INDUZIONE E PRINCIPIO DEI CASSETTI

Titolo nota 05/09/2010

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali $= \{1, 2, 3, \ldots\}$

P_n affermazione che dipende da $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \text{ è un numero intero } \forall n \in \mathbb{N}$$

- Dimostriamo che P_1 è vera
- Dimostriamo che <u>se</u> P_n è vera, <u>allora</u> è vera anche P_{n+1}

$\rightarrow$ P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ ← PER OGNI

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{6+15+10-1}{30} = \frac{30}{30} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(n+1)^5}{5} + \frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{30}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\boxed{\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}}$$ ASSUNTO COME INTERO PER IPOTESI

$$+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}}_{=1\in\mathbb{N}} + \text{IND.}$$

$$\underbrace{\frac{5n^4+10n^3+10n^2+5n}{5}}_{\text{INTERO}} + \underbrace{\frac{4n^3+6n^2+4n}{2}}_{\text{INTERO}} +$$

$$\underbrace{\frac{3n^2+3n}{3}}_{\text{INTERO}}$$

ho una somma di 5 quantità intere $\longrightarrow$ essa è intero ■ $\boxed{\text{vera } P_n \Rightarrow \text{vera } P_{n+1}}$

$$S_n = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1+2+\dots+n \\ n+n-1+\dots+1 \end{array} \Big] \text{ li conto 2 volte!}$$

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n \text{ volte}} = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

S_1 so che deve fare 1 ■ $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ OK

Diamo per buono che

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Quanto dovrebbe essere S_{n+1}? $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{S_n=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{OK}$$

(A17)

$$a_i=\alpha+(i-1)\cdot r \qquad a_1+a_2+\dots+a_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{n(2\alpha+(n-1)r)}{2} \quad \text{Sarà vero?}$$

Per $n=1$ $\quad S_1=a_1=\alpha+(1-1)\cdot r=\alpha$

$$S_1=\frac{1\cdot(2\alpha+\cancel{(1-1)\cdot r})}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$$

OK

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2\alpha+nr)}{2} \quad \text{è vero?}$$

$$\frac{n(2\alpha+(n-1)r)}{2}+a_{n+1}=\frac{n(2\alpha+(n-1)r)}{2}+\alpha+nr=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot 2\alpha+\overbrace{n(n-1)r+2nr}^{n(n+1)r}}{2}=\frac{(n+1)[2\alpha+nr]}{2}$$

$$S_n^{(2)} = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$n=1$ $\quad S_1^{(2)} = 1^2 = 1$ ← OK $\quad \frac{1\cdot(2\cdot1+1)\cdot(1+1)}{6} = \frac{1\cdot3\cdot2}{6} = 1$

$$S_{n+1}^{(2)} = \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}+(n+1)^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)\overbrace{(2n^2+7n+6)}^{(2n+3)(n+2)}}{6} =$$

$$\frac{(n+1)(2(n+1)+1)+[(n+1)+1]}{6}$$

$S_n^{(k)}$ è sempre un polinomio nella variabile n di grado $k+1$

$$S_n^{(2)} = an^3+bn^2+cn+d$$

$S_1^{(2)} = 1^2 = 1$

$S_2^{(2)} = 1^2+2^2 = 5$

$S_3^{(2)} = 1^2+2^2+3^2 = 14$

$S_4^{(2)} = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{cases}$$

SOMMA DEI CUBI

$$S_n^{(3)} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$S_1^{(3)} = 1$ è vero? $\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

$$S^{(3)}_{n+1} = S^{(3)}_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$(n+1)^2 \, \frac{n^2+4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA

$$\underset{i=1}{\alpha}, \ \underset{i=2}{\alpha r}, \ \underset{i=3}{\alpha r^2}, \ \alpha r^3 \ \dots$$

$$a_i = \alpha \cdot r^{i-1} \qquad S^G_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha \frac{r^n - 1}{r-1}$$

