C1 BASIC (Anér)

Titolo nota 07/09/2010

1) QUANTI SONO?

2) COSA SONO?

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad |A| = n$$

$$B = \{b_1, \dots, b_m\} \qquad |B| = m$$

$$A \times B = \{(a_i; b_j) \text{ t.c. } a_i \in A, b_j \in B\}$$

$$|A \times B| = m \cdot n$$

Th $\quad n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$

quanti divisori ha n? $\tau(n)$

Come è fatto un div. di n?

Se $d \mid n$ allora posso scrivere $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$

$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

$$\underbrace{\{0, \ldots, \alpha_1\}}_{\alpha_1+1 \text{ el.}} \times \underbrace{\{0, \ldots \alpha_2\}}_{\alpha_2+1} \times \ldots \times \underbrace{\{0, \ldots, \alpha_k\}}_{\ldots} =$$

$$= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots (\alpha_n+1)$$

---

quante funzioni ci sono da A a B?

quanti elementi ha B^n?

Se ho $f: A \to B$ allora $(f(a_1), f(a_2) \ldots, f(a_n))$ appartiene a B^n. Viceversa se prendo una n-upla $(b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_k})$ costruisco $f: A \to B$

$F(a_i) = b_{j_i}$

Le f da A a B m^n

TEST INIZIALE N° 6

$S = \{1, \dots, 2010\}$ $\quad \mathcal{P}(S) = \{X \text{ t.c. } X \subseteq S\}$

Quante sono le terne $(A, B, C) \in \mathcal{P}(S)^3$

t.c.

i) $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$

ii) $|A \cap B \cap C| = 0$

Scelgo l'el. che appartiene al $A \cap B$.
posso in 2010 modi

Posso scegliere i 3 elementi "quasi comuni" in

$2010 \cdot 2009 \cdot 2008$ modi

avendo 4^{2007} funzioni che associano a uno 2007 el.
rimasti un insieme tra A, B, C, resto del mondo

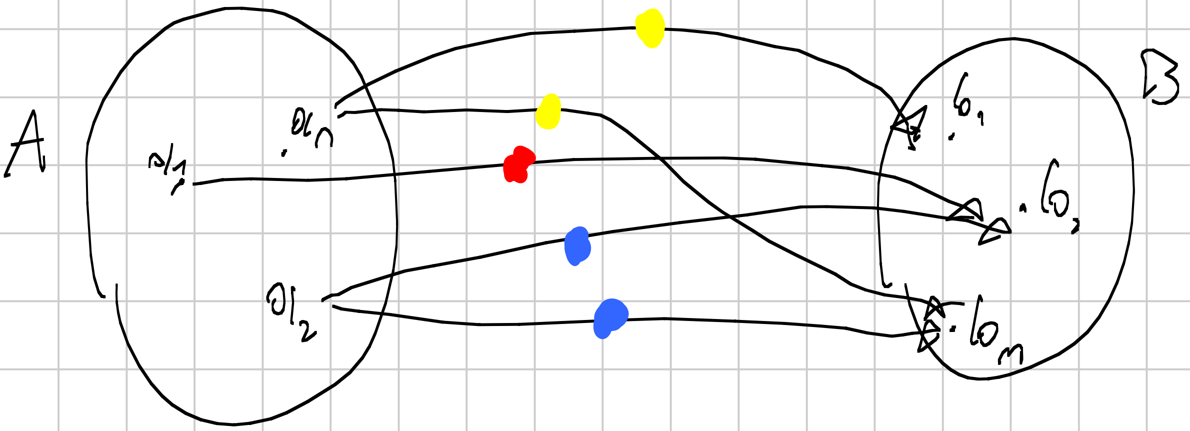
ho in tutto $2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdot 4^{2007}$ terne.

———— o ———— o ————

Quanti sottoinsiemi ha A?
quante sono le funzioni da A a $\{+, -\}$?

