dim 2: $$(n+1)^3 - 1 = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + 3i + 1$$

$$= 3\sum i^2 + 3\underbrace{\sum i}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n$$

$$\sum i^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3}$$

Oss $$p(m) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$p(m)$	1	5	14	30	55	91	...
m^2		4	9	16	25	36	...
$2m+1$			5	7	9	11	...
				2	2	2	2 ...

$$\deg(p(m+1) - p(m)) \leq \cancel{\deg p - 1}$$

Dim 3:

$$\sum i^2$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
J \uparrow & & & & & & \\
 & & & & & 5 & \dots \\
 & & & & 4 & 4 & \dots \\
 & & & 3 & 3 & 3 & \dots \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
\hline
 & & & & & & \rightarrow i
\end{array}$$

$$\sum_{J=1}^{n}\left(\sum_{i=J}^{n} J\right) = \text{SOMMA FATTA} \times \text{RIGHE}$$

$$= \sum_{J=1}^{n} J(n+1-J) = (n+1)\sum_{J=1}^{n} J - \sum J^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{i} J\right) = \text{SOMMA FATTA} \times \text{COLONNE}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$$

$$(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{1}{2}\sum j^2 + \frac{n(n+1)}{4}$$

Oss: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$

$$\underbrace{1}_{} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{} + \dots$$

$$\geq 1 + \tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{4} + 4\cdot\tfrac{1}{8} + \dots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \dots \longrightarrow +\infty$$

SUCCESSIONI

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n & \text{(ricorrenza)} \\ a_0 = 3 & \text{(dato iniziale)} \end{cases}$$

Succ di Fibonacci: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

$$a_{n+1} = 2n\, a_n + a_{n-5}$$

Progr aritm e geometriche

$a_n = a + dn \qquad\qquad a_n = a_{n-1} + d$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a + dn = aN + d\sum_{n=1}^{N} n = aN + d\,\frac{N(N+1)}{2}$$

$a_n = a r^n \qquad\qquad \begin{cases} a_n = r\, a_{n-1} \\ a_0 = a \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{n=1}^{N} a r^n$$

$$a \sum r^n = a(1 + r + r^2 + \dots + r^N)$$

$$a r \sum r^n = a(\quad r + r^2 + \dots + r^{N+1})$$

$$a \cdot \sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{a(1 - r^{N+1})}{1-r} \qquad \text{se } r \neq 1$$

Se $r = 1 \qquad a_n = a \qquad \sum_{n=1}^{N} a_n = aN$

Oss! se $r < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-r^{N+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b \\ x_0 \text{ fissato} \end{cases}$

x_0

$x_1 = a x_0 + b$

$x_2 = a x_1 + b = a(a x_0 + b) + b$

$\quad = a^2 x_0 + ab + b$

$\vdots$

$x_n = a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \dots + b$

$\quad = a^n x_0 + b\,\frac{a^{n-1} - 1}{a-1}$

Ricorrenze da due termini precedenti:

Esercizio: $a_1 > a_0 + 1 > 0$ fissati.

$a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1$, ---

Dimostrare che $a_{100} > 2^{99}$

$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$, $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$, ---

$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98}) = \ldots = 2^{99}(a_1 - a_0)$

$\Rightarrow a_{100} = \underset{\geq 0}{a_{99}} + 2^{99}(a_1 - a_0) > 2^{99} \cdot 1$

In generale:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_1 \end{cases} \text{fissati} \qquad x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$$

Formula chiusa per x_n.

Dimentichiamo i dati iniziali.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ verificano, dati $A, B \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{A a_n + B b_n\}$ verifica la ricorrenza.

$$A a_{n+1} + B b_{n+1} \overset{?}{=} \alpha(A a_n + B b_n) + \beta(A a_{n-1} + B b_{n-1})$$

$x_n = r^n$ verifica la ric per qualche n?

$r^{n+1} = \alpha r^n + \beta r^{n-1} \iff r^2 - \alpha r - \beta = 0$

$r = \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$ radici.

