COMBINATORIA 2

Titolo nota 10/09/2010

Permutazioni

σ biiettive da un insieme in sé

$$S_n = \{\sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots, n\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

σ, τ permutazioni $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma \circ \tau$ permutazione $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

Ciclo

$(a_1\ a_2\ \dots\dots\ a_n)$

$a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \quad a_{n-1} \mapsto a_n \mapsto a_1$

$\exists k$ t.c.

$1 \quad \sigma(1) \quad \sigma(\sigma(1)) = \sigma^2(1) \quad \dots\dots \quad \sigma^k(1) = \underline{1}$

Sia k il min t.c. $\sigma^k(1)$ c'era già nella successione

$\sigma^k(1) = \sigma^h(1) \quad h < k \qquad h \neq 0 \to \sigma^{k-1}(1) = \sigma^{(h-1)}(1)$

$(1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots \sigma^{k-1}(1))$

Ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti

Cicli disgiunti commutano

→ scomposizione unica a meno dell'ordine

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6) = (5\ 6)(1\ 2\ 4\ 3)$$

2-cicli : trasposizioni

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$$

σ^{-1} è una perm t.c. $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = id$

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$$

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma \circ \tau(j) - \sigma \circ \tau(i)}{j - i} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma \circ \tau(j) - \sigma \circ \tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} =$$

$$= \underbrace{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma \circ \tau(j) - \sigma \circ \tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)} \underbrace{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}}_{\operatorname{sgn}(\tau)}$$

$\tau(j) < \tau(i)$ $$\frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}$$

$j > i \qquad \sigma(j) < \sigma(i)$: inversione

il segno conta la parità del numero di inversioni

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k) = (a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3)\dots(a_{k-1} \ a_k)$$

$$(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2)(2 \ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a \ b) = (a \ a+1)(a+1 \ a+2)\dots(b-1 \ b)(b-1 \ b-2).$$

$a < b$

$$\dots (a+2 \ a+1)(a+1 \ a)$$

Segno : $\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

- parità del numero di inversioni
- parità del numero di trasposizioni per una scomposizione di σ in trasposizioni

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Non si può portare a posto con mosse legali

$n!$ permutazioni in S_n

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \_ \_ =$$

$$+ \_ \_ + (-1)^n \binom{n}{n} \underset{\downarrow \atop 1}{0!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \cancel{(n-k)!}$$

Senza punti fissi

id, σ, σ^2, ... qual'è il min k intero t.c. $\sigma^k = id$?

$(a_1 \qquad a_k)$

$\sigma(a_1) = a_2 \quad \sigma(a_2) = a_3 \quad \dots$

$\sigma(a_i) = a_{i+1} \pmod k$

$\sigma^2(a_1) = a_3$

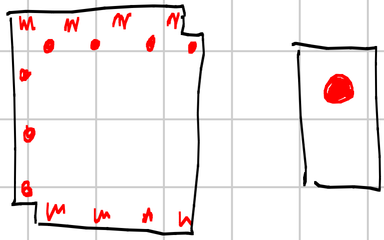
$\sigma^h(a_i) = a_{i+h} \pmod k$

Un ciclo ha per ordine la sua lunghezza

$ord(\sigma) =$ mcm(ordini dei cicli che la compongono)

