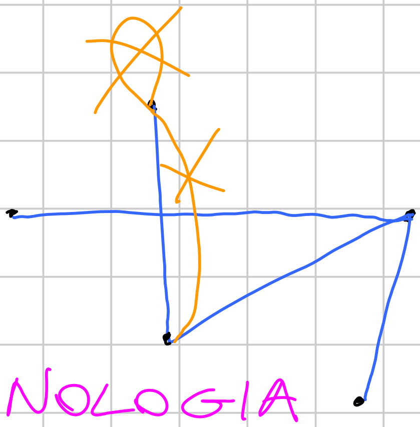
COMBINATORIA 2 (medium)

Titolo nota — 10/09/2010

TEORIA DEI GRAFI

(A, E)



vertici (nodi) $\quad A$

archi $\quad E \subseteq \left\{ \{a,b\} \mid \begin{matrix} a \neq b \\ \in A \end{matrix} \right\}$

TERMINOLOGIA

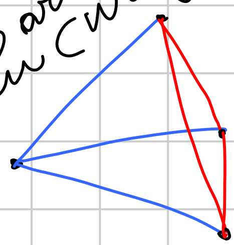
CONNESSO, CICLO, ALBERO (connesso aciclico), COMPLETO K^n

BIPARTITO

TEORIA DI RAMSEY

6 persone ;
- $\exists$ 3 persone che si conoscono
- $\exists$ 3 persone 2 a 2 sconosciute

3 archi blu (wlog)

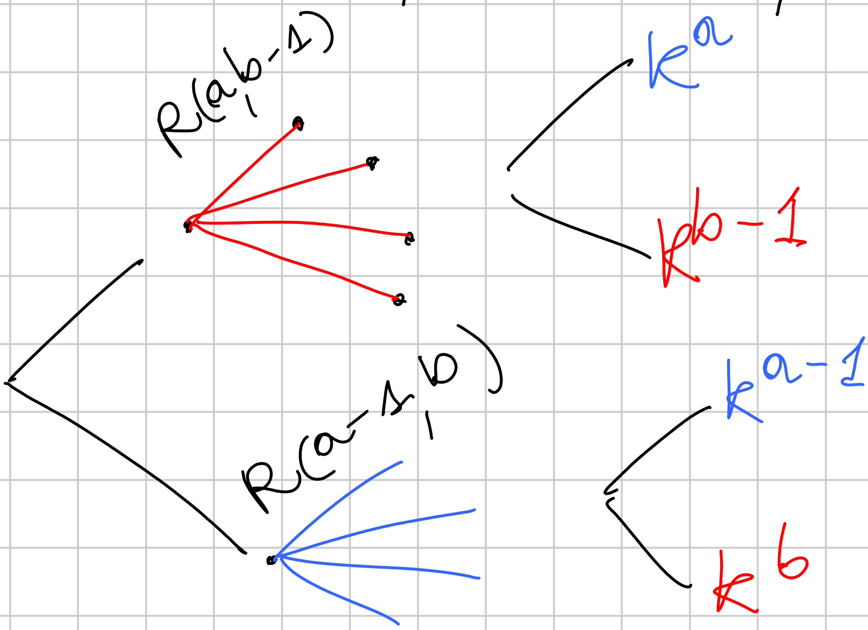


K^6 contiene, comunque 2-colorato, K^3 o K^3

(RAMSEY) $a, b \ \exists\ R(a,b)$ t.c. se 2-coloro $K^{R(a,b)}$ in rosso e blu ho un K^a o un K^b

dim (induzione su $a+b$)

$$R(a,b) \le R(a,b-1) + R(a-1,b)$$



(IMO 1964, 4) Ho 17 studiosi intrattengono corrispondenza (2 a 2) su 3 argomenti.
$\exists$ 3 studiosi che corrispondono sullo stesso argomento.