$A r_1^n + B r_2^n$ verifica la ricorrenza.

$$\begin{cases} x_0 \\ x_1 \end{cases} \text{fissati} \qquad x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$$

$$\begin{cases} x_0 = A + B \\ x_1 = A r_1 + B r_2 \end{cases} \Rightarrow \text{trovo } A \text{ e } B.$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} \end{cases}$$

$x_3 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$x_4 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$
$\vdots$

Vale se $r_1 \neq r_2$

Se $r_1 = r_2$ $\begin{cases} x_0 = A+B \\ x_1 = r_1 (A+B) \end{cases}$

Provare $n \cdot r^n = x_n$

Se $r_1 = r_2 = r$

$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$

$x^2 - \alpha x - \beta = (x-r)^2$

$\alpha = 2r \quad \beta = -r^2$

$x_{n+1} = 2r x_n - r^2 x_{n-1}$

$n r^n = x_n \longrightarrow (n+1) r^{n+1} = 2r^{n+1} \cdot n - r^2 (n-1) r^{n-1}$

$(n+1) r^{n+1} = 2n r^{n+1} - (n-1) r^{n+1}$

$A r^n + B n r^n$ sono sol.

$$\begin{cases} x_0 \\ x_1 \end{cases} \text{fissati}$$
$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$$

$x_0 = A$
$x_1 = A r + B \cdot r$ $\Rightarrow$ trovo A e B.

Esempio $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \end{cases}$

① Trovo le radici di $x^2 - 3x + 2 = 0$
Sono $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$.

② Deduco che $A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$ è sol. della ricorrenza

③ Impongo i dati iniziali

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = A + 2B \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 - B \\ 2 = 1 + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

La succ che verifica il dato iniziale è
2^n.

Esempio (numeri di Fibonacci)

Succ di Fibonacci: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

$x^2 - x - 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$$

Esercizio: vedere perchè la formula esplicita, pur avendo coeff compl., restituisce numeri reali

Esercizio:

n Bambini in riga.

Permutazioni in cui ogni bambino dista al + 1 dalla sua posiz originale?

a_n //

0

1

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$a_3 = 3$

$n = 3$

1	2	3
1	3	2
2	1	3

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

ultimi 2 si scambiano.

ultimo rimane fermo

$a_n = (n+1)$-mo numero di Fibonacci

Esercizio: bambini in cerchio.

EQUAZIONI FUNZIONALI

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ (EQ DI CAUCHY)

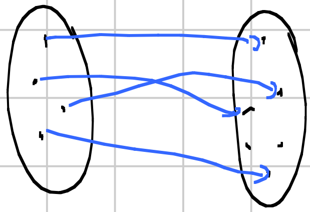
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

$a(x+y) = ax + ay$

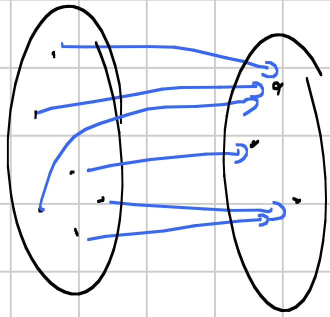
Iniettività, surgettività, ...

f iniettiva $\quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

f surgettiva $\quad \forall y \in Y \quad \exists x : f(x) = y$



f biunivoca $\Leftrightarrow$ iniett e surg.



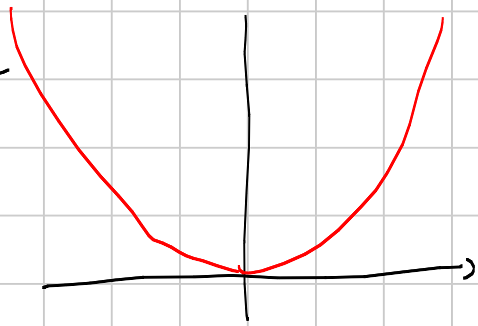
Si può invertire

Esempi: $\quad f(x) = x$ biiettiva

$f(x) = x^2$

$\downarrow$

non è iniettiva
non è surg.