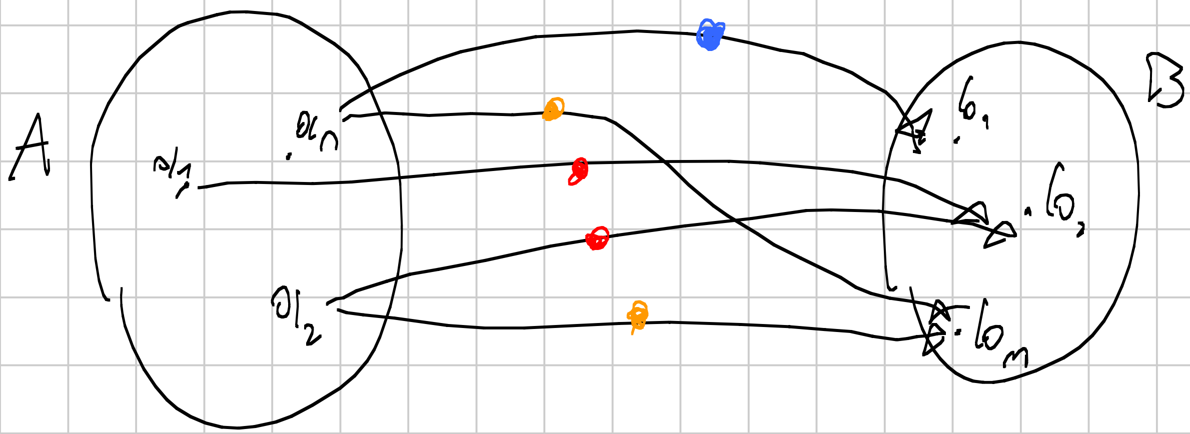
2^n.

DOUBLE COUNTING



Una relazione $R: A \to B$ è un sottoinsieme di $A \times B$.

$$n° \text{ di frecce} = \sum_{\substack{\text{colori} \\ \text{iniziali}}} n° \text{ di frecce con quel colore}$$



$$n° \text{ di frecce} = \sum_{\substack{\text{colori} \\ \text{finali}}} n° \text{ di frecce con quel colore}$$

— o — o —

DOUBLE COUNTING (VARIANTE).

1		2							3
				6				3	9
	4					15			19
			2						2
				8					8
								0	0
1	4	2	2	14	0	15	0	3	

$\underbrace{3 + 9 + 19 + 2 + 8 + 0}_{\text{Somma}_1}$

$\underbrace{1 + 4 + 2 + 2 + 14 + 0 + 15 + 0 + 3}_{\text{Somma}_2}$

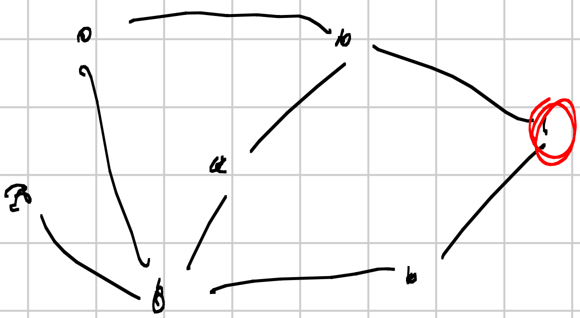
$\text{Somma}_1 = \text{Somma}_2$

GRAFI

Un grafo è una coppia di insiemi (V, E).

V contiene un po' di elementi detti VERTICI

E contiene un po' di coppie non ordin. di el. di V detti ARCHI



2 archi dal vertice ○

$\deg(\circ) = 2$

LEMMA DELLE STRETTE DI MANO

In un grafo il n° di vertici dispari è pari.

D.C. sulle coppie del tipo (vertice; arco che parte da quel vertice)

1° CONTO (PER VERTICI)

$$\sum_{v \in V} \deg(v)$$

2° conto (PER ARCHI)
sia e il numero di archi

allora ottengo $2e$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

$$\sum_{\substack{v \in V \\ \text{con grado pari}}} \deg(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{con grado dispari}}} \deg(v) = 2e$$

$$\sum_{\substack{v \in V \\ \text{con grado dispari}}} \deg(v) \leftarrow \text{è pari}$$

poiché la somma di un numero dispari dispari di numeri dispari è dispari, l'ultima sommatoria deve avere un numero pari di addendi.

— o —

TEST INIZIALE 7

Grafo su 2010 vertici, metà hanno grado 4 e metà grado 5. È possibile? NO

perché ...

— o —

Dato un grafo G con almeno un arco dim. che posso dividere i vertici di G in 2 insiemi V_1 e V_2 tali che la maggior parte dei archi vadano da una parte all'altra.

v è il numero di vertici

e è il num. di archi

Faccio la media di tutte le bipartizioni

Le bipartizioni sono 2^v, sarà il denominatore

Mi serve $\sum_{\text{bipartizioni}}$ n° di archi da una parte all'altra nella bipartizione.