$r \neq 1$

Per $n=1$ devo ottenere

$S^G_n = \alpha$

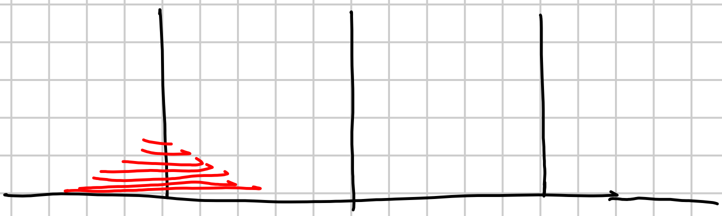
$$\alpha \frac{r^1-1}{r-1} = \alpha \frac{r-1}{r-1} = \alpha \quad \text{OK}$$

$$S^G_{n+1} = S^G_n + \alpha r^n = \alpha \frac{r^n - 1}{r-1} + \alpha r^n =$$

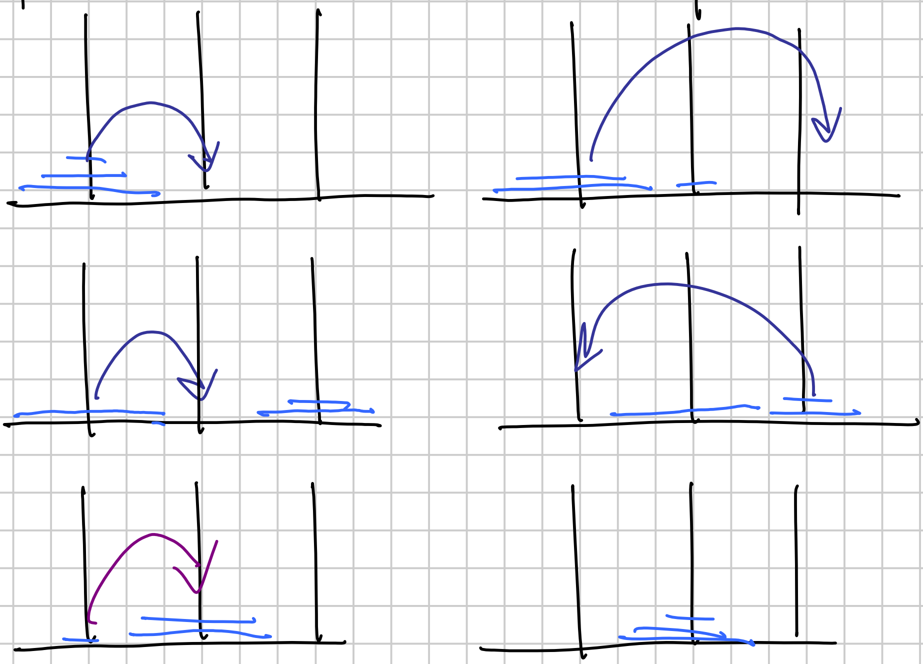
$$= \alpha \frac{r^n - 1 + r^n(r-1)}{r-1} = \alpha \frac{r^{n+1} \cancel{- r^n} \cancel{+ r^n} - 1}{r-1} =$$

$$= \alpha \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}$$

TORRE DI HANOI



Quanto vale il n° minimo di mosse necessario per realizzare lo spostamento di n dischi?



$$\begin{cases} N_1 = 1 \\ N_n = 2 \cdot N_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$N_1 = 1 = 2^1 - 1$

$N_2 = 3 = 2^2 - 1$

$N_3 = 7 = 2^3 - 1$

$N_4 = 15 = 2^4 - 1$

$\vdots$

$N_n = 2^n - 1$

Dimostrat. per induzione

$N_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ OK

$N_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad x \geq 0$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}} =$$

$$\frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{2x+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{x/2x+1}{x/2x+1 + 1} = \frac{x}{2x+1} \Big/ {x + 2x+1}\Big/_{2x+1} =$$

$$= \frac{x}{\cancel{2x+1}} \cdot \frac{\cancel{2x+1}}{3x+1} = \frac{x}{3x+1}$$

$$\underbrace{f(f(\dots\ (f}_{n\text{ volte}}(x))\dots) = f^{(n)}(x) = \frac{x}{nx+1}$$

Sarà vero?