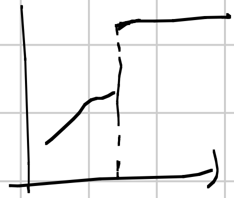
$x^2 \big|_{(0,+\infty)}$ è iniettiva

Come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è surg.

$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è biunivoca.

f crescente (strett) $\Leftrightarrow$ $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ ($<$, $<$)

Oss: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett crescente è iniettiva.



Esercizio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescenti t.c.

$$f(f(x)) = x .$$

Dim: Senza hp di crescenza

$0 \to 1 \quad 1 \to 0$

$0.5 \to 7 \quad 7 \to 0.5$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(x) = x$ verifica

Supponiamo per assurdo esista un'altra f

- $f(x) > x$ oppure $f(x) < x$

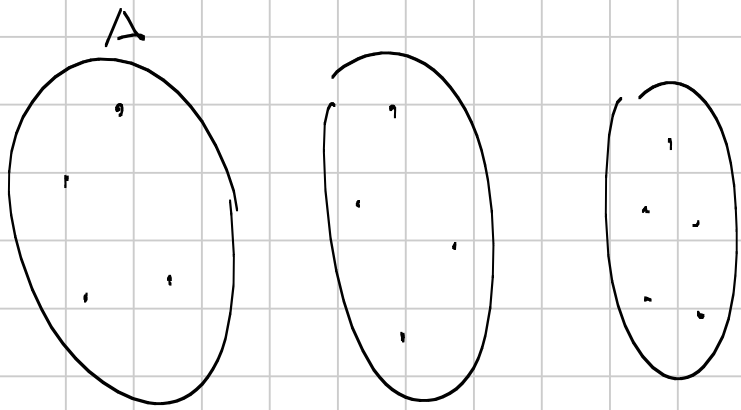
$$\Downarrow$$

$$\underbrace{f(f(x))}_{= x} > f(x)$$

contraddizione.

COMPOSIZIONE

f, g funzioni



f, g iniettive
$\Rightarrow f \circ g$ è iniett.

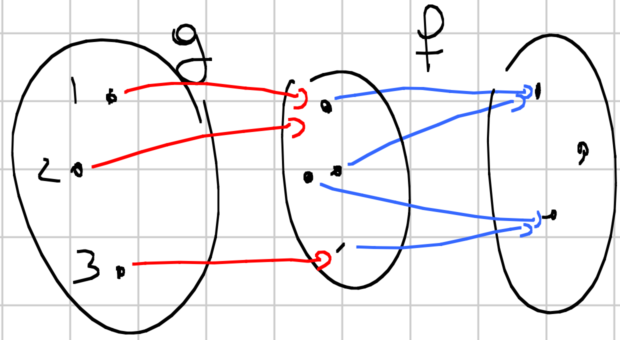
f, g surgettive $\Rightarrow f \circ g$ surg

Esercizio: f iniett g surg $\Rightarrow$ non posso conclu. dire né iniett né surgett su $f \circ g$ e $g \circ f$.

Supponiamo

$f \circ g$ surg.

$\Rightarrow f$ surg.



$f \circ g$ iniettiva

$\Rightarrow g$ iniettiva

$f_1 \circ \dots \circ f_k$ surg $\Rightarrow f_1$ è surg

iniett $\Rightarrow f_k$ è iniett

$$f(f(x)^2+5) = 2x+7$$

$\Rightarrow f$ iniett? $\quad g(y) = y^2+5 \quad f(g(f(x))) = 2x+7$

f surgett? OK $\quad \Downarrow$

f iniettiva.