Sto contando le coppie ordinate del tipo
(bipartizione; arco che va da una parte all'altra)
ora riconto secondo gli archi.
Prendo un arco $v_i - v_j$
Scelgo in 2 modi se mandare v_i in V_1 o in V_2
v_j va dall'altra parte.
Gli altri $v-2$ vertici fanno come vogliono in
2^{v-2} modi

$2 \cdot 2^{v-2} = 2^{v-1}$ è il n° di bipart. in cui $v_i - v_j$ va da una parte all'altra.

$$\sum_{\text{bipart.}} \text{n° di archi} \ldots = 2^{v-1} \cdot e$$

La media sarà $\dfrac{2^{v-1} \cdot e}{2^v} = \dfrac{e}{2}$

se metto tutti i vertici in V_1 non ho archi che vanno da V_1 a V_2, dunque esiste una bipartizione con più della metà degli archi da V_1 a V_2

Per casa] Dim. che se prendo $r>0$ allora esistono grafi che comunque bipartiti hanno meno di $\left(\frac{1}{2}+r\right)e$ archi da V_1 a V_2

FATTORIALE]

In quanti modi posso ordinare in fila gli elementi di A? In $n!$ modi

---

Lemma $(n+1)! = (n+1)\, n!$ $\quad \forall n \geq 1$

Prendo A e un elemento esterno t

Scelgo un elemento che sia il più a sinistra.

$$\sum_{x \in A \cup \{t\}} n! = (n+1)\, n!$$

E per induzione (occhio al passo base, banale ma da fare) $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

Quante sono le funzioni iniettive da A a B? Sia F il numero

Supponiamo $n \leq m$

D.C. sul numero di ordinamenti di B.

1° conto $m!$

2° conto | Scelgo una funzione f iniettiva da A a B

ordino così: $f(a_1), f(a_2) \ldots f(a_n)$ e poi gli altri $(m-n)$ in uno dei $(m-n)!$ modi possibili

$$m! = F \cdot (m-n)! \qquad F = \prod_{i=m-n+1}^{m} i$$

BINOMIALI

Dato un intero p, quanti sono i sottoinsiemi di p elementi contenuti in A?

Sono $\binom{n}{p}$

Se $p < 0$ $\qquad \binom{n}{p} = 0$

Se $p > n$ $\qquad \binom{n}{p} = 0$

$$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

Ma forse $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ Sì

I sottoinsiemi da p sono in biezione con i complementari, che sono quelli da $n-p$.

Formula di ricorrenza

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Prendiamo A e aggiungiamo t

Se prendiamo un sott. da $p+1$ tra gli $n+1$, possiamo includere t oppure no.

1° caso $\binom{n}{p}$ scelte

2° caso $\binom{n}{p+1}$ scelte

Salvo casi disperati $(n<0,\ p<0,\ p>n)$ vale la seguente formula: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

D.C. sul numero di ordinamenti di A.

1° conto) $n!$

2° conto) Scelgo in $\binom{n}{p}$ modi l'insieme dei primi p, li ordino in $p!$ e ordino gli altri in $(n-p)!$ modi

$$n! = \binom{n}{p} \cdot p! \cdot (n-p)!$$

$\binom{n}{p} =$ quello che deve essere

$p=0$ $p=1$ $p=2$

Somma riga

1   0 0 1 0 0   ← $n=0$ 2^0

2   0 1 1 0   ← $n=1$ 2^1

4   1 2 1 0   ← $n=2$ 2^2

8   1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

20 è la somma dei O

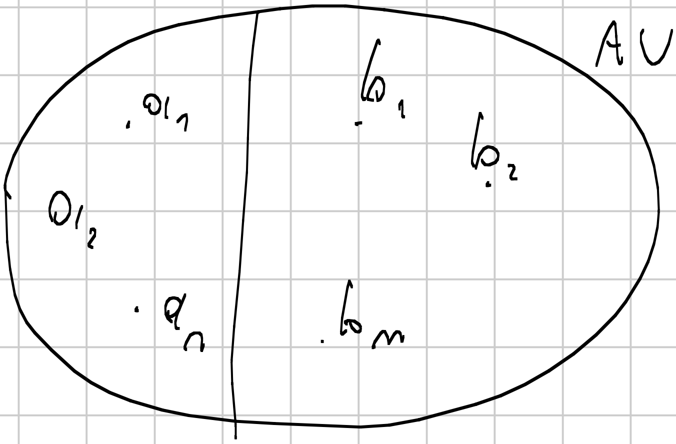
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad \sum_{i=p}^{q} \binom{i}{p} = \binom{q+1}{p+1}$$

