SENIOR 2010 – A3 MEDIUM

Titolo nota 10/09/2010

Successioni

Funzioni

<u>Ricorrenze lineari</u> $a_{n+1} = c a_n \Rightarrow a_n = c^n \cdot a_0$ (induzione)

$a_{n+1} = c a_n + d$

Pongo $b_n = a_n - \ell$ cerco ℓ in modo che b_n risolva una ricorrenza senza termine noto:

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \ell \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ricorr.} \\ \text{per } a_n}}{=} c a_n + d - \ell \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricavo} \\ a_n}}{=} c(b_n + \ell) + d - \ell$$

$$= c b_n + \underbrace{\boxed{c\ell + d - \ell}}_{\text{impongo } = 0}$$

$\ell(c-1) + d = 0$ $\ell = -\dfrac{d}{c-1}$. Per questa scelta diventa $b_{n+1} = c b_n$, quindi

$$b_n = b_0 \cdot c^n$$

da cui si finisce (con ovvia modifica quando $c=1$)

<u>Alternativa bovina</u> a_0 dato $a_1 = c a_0 + d =$

$a_2 = c a_1 + d = c^2 a_0 + cd + d$

$a_3 = c a_2 + d = c^3 a_0 + c^2 d + cd + d$

$\vdots$

$$a_n = c^n \cdot a_0 + d(1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1}) = c^n a_0 + d\, \frac{c^n - 1}{c-1}$$

(Induzione ...)

Consideriamo l'insieme delle successioni tali che $a_{n+1} = c a_n$.

Ha 2 proprietà fondamentali

→ è chiuso rispetto alla somma (cioè se a_n e b_n sodd., anche $a_n + b_n$ soddisfa)

→ è chiuso rispetto al prodotto per un numero (cioè se $a_{n+1} = c a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora anche la succ. $b_n = \lambda a_n$ ha la stessa proprietà)

Stessa cosa con termini forzanti. Insieme delle succ. a_n t.c.

$$a_{n+1} = c a_n + \text{Mostro}(n) \qquad (\star)$$

Le 2 proprietà precedenti non valgono più, MA

→ date 2 successioni che verificano, la loro differenza verifica la ricorrenza senza Mostro (n).

Sia quindi $\bar{a}_n$ una qualunque soluzione della $(\star)$. Allora ogni altra soluzione a_n sarà del tipo

$$a_n = \underbrace{\boxed{a_n - \bar{a}_n}}_{= c^n \cdot \alpha} + \bar{a}_n = c^n \cdot \alpha + \bar{a}_n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{SOLUZIONE GENERALE}\\ \text{CON MOSTRO}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{SOLUZIONE GEN.}\\ \text{SENZA MOSTRO}\end{array} + \begin{array}{c}\text{SOLUZIONE SPECIALE}\\ \text{CON MOSTRO}\end{array}}$$

Se conosco una soluzione, allora le conosco tutte.
Torniamo a

$$a_{n+1} = c a_n + d$$

Voglio trovare UNA soluzione. La cerco del tipo costante $a_n \equiv \beta$

$$\beta = c\beta + d \implies \beta = -\frac{d}{c-1} = \ell \text{ del primo approccio}$$

$$a_n = \alpha \cdot c^n - \frac{d}{c-1} \qquad \text{con} \quad a_0 = \alpha - \frac{d}{c-1}$$

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = 6a_n + 5n$

Cerco una soluzione speciale del tipo $\quad a_n = \alpha n + \beta$

$$\underbrace{\alpha(n+1)+\beta}_{a_{n+1}} = \underbrace{6\alpha n + 6\beta}_{6a_n} + 5n \qquad \alpha n + \alpha + \beta = 6\alpha n + 6\beta + 5n$$

$5\alpha = -5$ coeff. di n

$\alpha = 5\beta$ termine noto

$\Rightarrow \alpha = -1 \quad \beta = -\frac{1}{5}$

$$a_n = -n - \frac{1}{5} + 6^n \cdot c$$

parametro libero fissato dal dato iniziale

Esempio 3 $\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + n^2$

Voglio formula generale (con 2 parametri).
Cerco una soluzione speciale del tipo

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$a(n+2)^2 + b(n+2) + c = 4[a(n+1)^2 + b(n+1) + c] - 3(an^2 + bn + c) + n^2$$