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2^{n+1} + a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ (omogenea)

$\{a_n\}$ sol particolare

$$x_n = \underbrace{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\text{sol generale dell'omogenea}} + \underbrace{a_n}_{\text{sol particolare}}$$

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 14 \\ a_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2}a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

$e_n = 2^n$

① SOSTITUZIONI

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{Q}$$

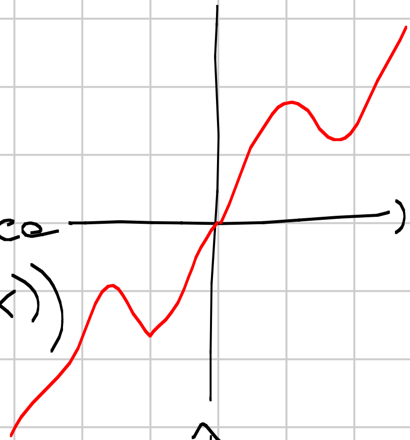
Pongo $x=0$ $y=0$:

$$f(0) = 2f(0) \implies f(0)=0$$

Pongo $y=-x$

$$0 = f(x) + f(-x)$$

$\implies$ f è DISPARI (ovvero verifica $f(-x) = -f(x)$)



f è PARI se $f(-x) = f(x)$

Oss: f dispari $\implies f(0)=0$

Esempio: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 3 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Sostituisco $y=0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = 3 \implies f(x) = 3x + \underset{\overset{\parallel}{A}}{f(0)}$$

$$= 3x + A$$

Verifica!!! $\dfrac{3x+A-3y-A}{x-y} = 3$ ok.

IMO 2008 - 4

$f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ t.c.

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$ $\forall x,y,z,w$ che verifico $wx=yz$.

① $w=x=y=z=1$

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1 \Rightarrow f(1)^2 = f(1)$$
$$\Rightarrow f(1) = 1$$

② $w=y=z=x$

$$f(x)^2 = f(x^2) \quad \forall x$$

③ $$\frac{f(w^2)+f(x^2)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$ $\forall$ .. t.c $wx=yz$

$\bar{w} = w^2$

$$\frac{f(\bar{w})+f(\bar{x})}{f(\bar{y})+f(\bar{z})} = \frac{\bar{w}+\bar{x}}{\bar{y}+\bar{z}}$$ $\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w}$ $\bar{w}\bar{x}=\bar{y}\bar{z}$

perchè $\bar{w}$, — sono positivi e quindi si può trovare w t.c $\bar{w}=w^2$, —

Sostituisco $\bar{x}=x$ $\quad \bar{w}=x \quad \bar{y}=x^2 \quad \bar{z}=1$

$$\frac{2f(x)}{f(x)^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Allora $f(x)$ risolve eq di 2° grado!

$$2f(x)(x^2+1) = 2x(f(x)^2+1)$$

$$2xf(x)^2 - 2(x^2+1)f(x) + 2x = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2+1 \pm \sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}}{2x} = \begin{cases} 1/x \\ x \end{cases}$$

$\forall x \quad f(x) = \begin{cases} o & x \\ o & 1/x \end{cases}$.

Supponiamo che esistano $a, b \neq 1$

$f(a) = a \qquad f(b) = 1/b$

(altrimenti o $f(x) = x \ \forall x$ o $f(x) = 1/x \ \forall x$)

$$\frac{f(\bar{w}) + f(\bar{x})}{f(\bar{y}) + f(\bar{z})} = \frac{\bar{w} + \bar{x}}{\bar{y} + \bar{z}} \qquad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w} \quad \bar{w}\bar{x} = \bar{y}\bar{z}$$

Sostituiamo $\bar{w} = a \quad \bar{x} = b \quad \bar{y} = ab \quad \bar{z} = 1$

$$\frac{a + 1/b}{f(ab) + 1} = \frac{a + b}{ab + 1}$$

$$f(ab) = \begin{cases} ab \\ \frac{1}{ab} \end{cases}$$

$\cancel{a} + 1/b = \cancel{a} + b \Rightarrow b = 1$ Assurdo .

$$\frac{a + 1/b}{\frac{1}{ab} + 1} = \frac{a + b}{ab + 1}$$

$$\frac{ab\,(a + 1/b)}{\cancel{ab+1}} = \frac{a + b}{\cancel{ab+1}}$$

$$a + \cancel{1/b} = \cancel{\frac{1}{b}} + \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow a = 1 \qquad$ Assurdo .

Sostituendo, si verifica l'eq.