$n=1$ è ovvio $\quad f^{(1)}(x) \equiv f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x}{1\cdot x+1}$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+nx+1}{nx+1}} =$$

$$\frac{x}{\cancel{nx+1}} \cdot \frac{\cancel{nx+1}}{(n+1)x+1} = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$\forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

$(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$

$1 \geq 1+0$

$1 \geq 1$ VERA

A16

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) =$$

$$= 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

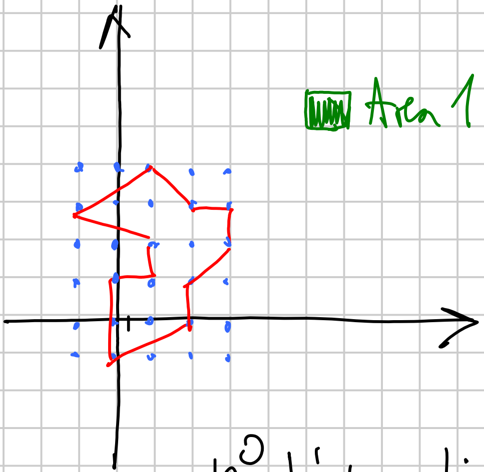
INDUZIONE FORTE

Supponiamo che un'affermazione P_n sia vera per tutti i valori $1, 2, \ldots n$ e che **se** P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera.

$\Rightarrow$ P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

TEOREMA DI PICK

Supponiamo di considerare in un piano cartesiano solo i punti con entrambe le coordinate intere



Tracciamo dei poligoni che hanno tutti i vertici in punti del reticolo

Come si calcola l'area S di questi poligoni?

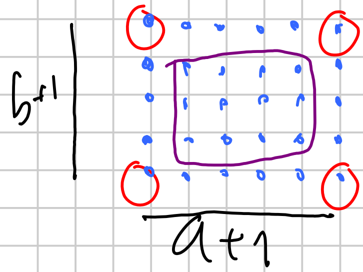
n° di punti interni al poligono I

n° di punti sul bordo del poligono (spigoli e vertici) B

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

Dim. è basata sull'induzione forte + la dimostrazione "a mano" per i triangoli

Si parte dal rettangolo di punti messi nel reticolo



$I = a \cdot b$

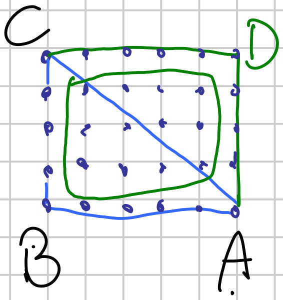
$B = 2(a+1) + 2(b+1) - 4 = 2a+2b+4$

$b+1=4$ $a+1=5$ nell'esempio

$$I + \frac{B}{2} - 1 = a \cdot b + a+1 + b+1 - 1$$

$$ab+a+b+1 = (a+1)(b+1) = S$$

Come si fa a farlo per un triangolo?
intanto partiamo da un triangolo rettangolo coi cateti paralleli agli assi



senza contare gli estremi

AB che ha a punti cateto

BC con b punti cateto

AC con c punti ipotenusa

i = numero di punti interni ad $\triangle ABC$

Quanti sono i punti interni ad ABCD?

$2i + c$

Area di ABC proviamo a calcolare

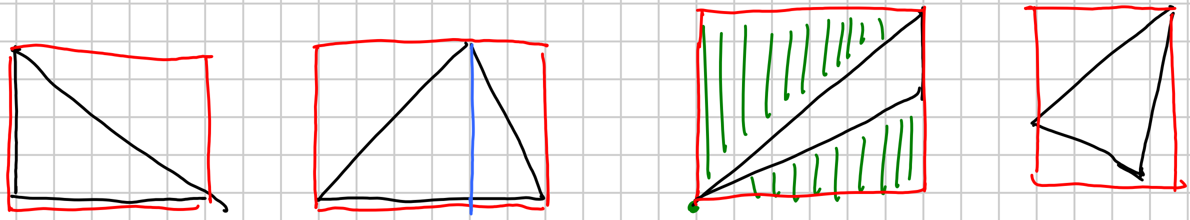
$$I + \frac{B}{2} - 1 = i + \frac{\underbrace{a+b+c+3}_{B}}{2} - 1 =$$

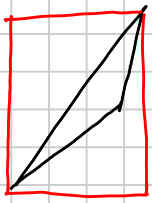
$$= \frac{\underbrace{2i+c}_{a \cdot b} + a+b+1}{2} = \frac{a \cdot b + a+b+1}{2} = \frac{S}{2}$$

Abbiamo Pick per un $\triangle$

Come si fa a mostrare che Pick vale per un triangolo qualsiasi?