Sviluppo ... e impongo che si annullino i coeff. di n^2, n, 1: ottengo 3 equazioni lineari in 3 incognite: di solito funziona.
La soluzione generale sarà del tipo

$$a_n = \underbrace{an^2 + bn + c}_{a,b,c \text{ trovati risolvendo il sistema}} + \boxed{\alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 3^n}$$

soluzione generale senza mostro

Sol. generale senza mostro: $\quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad$ Raolici: $x = 1$ e $x = 3$

—o—o—

Reinterpretazione del basic: Successioni che soddisfano la ricorrenza lineare senza mostro hanno queste proprietà

* chiuse rispetto alla somma
* " " al prodotto per un numero

Conseguenza: se x_n va bene e y_n va bene, allora va bene anche

$$a_n = \underbrace{c_1 x_n + c_2 y_n}_{\text{comb. lineare}}$$

Se la ricorrenza è di ordine 2 (dipendenza dai 2 termini prec.) allora la succ. è univoc. determinata conoscendo a_0 e a_1. Quindi se x_n e y_n sono scelte bene, posso trovare c_1 e c_2 in modo da soddisfare a_0 e a_1. La condizione è che

$$\begin{cases} c_1 x_0 + c_2 y_0 = a_0 \\ c_1 x_1 + c_2 y_1 = a_1 \end{cases}$$

ha soluzione (unica) per ogni a_0, a_1 $\iff x_0 y_1 - x_1 y_0 \neq 0$

Tutta la teoria del basic serve a produrre 2 soluzioni speciali x_n e y_n (di solito di tipo esponenziale).

La teoria vale per successioni a valori reali, ma anche a valori complessi

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n$$

Polinomio: $x^2 - 4x + 13 = 0$ $\qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

Tutte le soluzioni (complesse) sono del tipo

$$a_n = c_1 \cdot (2+3i)^n + c_2 (2-3i)^n$$

Se voglio una formula senza complessi $\qquad 2+3i = \rho e^{i\theta}$, $\quad 2-3i = \rho e^{-i\theta}$

$$a_n = c_1 \cdot \rho^n e^{in\theta} + c_2 \rho^n e^{-in\theta}$$

$$\rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = x_n$$
$$\rho^n e^{-in\theta} = \rho^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)) = y_n$$

Se x_n e y_n vanno bene, allora vanno bene anche

$$\frac{1}{2}(x_n+y_n)=\rho^n\cos(n\theta) \qquad \frac{1}{2i}(x_n-y_n)=\rho^n\sin(n\theta)$$

Ogni combinazione lineare di x_n e y_n si può scrivere (cambiando i coefficienti) come comb. lin. di

$$\rho^n\cos(n\theta) \qquad \rho^n\sin(n\theta)$$

—o—o—

Se Mostro (n) = polinomio di grado n cerco $\bar{a}_n$ = polinomio dello stesso grado

Se Mostro $(n) = k^n$, allora cerco $\bar{a}_n = \lambda\cdot k^n$ con stesso k e λ da trovare.

<u>Esempio</u> $(n+1)$ $\qquad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+4^n$

Cerco soluzione $\quad a_n=\lambda\cdot 4^n$:

$$\lambda\cdot 4^{\cancel{n}+2}=5\lambda 4^{\cancel{n}+1}-6\lambda \cancel{4^n}+\cancel{4^n}$$

$$16\lambda=20\lambda-6\lambda+1 \qquad 2\lambda=1 \qquad \lambda=\frac{1}{2}$$

Sol. generale $\qquad a_n=\frac{1}{2}\cdot 4^n+c_1 2^n+c_2\cdot 3^n$

$x^2-5x+6=0 \qquad x=2,\ x=3$

<u>Esempio</u> $(n+\frac{3}{2})$ $\qquad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+3^n$. Cerco $\bar{a}_n=\lambda 3^n$

$$\lambda 3^{\cancel{n}+2}=5\lambda 3^{\cancel{n}+1}-6\lambda \cancel{3^n}+\cancel{3^n}$$

$$\cancel{9\lambda}=\cancel{15\lambda}-\cancel{6\lambda}+1$$

Bella scoperta: 3^n era soluzione della ricorrenza senza Mostro!