IMO 2010 - 1

Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- Sostituiamo $x=0$

$$f(0) = f(0) \cdot \lfloor f(y) \rfloor$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 & \text{CASO 1} \\ \lfloor f(y) \rfloor = 1 \quad \forall y & \text{CASO 2} \end{cases}$$

CASO 2: $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \cdot 1$

Sostituendo $y=0$, $\quad f(x) = C \in [1, 2)$.

CASO 1: $f(0) = 0$.

Sostituiamo $x=1$

$$f(y) = f(1) \cdot \lfloor f(y) \rfloor \quad \forall y$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow f(y) = 0 \quad \forall y & \text{CASO 1.1 OK} \\ \lfloor f(y) \rfloor = \dfrac{f(y)}{f(1)} \quad \forall y & \text{CASO 1.2} \end{cases}$$

CASO 1.2:

$$f(\lfloor x \rfloor y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(1)} = f(\lfloor y \rfloor x)$$

IDEA: IL RHS È SIMMETRICO
POSSO EGUAGLIARE AL
"SIMMETRICO" DEL LHS $(x \to y \;\; y \to x)$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(\lfloor y \rfloor x)$$

Sostituiamo $x = 1/2 \quad y = 2$.

$$f(0) = 0 = f(1)$$
$$\Rightarrow f(y) = 0 \quad \forall y.$$

$$f(x) = c \in [1,2) .$$
$$c = c \cdot \lfloor \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{c} \rfloor$$

Verifica ok.

RICONDURSI A CAUCHY.

Risolviamo l'eq di Cauchy:

$$f: \boxed{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R} :$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y) .$$

Step 1: $f(0) = 0$ e f è dispari

Sostituisco $x = y = 0$ $\quad \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0)$,
cioè $f(0) = 0$

Sostituisco $-x = y$ $\quad 0 = f(x) + f(-x)$

Osserviamo:

$f(1)$ $\quad f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

$f(3) =$ (sost $x=1$ $y=2$) $f(1) + f(2)$

$= 3f(1)$

$f(-2) = -2f(1)$

Step 2: $f(mx) = m f(x) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ -

$m=1$ è vero. X induzione su m -

$$f((m+1)x) = f(x) + f(mx)$$

(sostituendo $y = mx$)

$$= f(x) + m f(x)$$

$$= (m+1) f(x) \qquad \text{ok} -$$

Step 3: $f(m) = a m \quad \forall m \in \mathbb{N}$, a cost fissata - (è $f(1)$) -

(discende da ~~Step~~ Step 2 con $x=1$)

Step 4: $f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Sostituiamo $x = \frac{m}{n}$ nello step 2.

$$f(m) = n f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{n} \overset{\text{Step 3}}{=} a\frac{m}{n}.$$

Quindi: $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = aq$ -

Sostituendo, si verifica che le funzioni lineari e nulle in 0 soddisfano e sono quindi le uniche -

Oss: $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} = \{a + b\sqrt{2}, \text{ con } a, b \in \mathbb{Q}\}$

Allora le f che soddisfano Cauchy sono di più!

$$f: a + \sqrt{2}b \longrightarrow a + 7b - \qquad x \longrightarrow Ax \text{ NO}$$

Questa verifica Cauchy -

$$a + \sqrt{2}b = a' + \sqrt{2}b' \longrightarrow \begin{matrix} a+7b \\ a'+7b' \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$a = a' \text{ e } b = b'$$

$$a - a' = \sqrt{2}(b - b')$$

Se $b - b' \neq 0 \qquad \sqrt{2} = \frac{a-a'}{b-b'} \Rightarrow$ è raz.

$b = b' \Rightarrow a = a'$.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$$

$x = a + \sqrt{2}b \qquad y = c + \sqrt{2}d$

Dobbiamo verificare

$$f(a+c+\sqrt{2}(b+d)) = f(a+\sqrt{2}b) + f(c+\sqrt{2}d)$$

$$a+c+7(b+d) = a+7b + c+7d$$

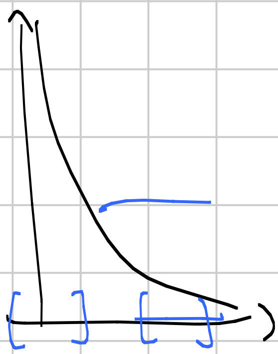
ok.