(In)varianti e colorazioni

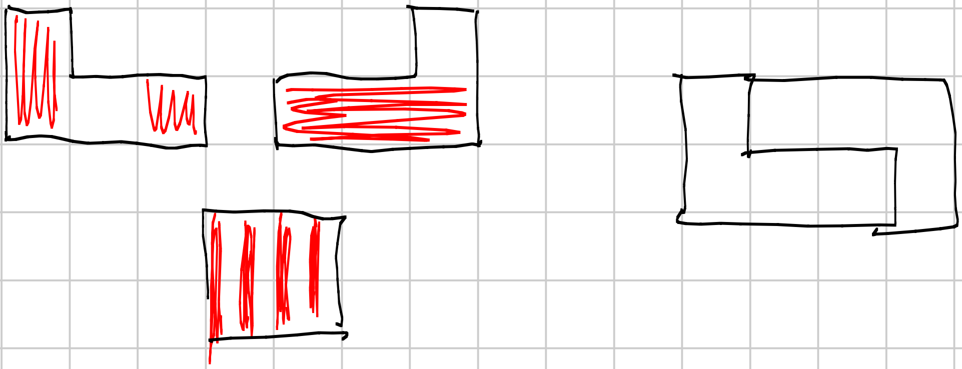
$2n \times 2n$

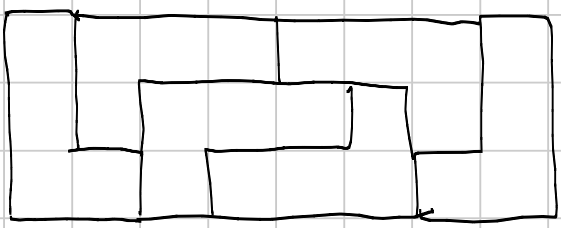


NO

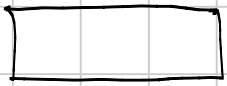
101×101

NO

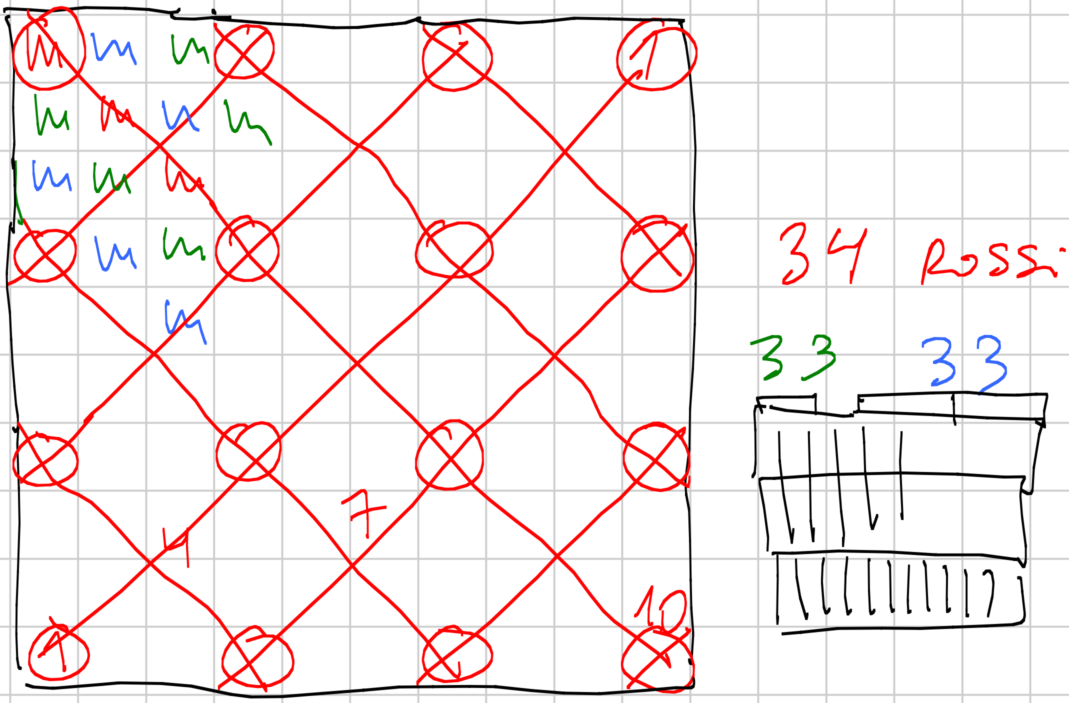


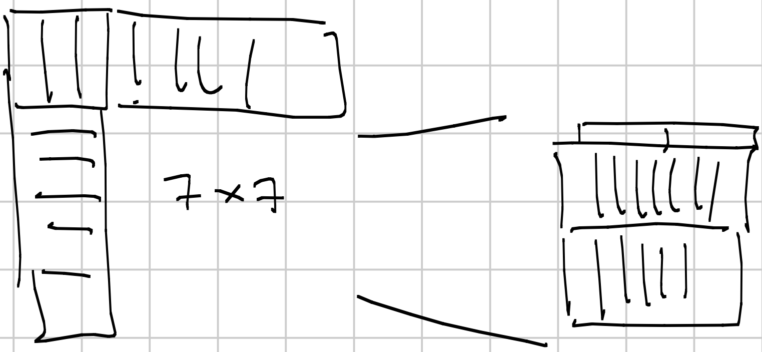


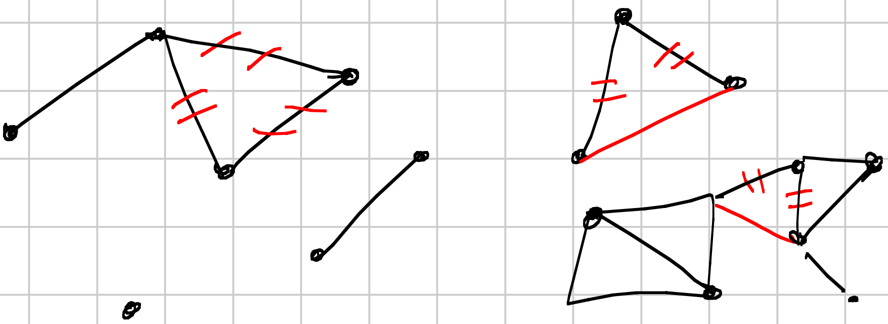
10 × 10



× 33







INVARIANTE: PARITÀ ARCHI DA UN VERTICE

„VARIANTE": PARITÀ ARCHI TOTALI

VI È UN NUMERO PARI DI VERTICI „DISPARI"

N° coppie di vertici dispari = archi finali

---

12 gnomi, alcuni amici

amicizia simmetrica

Case ROSA o AZZURRE

Si ridipinge se la maggioranza ~~stretta~~ degli amici di uno gnomo ha casa di colore diverso

$$\text{felicità (gnomo)} := \text{N° amici con casa dello stesso colore del proprio} - \text{N° amici con casa di colore diverso}$$

$$F_{tot} = \sum_{\text{gnomi}} \text{Felicità (gnomo)}$$

m amici con stesso colore