Basta aggiungere una n: tentativo $\bar{a}_n=\lambda n\cdot 3^n$

$$\lambda(\cancel{n}+2)3^{\cancel{n}+2}=5\lambda(\cancel{n}+1)3^{\cancel{n}+1}-\cancel{6\lambda n}\cancel{3^n}+\cancel{3^n};\quad 18\lambda=15\lambda+1 \quad \text{Ok.}$$

In generale si sa risolve con Mostro (n) = somma di esponenz. + polinomio in n

E se ci fosse $n^2 4^n$ tento $(an^2+bn+c)\,4^n$

$n^2 3^n$ " $(an^2+bn+c)\cdot n4^n$

—o—o—

$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ NON È LINEARE

Idea: se fosse $a_n = \cos\theta$, sarebbe $a_{n+1} = 2\cos^2\theta - 1$
$= \cos(2\theta)$

da cui per induzione $a_n = \cos(2^n\theta_0)$ dove $a_0 = \cos\theta_0$

E se fosse $a_0 = 2010$? Esiste θ_0 t.c. $\cos\theta_0 = 2010$??

Sì, ma nei complessi

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

ha senso per z complesso! $[e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)]$

La funzione $z \to \cos z$ vista $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è iniettiva? NO!

È surgettiva? $\boxed{\text{SI}}$

$$\cos z = w \qquad e^{iz}+e^{-iz} = 2w \qquad e^{iz} = y$$

$y + \frac{1}{y} = 2w \rightsquigarrow$ trovo $y \neq 0 \rightsquigarrow$ devo risolvere $e^{iz} = y$

—o—o—

EQUAZIONI FUNZIONALI

$$f: S \to S$$

Cauchy: $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in S \quad \forall y \in S$

$S = \mathbb{Q}$. Allora $\exists \lambda \in \mathbb{Q}$ t.c. $f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad (\lambda = f(1))$

Passi fondamentali:
- $f(0) = 0$
- conquista di $\mathbb{N}$ (induzione su $\mathbb{N}$)
- conquista di $\mathbb{Z}$ (dopo aver osservato che f è dispari)
- conquista di $\mathbb{Q}$ (si dimostra per induzione che $\underbrace{f(nx) = n f(x)}_{\forall x \in \mathbb{Q}}$, poi si pone $x = \frac{p}{q}$ e $n = q$ ...)

Andare oltre $\mathbb{R}$ non è possibile

$$S = \{ a + b\sqrt{2} \; ; \; a \in \mathbb{Q}, \; b \in \mathbb{Q} \}$$

Se pongo $f(a+b\sqrt{2}) = b + a\sqrt{2}$, questa risolve la Cauchy senza essere lineare (cioè del tipo λx)

BASI DI HAMEL Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ è una base di Hamel se ha 2 proprietà.

① Per ogni $x \in \mathbb{R}$, esistono $n \geq 1$ intero, esistono $b_1, \dots, b_n \in B$, diversi, esistono $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ tali che

$$\boxed{x = q_1 b_1 + q_2 b_2 + \dots + q_n b_n}$$

② Se $b_1, \dots, b_n$ sono elementi diversi di B, e $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, e

$$q_1 b_1 + \dots + q_n b_n = 0$$

allora $q_1 = \dots = q_n = 0$.

<u>Corollario</u> La scrittura di cui al punto ① è unica

Sostanzialmente ogni reale x si può scrivere in <u>modo unico</u> come comb. lineare <u>finita</u> di elementi di B.

Per dimostrare l'esistenza di una base di Hamel serve il lemma di Zorn (dim. difficile)

Base di Hamel permette di costruire una soluzione della Cauchy non lineare (esattamente come con $a+b\sqrt{2}$)
Scelgo 2 elementi b_1 e b_2 della base di Hamel e li "scambio"
Tutti gli altri li lascio fissi

$$x = q_1 b_1 + q_2 b_2 + \text{altro}$$
$$f(x) = q_1 b_2 + q_2 b_1 + \text{altro}$$
si vede che risolve la Cauchy.