IDENTITÀ DI VAN DER MONDE $0 \le k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Prendo $A \cup B$

A e B sono disgiunti



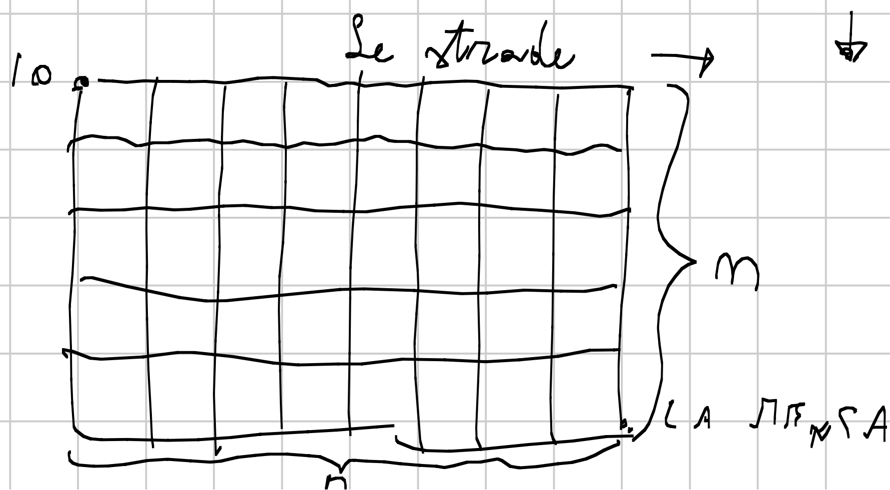
$A \cup B$ ha $m+n$ elementi

conto i sottoins. di k el. dentro $A \cup B$.

Se ci sono i elementi da A, gli altri $k-i$ vengono da B. Se fisso i, $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

— o —



In quanti modi posso raggiungere la mensa?

Devo fare n spostam. $\rightarrow$ e m $\downarrow$, in tutto $m+n$

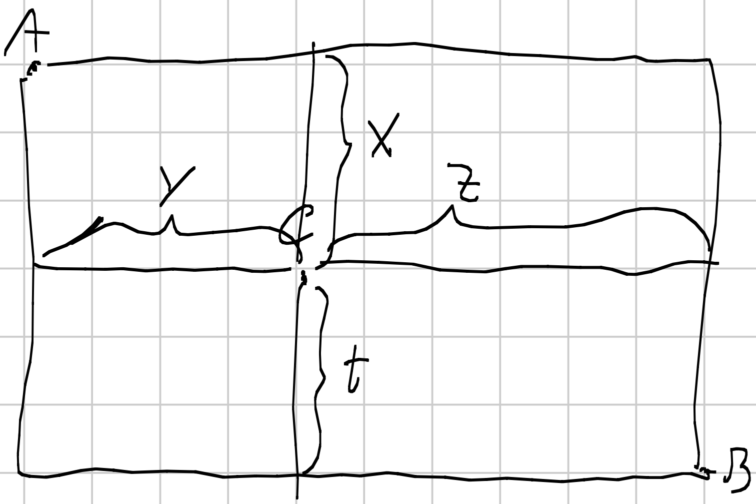
Supponiamo che io debba fare gli spostamenti $s_1, s_2, \dots, s_{m+n}$

Se scelgo n indici e decido che uso gli spostamenti corrispondenti per andare ad est. $\rightarrow$, formo un percorso.

Dunque devo scegliere n elementi fra $m+n$, dunque ho $\binom{m+n}{n}$ possibilità.

TEST INIZIALE 5

Devo andare da A a B senza passare per C. Quanti percorsi?



$$\binom{x+t+y+z}{x+t} - \binom{x+y}{x}\binom{z+t}{t}$$

BINOMIO DI NEWTON

$(x+1)^n$ come si sviluppa?

quanti sono i sottoinsiemi da p elementi di A?