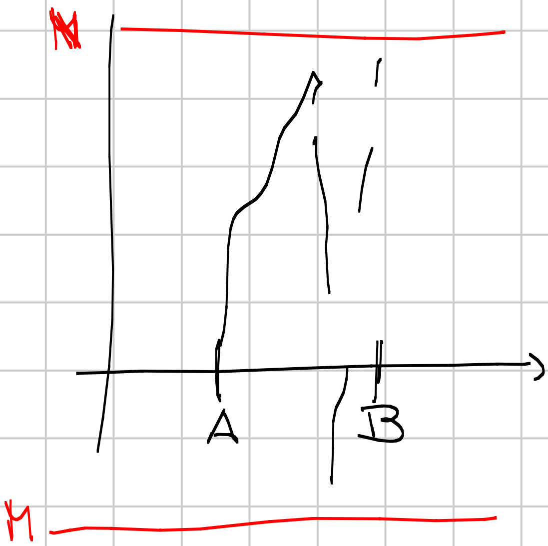
Diventa vero che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolve Cauchy è della forma $f(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{R}$ se vale almeno una delle seguenti:

1. f continua
2. f crescente.
3. f localmente lim in un Int

$\exists\ [A,B], M, N \in \mathbb{R}: \qquad M \le f(x) \le N \quad \forall x \in [A,B]$

$f(x) = 1/x$





Esempio: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ t.c.

$$f(x) f(y) = f(x+y)$$

Prendiamo il log di entrambi i membri

$$\ln_2 f(x) + \ln_2 f(y) = \ln_2 f(x+y)$$

Chiamiamo $g = \ln \circ f$

$$g(x) + g(y) = g(x+y)$$

$\Rightarrow$ (Cauchy) $g(x) = Ax$ per qualche $A \in \mathbb{R}$

$g(x) = \ln(f(x))$ $\qquad e^{g(x)} = f(x)$

$$\parallel$$

$$e^{Ax} \qquad f(x) = 2^{Ax} = e^{\ln 2 \cdot A \cdot x}$$

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona t.c.

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \, .$$

ES 10 LIBRETTO SENIOR

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x f(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \ (0)$$

Sostituiamo $x = 0$

$$f(f(y)) = \underbrace{f(0)^2 + y} \ (1) \to \text{è bigettiva}$$

$\Rightarrow$ f è bigettiva.

$\exists\, a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$.

Sostituiamo $x = a$.

$$f(f(y)) = y \qquad (2)$$

Confrontando 1 e 2, $f(0) = 0$.

In particolare per (1) $f(f(y)) = y \ \forall y$. (3).

$$x = f(z)$$

$$f(f(z) \cdot f(f(z)) + f(y)) = f(f(z))^2 + y$$

Usando (3), $f(f(z)z + f(y)) = z^2 + y$ (4)

Uguagliando (0) e (4)

$$f(f(x)x + f(y)) = \underbrace{f(x)^2 + y = x^2 + y}$$

$f(x)^2 = x^2 \implies f(x) = \pm x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Speriamo che le uniche sol siano
$f(x) = x \ \forall x$ e $f(x) = -x \ \forall x$
(è facile verificare che queste 2 funzionano)

Supponiamo che esistano $a, b \neq 0$ t.c
$f(a) = a \qquad f(b) = -b$.

Poniamo in (o) $x = a \quad y = b$.

$f(a^2 - b) \overset{?}{=} a^2 + b$

$$f(a^2-b) = \begin{cases} a^2 - b \longrightarrow \cancel{a^2} - b = \cancel{a^2} + b \Rightarrow b = 0 \quad \text{Assurdo} \\ b - a^2 \longrightarrow \cancel{b} - a^2 = a^2 + \cancel{b} \Rightarrow a = 0 \quad \text{Assurdo}. \end{cases}$$