n amici con colore diverso

$n > m$

\+ gnomo cambia di segno la propria + $2(n-m)$

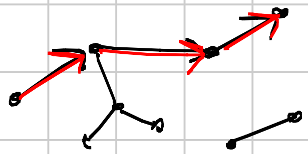
Ogni volta che si ridipinge F_{tot} cresce strettamente

$$F_{tot} \leq \sum_{\text{gnomi}} \text{N° amici (gnomo)} \Rightarrow \text{NON SI RIDIPINGE ALL'INFINITO}$$

Basi per affrontare giochi:
cercare invarianti e partire dalla fine

Grafi

Cammino



Grafo connesso

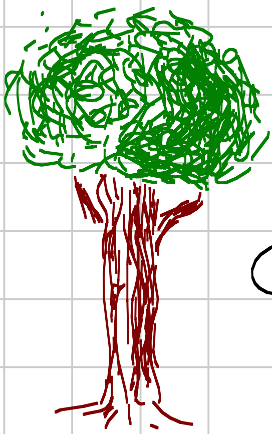
$\forall$ coppia di vertici $\exists$ cammino che li unisce

Ciclo: cammino con inizio = fine

Albero: connesso senza cicli

+ arco: acquista un ciclo

− arco: non connesso



Grafo ad albero

$v = e + 1$

edges

− ci sono foglie: se no un ciclo

Tolgo una foglia e ipotesi induttiva

Base:

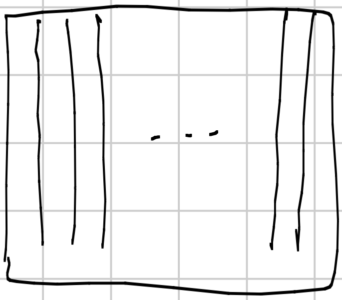
Castello 2010×2010, porta tra quadratini adiacenti

Max porte chiuse in modo che si possa arrivare da una stanza all'altra?