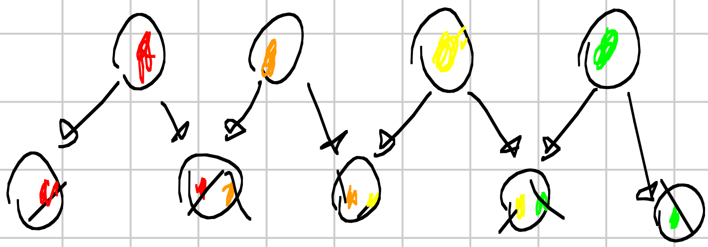
$$\underbrace{(x+1)(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ fattori}}$$

per avere x^p devo scegliere p volte la x e $n-p$ volte l'1

posso farlo in $\binom{n}{p}$ modi

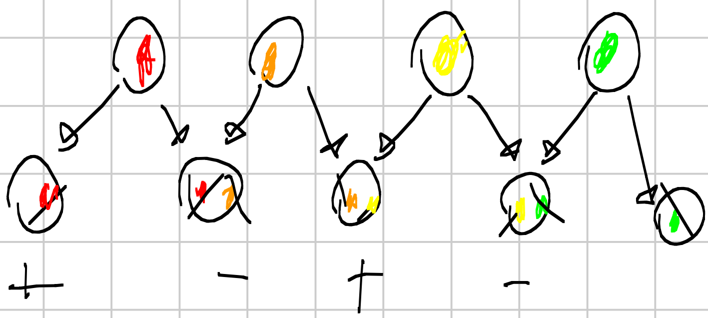
Il polinomio diventa $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (x+1)^n$

Se $x = -1$ allora $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$



riga $n-1$ esima del triangolo di tartaglia

$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i}$ è positiva o negativa?
dipende dal segno dell'ultimo termine della somma.

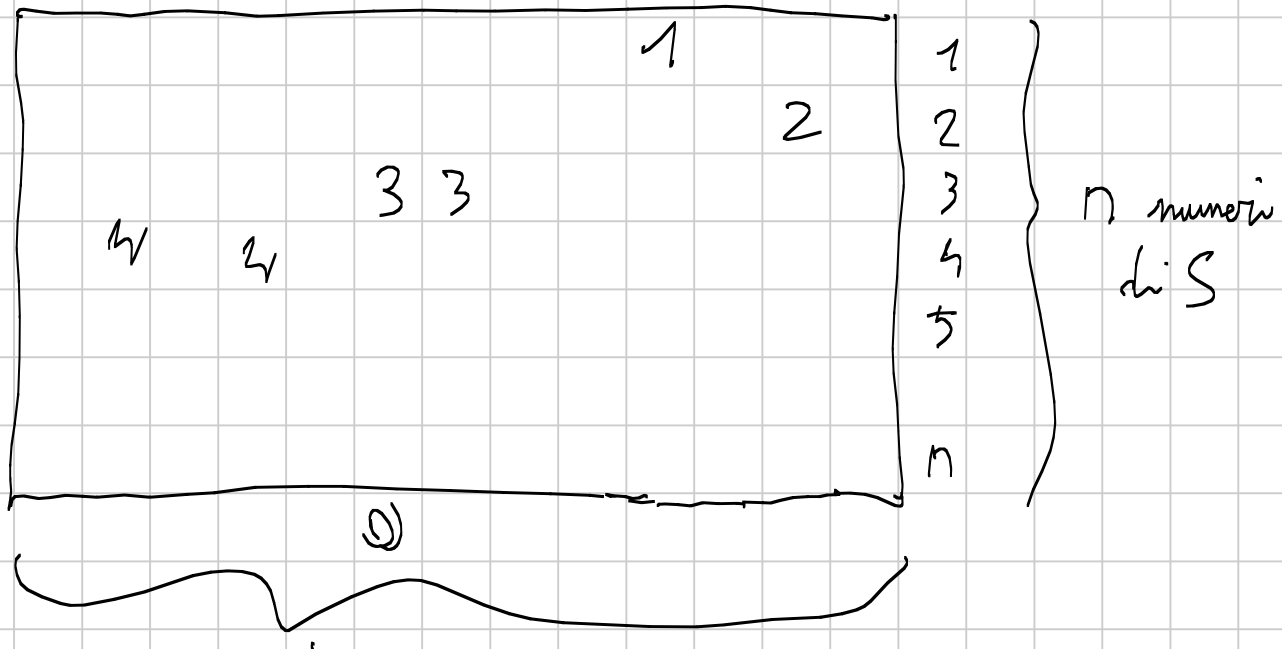


rimane $- \bullet < 0$

IMO 1981/2 | Abbiamo S con n elementi $\{1, 2, ..., n\}$. Consideriamo $1 \le r \le n$, e per ogni sottoinsieme di r elementi di S, consideriamo il minimo elemento del sottoinsieme. Allora la media dei minimi di tutti tali sottoinsiemi è $\frac{n+1}{r+1}$