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x+f(y)) = y + f(x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

1) $x=0 \Rightarrow f(f(y)) = y + f(0) \Rightarrow f$ iniettiva e surgettiva.
Per la surgettività esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0)=0$

2) $x=y=x_0 \Rightarrow f(x_0+0) = x_0 + f(x_0)$
$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{}} \quad = x_0 \qquad \Rightarrow f(0)=0$$

3) Back to 1) $\quad f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$
Pongo $y = f(z)$
$$f(x+f(f(z))) = f(z) + f(x)$$
$$f(x+z) = f(x) + f(z) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall z \in \mathbb{R}$$
Cauchy!!! $\Rightarrow f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

4) Posso fare conquista di $\mathbb{R}$? NO!!
L'esempio è lo stesso di prima (f scambia b_1 e b_2 e lascia gli altri invariati)

Da $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ok $f(x) = \lambda x$ e poi si trova $\lambda = \pm 1$
Da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non si va avanti (ci sono infinite soluzioni)

Cosa aggiungere alla Cauchy per andare in $\mathbb{R}$?
Una cosa a scelta tra
* monotonia
* continuità
* limitatezza inferiore / superiore in un qualunque intervallo
* un qualsiasi cerchietto nel piano in cui non entra il grafico

<u>Idee della dim</u> ① wlog $f(1)=0$, quindi $f(\mathbb{Q})=0$
(basta considerare $g(x) = f(x) - f(1)\, x$)
② per assurdo $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $g(r) > 0$
Allora esistono punti del tipo ($q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$)
$q_1 + q_2 r > 0$ e vicini a zero quanto voglio con q_2 grande quanto voglio.
Ma $g(q_1 + q_2 r) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(q_1)}} + \underbrace{q_2\, g(r)}_{\text{enorme}}$

—o—o—

$\boxed{\text{IMO } 1992-2}$ $f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

①
$x=0 \Rightarrow f(f(y)) = y + [f(0)]^2 \Rightarrow f$ iniettiva e surgettiva

② Sarebbe bello $f(0)=0$. Facciamo finta di averlo fatto
Back to ① $f(f(y)) = y$ $\forall y \in \mathbb{R}$

③ $y=0 \Rightarrow f(x^2) = [f(x)]^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

④ $y = f(z)$: $f(x^2 + f(f(z))) = f(z) + [f(x)]^2$

$\Updownarrow$ ② $\Updownarrow$ ③

$f(x^2 + z) = f(z) + f(x^2)$

Pongo $x^2 = y$ e ottengo

$$f(y+z) = f(y) + f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall y \geq 0}$$

Variante della Cauchy, che ha le stesse conclusioni
$\Rightarrow$ conquista di $\mathbb{Q}$

(5) Cerco monotonia. La (4) la posso riscrivere come

$$f(z+x^2) = f(z) + [f(x)]^2 \quad \Rightarrow \text{monotonia crescente}$$

va fatto formale, ma

$$f(z + \text{roba positiva}) = f(z) + \text{altra roba positiva}$$

$\Rightarrow f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Sostituendo si trova λ.

Come dimostrare che $f(0)=0$. $\quad f(0)=a \quad f(x_0)=0$

$y=0 \Rightarrow f(x^2+a) = [f(x)]^2 \quad$ (☆☆)
$x=0 \Rightarrow f(f(y)) = y+a^2 \quad$ (☆)
$x=y=0 \Rightarrow f(a) = a^2$
$y=a \Rightarrow f(x^2+a^2) = a + [f(x)]^2$
Applico f:

$$f(f(x^2+a^2)) = f(a+[f(x)]^2)$$

(☆) (☆☆)

$$x^2+2a^2 = [f(f(x))]^2 = [x+a^2]^2$$

svolgendo si vede che l'unica possibilità è $a=0$.