$v = 2010 \times 2010$

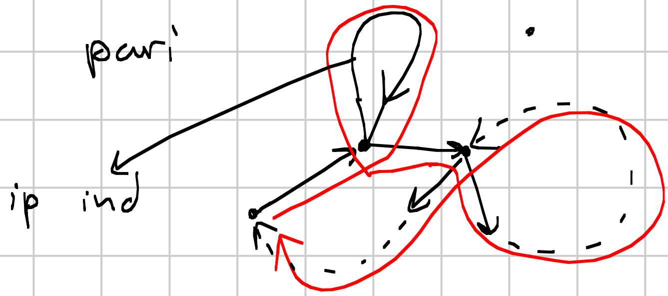
$2010 \times 2010 - 1$ porte aperte

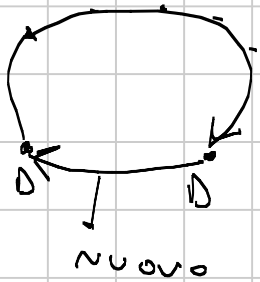
Totale porte $2 \cdot 2009 \cdot 2010$

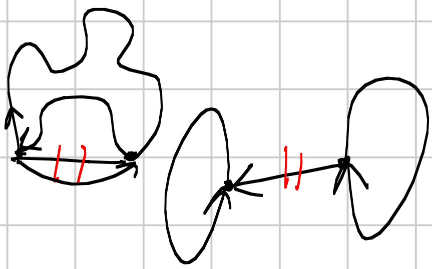


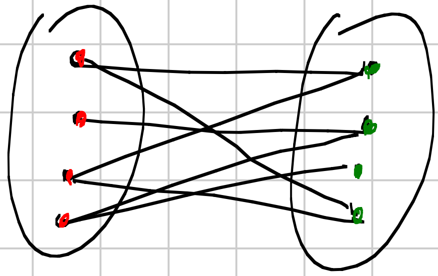
circuito euleriano: ciclo che percorre tutti gli archi una e una sola volta

Esiste sse ogni vertice ha ordine pari

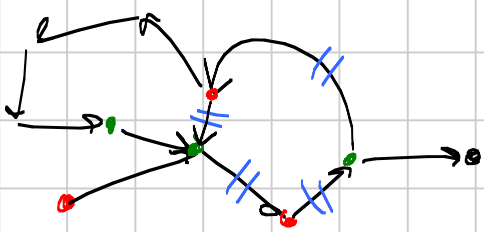


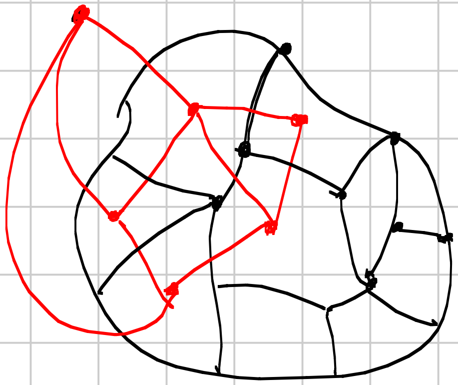






Grafo bipartito sse ogni ciclo ha lunghezza pari

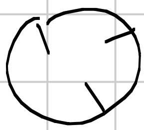


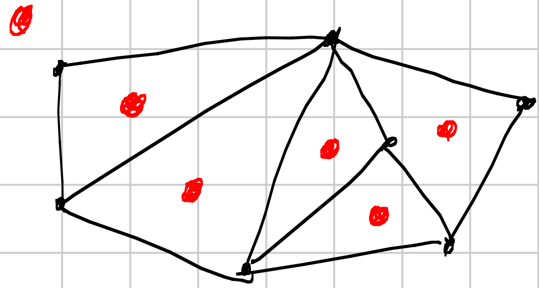


1: ferrovia a ciclo
euleriano
sui confini

2: Ing e astronauti,
mai due professioni
uguali da
stati confinanti

2 $\Rightarrow$ grafo stati ha
cicli pari $\Rightarrow$ 1

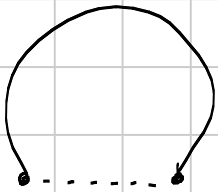




v vertici

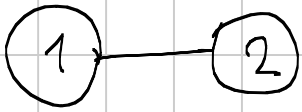
e archi

f



$$f + v = e + 2$$

$$-1 \qquad\qquad -1$$

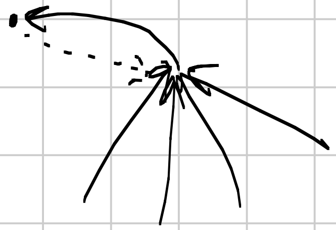


$$f_1 + v_1 = e_1 + 2$$

$$f_2 + v_2 = e_2 + 2$$

$$f_1 + f_2 \quad + v_1 + v_2 = e_1 + e_2 + 2 + 2$$

Grafi orientati



ASSURDO

Cammino Hamiltoniano

Completo: ogni coppia di vertici è connessa