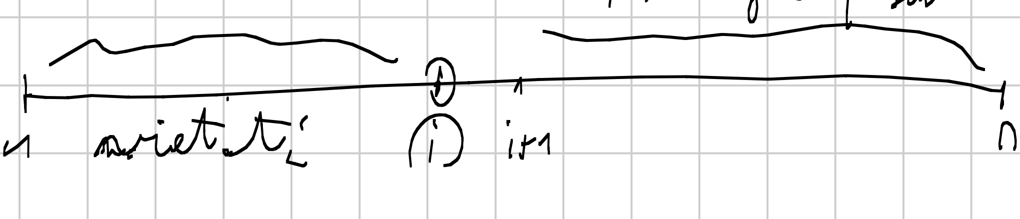
Qual è la somma dei minimi dei vari sottoinsiemi?

D.C.



$\binom{n}{r}$ sott. di S da r elem.

Scelgo un minimo e conto in quanti sottoinsiemi da r è il minimo



i è minimo in $\binom{n-i}{r-1}$ sottoinsiemi

i può essere minimo se e solo se $i \le n-r+1$

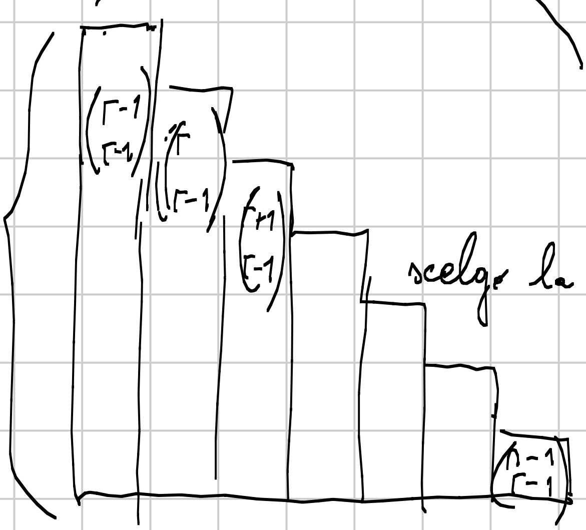
$$\sum_{i=1}^{n-r+1} i\binom{n-i}{r-1}$$

è la somma delle caselle di questa "tabella"

D. C.

$n-r+1$

$n-r+1$



scelgo la riga lunga K

la riga lunga k ha somma

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{r+i-2}{r-1}=\binom{r+k-1}{r}$$

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{r+k-1}{r}=\binom{\cancel{r}+n-\cancel{r}+1-\cancel{1}+\cancel{1}}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$$

è la somma dei minimi tanto desiderata

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}$$

IMO 1998/2 Abbiamo a concorrenti $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)$ in una competizione e b giudici $(g_1, g_2, \dots g_b)$
Ogni giudice può bocciare o promuovere ogni concorrente. K è un naturale t.c. comunque si scelgano 2 giudici g_i, g_j, i loro pareri coincidono su al più K concorrenti.
In più b è dispari ≥ 3.

Dim che $\dfrac{K}{a} \geq \dfrac{b-1}{2b}$

$m = \dfrac{b-1}{2}$ $\qquad b = 2m+1 \qquad \dfrac{K}{a} \geq \dfrac{m}{2m+1}$ nuova tesi equivalente

---

$f(g_i, g_j) =$ n° di concorrenti su cui g_i e g_j concordano

$f(g_i, g_j) \leq K$

$h(\alpha_i) =$ n° di giudici che hanno promosso α_i

D.C. Contiamo le coppie ordinate del tipo

(concorrente ; coppia di giudici che era d'accordo su di lui)
non ordinata

1° conto
$$\sum_{\alpha_i \text{ concorrente}} \binom{h(\alpha_i)}{2} + \binom{2n+1-h(\alpha_i)}{2}$$