SI DIVIDE IN CASI





→ In tutti questi 5 casi vale Pick per i triangoli

INDUZIONE:

Supponiamo Pick vero per tutti i poligoni da 3 a n lati e vediamo che è vero per poligoni con n+1 lati

Si spezza il poligono in 2 sottopoligoni con un minor numero di lati

Se P è convesso non ci sono problemi, basta tirare una diagonale

Se P ha un angolo > 180°, si tracciano tutte le semirette uscenti dal vertice di quell'angolo finché non se ne trova una che batte contro un altro vertice $\rightarrow$ ho 2 poligoni P_1 e P_2

$A = A_1 + A_2$

$I_1 \quad B_1$ interni e di frontiera di P_1

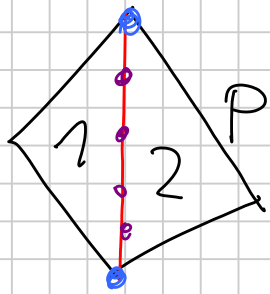
$A_1 = I_1 + \frac{B_1}{2} - 1$

$I_2 \quad B_2$ interni e di frontiera di P_2

$A_2 = I_2 + \frac{B_2}{2} - 1$

x punti sulla diagonale (esclusi gli estremi)

$A = I_1 + I_2 + \frac{B_1 + B_2}{2} - 2$



$B = B_1 + B_2 - 2 - 2x$

$I = I_1 + I_2 + x$

$I_1 + I_2 = I - x \qquad B_1 + B_2 = B + 2 + 2x$

$A = I - x + \frac{B + 2 + 2x}{2} - 2 = I \cancel{-x} + \frac{B}{2} + 1 \cancel{+x} - 2$

$= I + \frac{B}{2} - 1$

PRINCIPIO DEI CASSETTI

k oggetti con $k > n$

Esiste almeno un cassetto che contiene almeno 2 oggetti

Dimostrare che a una festa con n invitati ci sono almeno 2 persone che hanno dato lo stesso numero di strette di mano

n cassetti

Se è pieno il 1° cassetto, allora vuol dire che l'ultimo cassetto è vuoto e viceversa

di conseguenza i cassetti pieni vanno o da 0 a ... $n-2$ o da 1 a $n-1$

e quindi sono in tutto $n-1$ cassetti.

Siccome gli invitati sono n, almeno un cassetto contiene almeno 2 invitati che quindi hanno dato lo stesso numero di strette di mano.

Prendiamo $n+1$ interi positivi tutti minori di $2n$. Mostriamo che ne esiste almeno uno fra essi che è divisore di un altro numero di tale insieme

$x_1 \; x_2 \; \dots \; x_{n+1}$

$x_1 = 2^{k_1} \cdot y_1 \quad x_2 = 2^{k_2} \cdot y_2 \dots \quad x_i = 2^{k_i} \cdot y_i \dots$

$x_{n+1} = 2^{k_{n+1}} \cdot y_{n-1}$

$\{x_1 \dots x_{n+1}\}$

$\{y_1 \dots y_{n+1}\} \qquad y_i < 2n$

$n+1$ numeri dispari $< 2n$
possono essere tutti diversi? NO

$1 \; 3 \; 5 \dots 2n-1$

$n=1 \;\; n=2 \;\; n=3$

$2n=2 \;\; 2n=4 \;\; 2n=6$

Ce ne sono almeno 2 uguali $\quad y_{\bar{i}} = y_{\bar{\bar{i}}}$

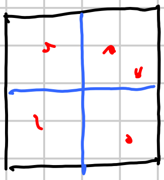
$x_{\bar{i}} = 2^{k_{\bar{i}}} \cdot y_{\bar{i}} \qquad x_{\bar{\bar{i}}} = 2^{k_{\bar{\bar{i}}}} \cdot y_{\bar{\bar{i}}}$

$\dfrac{x_{\bar{\bar{i}}}}{x_{\bar{i}}} = 2^{k_{\bar{\bar{i}}} - k_{\bar{i}}}$ intero

ESEMPIO GEOMETRICO

In un quadrato di lato 1 prendiamo 5 punti

mostriamo che ne esistono al meno 2 che distano più di $\sqrt{2}/2$



$\exists$ almeno un quadrato che contiene almeno 2 punti

(un punto che sta sulle linee di divisione può essere considerato come appartenente a più di un quadrato)

Considero i 2 punti nello stesso quadrato

la distanza max è la diagonale $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$