—o—o—

$\boxed{\text{BMO 1997-4}}$ $\quad f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1)
$x=0 \Rightarrow$ iniettiva e surgettiva $\quad f(f(y)) = a^2+y$
$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0)=0$

(2) $x=x_0 \Rightarrow f(f(y)) = y$. Confrontando con il punto (1) otteniamo $a=0$ (quindi $f(0)=0$) e $x_0=0$

③ $y=0 \Rightarrow f(xf(x)) = [f(x)]^2$

④ Idea nuova: $x = f(z)$:

$$f(f(z)\cdot f(f(z))) = [f(f(z))]^2$$

$$f(f(z)\cdot z) = z^2$$

e confrontando con ③ ottengo $[f(x)]^2 = x^2$, da cui

$$f(x) = \pm x.$$

ACHTUNG !!! OCCHIO AL MISTONE $f(x) = x$ per certi x e $f(x) = -x$ per altri x.

⑤ Supponiamo $f(a) = a$ e $f(b) = -b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Pongo $x = +b$ e $y = a$

$$f(-b^2+a) = b^2+a$$

$-b^2+a = b^2+a \rightsquigarrow b=0$ NO

$b^2-a = b^2+a \rightsquigarrow a=0$ NO

⑥ Verifica...

—o—o—

$\boxed{\text{BMO 2007-2}}$ $f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)\cdot y$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boxed{y = f(x)}$ $f(2f(x)) = f(0) + 4f^2(x)$

$= f(0) + [2f(x)]^2$

Quindi $f(z) = f(0) + z^2$ e queste verificano

NO!!! SI! Ma solo $\forall z \in 2\,\mathrm{Im}(f)$

Uno sa che iniettività e surgettività NON ci sono.

Come sfruttare la y fuori

Provo con $y = f(x) - 2f(z)$

$$f(2(f(x)-f(z))) = \underset{\text{lo so}}{f(2f(z))} + 4f(x)(f(x)-2f(z))$$

$$f(2(f(x)-f(z))) = f(0) + 4[f(z)]^2 + 4[f(x)]^2 - 8f(x)\cdot f(z)$$

$$= f(0) + [2(f(x)-f(z))]^2$$

Quindi $f(x) = f(0) + x^2$ su tutti gli x che sono $2(\mathrm{Im} - \mathrm{Im})$ e spero che questo sia tutto $\mathbb{R}$

$$f(\text{Mostro}) - f(\text{Mostro}) = 4y\,f(x)$$

Se $f(x) \equiv 0$ c'è poco da fare

Se $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) \neq 0$, allora il RHS è tutto $\mathbb{R}$

Quindi

$$f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{e anche}$$

$$2(f(\mathbb{R}) - f(\mathbb{R})) = \mathbb{R}.$$

—o—o—

$\boxed{\text{IMO 1999-6}}$ $f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$

① $x = 2f(y) \Rightarrow \cancel{f(f(y))} = \cancel{f(f(y))} + 2f^2(y) + f(2f(y)) - 1$

$$f(2f(y)) = 1 - 2[f(y)]^2 = 1 - \frac{1}{2}[2f(y)]^2$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in 2\,\mathrm{Im}(f)$$

② $\boxed{x = f(y)}$ $\underbrace{f(0)}_{a} = 2f(f(y)) + [f(y)]^2 - 1$

$$f(f(y)) = \frac{a+1}{2} - \frac{1}{2}[f(y)]^2$$

(3) $x = f(z)$ $\quad f(f(z)-f(y)) = \underbrace{f(f(y))}_{\text{so fare}} + f(z)\cdot f(y) + \underbrace{f(f(z))}_{\text{so fare}} - 1$

$$= -\frac{1}{2}\left[f(z)-f(y)\right]^2 + \text{costante}$$

$\Rightarrow \quad f(x) = \text{costante} - \frac{x^2}{2}$ per ogni $x \in \text{Im}(f) - \text{Im}(f)$

(4) Resta da dire che $\text{Im} - \text{Im} = \mathbb{R}$

$$f(x-f(y)) - f(x) = f(f(y)) + x f(y) - 1$$

Se $f \equiv 0$ non funziona
altrimenti $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(y_0) \neq 0$. Il RHS percorre tutto $\mathbb{R}$.