2° conto
$$\sum_{\substack{g_i g_j \\ \text{coppia non ord. di giudici}}} F(g_i, g_j)$$

$$\sum_{g_i g_j \text{ coppia}} F(g_i, g_j) = \sum_{\alpha_i \text{ conc.}} \binom{h(\alpha_i)}{2} + \binom{2n+1-h(\alpha_i)}{2}$$

$$\binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$$

$$/\!/$$

$$\sum_{g_i g_j \text{ coppia}} k = \binom{2n+1}{2} k$$

$$/\!/$$

$$\sum_{\alpha_i \text{ conc}} \frac{h(\alpha_i)(h(\alpha_i)-1) + (2n+1-h(\alpha_i))(2n+1-h(\alpha_i)-1)}{2}$$

$$/\!/$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha_i \text{ conc.}} h(\alpha_i)^2 - \cancel{h(\alpha_i)} + (2n+1-h(\alpha_i))^2 - (2n+1-\cancel{h(\alpha_i)})$$

$$\shortparallel$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(2n+1) + \frac{1}{2}\sum \left(h(\alpha_i)^2 + (2n+1-h(\alpha_i))^2\right)$$

$$\vee\!/\ ?$$

AM-QM sarebbe comoda ma non funzionerà

SMOOTHING: se $x+y=n$ ha somma fissata

allora x^2+y^2 sarà più piccola se avvicino x e y

$$x^2+y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(2n+1) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_i \text{ conc}} \left(h(\alpha_i)^2 + (2n+1-h(\alpha_i))^2\right)$$

sostituisco $h(\alpha_i)$ e $2n+1-h(\alpha_i)$ con n e $n+1$

$$\vee\!/$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(2n+1) + \frac{1}{2}\alpha\left(n^2 + (n+1)^2\right) = \frac{1}{2}\alpha \cdot 2n^2 = \alpha n^2$$

Abbiamo ottenuto $\binom{2n+1}{2}k \geq \alpha n^2$ da cui la tesi

ANAGRAMMI E ANNESSI & CONNESSI

Quanti anagrammi ha la parola SASSARI?

Ho 7 carte e 4 bambini che si chiamano S, A, R, I. Devo distribuirle, ma S è ingordo e ne vuole 3, A ne vuole 2, R, I una ciascuno. In quanti modi?

Ho un insieme di 7 elementi e devo partizionarlo in 4 insiemi S, A, R, I con risp. 3, 2, 1, 1 elementi. In quanti modi?

$(s+a+r+i)^7$ → qual è il coeff. di $s^3 a^2 r i$?

Sembrano 4, ma il problema è uno solo e la risposta dico che è il COEFFICIENTE MULTINOMIALE $\binom{7}{3,\ 2,\ 1,\ 1}$

Dato $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \dots, a_k$ interi t.c. $\sum a_i = n$ il coeff. mult. $\binom{n}{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k}$ è il numero di partizioni di un insieme di n elementi in k sottoinsiemi di cui il primo con a_1 elementi, ..., l'ultimo con a_k elem.

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

RICORRENZA

$$\binom{n-1}{a_1-1, a_2, \ldots, a_k} + \binom{n-1}{a_1, a_2-1, a_3, \ldots, a_k} +$$

$$+ \ldots + \binom{n-1}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1} =$$

$$= \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$$

Ho 11 giocatori in una squadra di calcio. Devo scegliere un portiere, 4 dif, 4 centrocampisti e 2 attaccanti. In quanti modi?

$$\binom{11}{4\ 4\ 2\ 1} = \frac{11!}{4!\,4!\,2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot \ldots \cdot 5}{4! \cdot 2 \cdot 1}$$

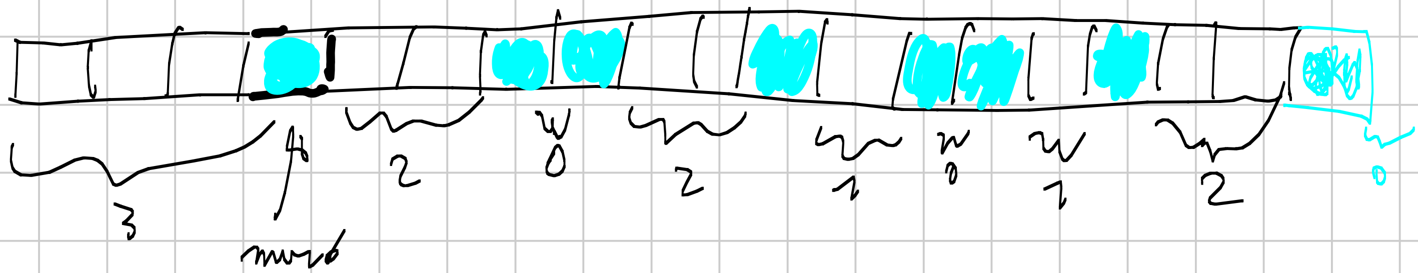
$$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \ldots \cdot 5}{16 \cdot 3} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5$$

$\shortparallel$

fare il conto

Dati n e k, devo scrivere n come somma di k numeri naturali $a_1, a_2, \dots, a_k$. In quanti modi posso farlo? ordinati (infatti c'è l'indice)

Data una stringa di $n+k-1$ caselle bianche, ne coloro $k-1$ di turchese. In quanti modi?



Dunque colorando $k-1$ caselle divido le n rimanenti in k gruppi, e viceversa posso decidere prima le lunghezze dei gruppi e poi colorare.

La risposta è $\binom{n+k-1}{k-1}$

PRINCIPIO DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE

Se abbiamo un po' di insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, allora

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots$$

$$+(-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

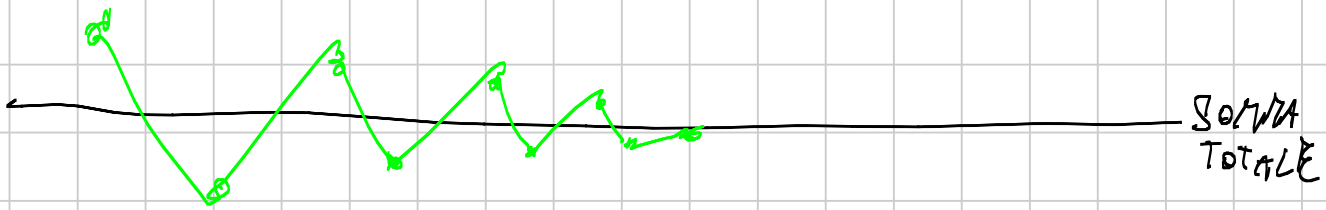
$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum |A_i \cup A_j| + \sum |A_i \cup A_j \cup A_k| - \dots$$

vale anche questa

$$+(-1)^{n+1}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

---

nella prima, se uno fa la somma parziale questa è $\geq$ o $\leq$ di quello totale a seconda del segno $+$ o $-$ dell'ultimo termine preso.



ESERCIZIO Determinare nella 2ª formula come si comportano le somme parziali

---

Dim.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

$$+(-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Siano $a_1, a_2, \dots, a_p$ gli elementi di $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

e sia b_i il numero di A_j che contengono a_i

D.C. ogni somma la conto secondo gli a_i

e non secondo gli A_i

TESI

$$p \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{p}\binom{b_i}{1} - \sum_{i=1}^{p}\binom{b_i}{2} + \sum_{i=1}^{p}\binom{b_i}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{p}\binom{b_i}{n}$$

$b_i \leq n \ \forall i$ perché n sono tutti gli A_j e b_i una parte.

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\underbrace{\binom{b_i}{1} - \binom{b_i}{2} + \binom{b_i}{3} - \binom{b_i}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\binom{b_i}{n}}_{1}\right)$$

1 (perché se togliessi $\binom{b_i}{0}$ farebbe 0)

$$\sum_{i=1}^{p} 1 = p \quad \text{ok}$$

Se mi fermo alla q-esima sommatoria

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\binom{b_i}{1} - \binom{b_i}{2} + \dots + (-1)^{q+1} \binom{b_i}{q} \right)$$

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(-\binom{b_i}{0} + \binom{b_i}{1} - \binom{b_i}{2} + \dots + (-1)^{q+1} \binom{b_i}{q} + \binom{b_i}{0} \right)$$

$$p + \sum \left(-\binom{b_i}{0} + \binom{b_i}{1} - \dots + (-1)^{q+1} \binom{b_i}{q} \right)$$

se $q+1$ è pari ottengo una somma $\geq p$
" " " dispari " " " $\leq p$

È SFORATO IL TEMPO!

PER CASA (O DURANTE IL LUPUS DI NOTTE)

Dimostrare o confutare quanto scritto a pag. 21 del Goblino:

" $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$ è il n° di funzioni suriettive da A a B "

BST 08 (o 07?) N°1