$$R(3,3,3) = ?$$

$$R(a,b,c) \le R(a-1,b,c) + R(a,b-1,c) + R(a,b,c-1) - 1$$

$$\Rightarrow R(3,3,3) \le 3\underbrace{R(2,3,3)}_{=6} - 1$$

(IMO 1978, 6) $\{1 \dots 1978\}$ 6-colorato

$\exists$? una terna monocromatica (x, y, z) con $x + y = z$

[Schur]

se $|i - j|$ é

$$\underbrace{R(3,3,3,3,3,3)}_{r} \Rightarrow$$ c'é un triangolo monocromatico (wlog)

$\rightsquigarrow$ $|i-j|, |j-k|, |k-i|$ sono

$\rightsquigarrow$ $i - \cancel{j} + \cancel{j} - k = i - k$

$i \geq j \geq k$

$R(3 \dots 3) \leq 1978$

• $$\underbrace{R(3 \dots 3)}_{r} - 1 \leq r\Big(\underbrace{R(3 \dots 3)}_{r-1} - 1\Big) + 1$$

$S_r =$

$\boxed{5}$

$S_r < r S_{r-1}$

$$R(3,3,3,3,3,3) - 1 < 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \, S_2$$

$$R(3,3,3,3,3,3) \leq 1800$$

ES $R(\underbrace{3 \dots 3}_{r}) \le \lfloor e r! \rfloor + 1$

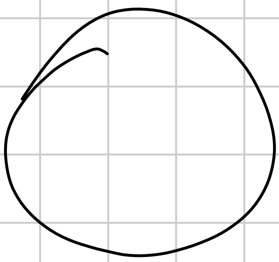
parte intera

Se chiedessi $x + y = 2z$

↳ $x - z = z - y$

[Van der Waerden] dati r, k esiste $W(r,k)$ tc. se r-coloro i numeri $\{1 \dots W(r,k)\}$ trovo una prog. arit. monocromatica lunga k.

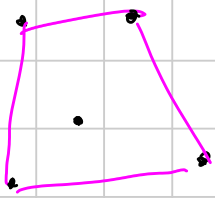
ES



colorata con r colori allora esistono infiniti (più che numerabili) triangoli isosceli monocromatici.

HAPPY END THEOREM

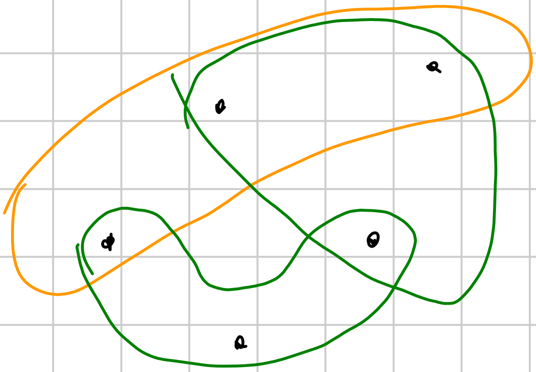
Dati 5 pti nel piano (in posizione generale) ce ne sono 4 che formano un quadrilatero convesso.



[Erdős - Szekeres] $\forall n \; \exists N$ tc dati N pti nel piano i.p.g. esistono n

che formano un n-agono convesso.

IPERGRAFO



Vale Ramsey!

Dati r colori e $a_1, a_2 \dots a_r$ esiste

$$R_k(a_1, a_2, \dots a_r)$$

- Un n-agono è convesso $\Longleftrightarrow$ lo sono tutti i suoi quadrilateri.
- $R_4(5, n)$ va bene!

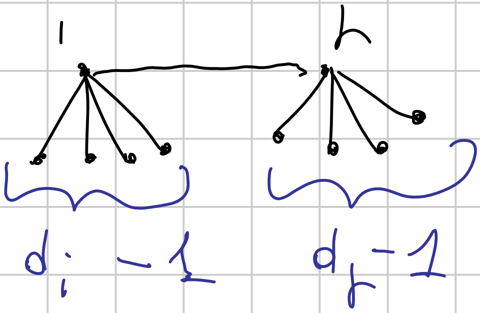
EXTREMAL GRAPH THEORY

Quanti archi minimo metto su n vertici per assicurare un K^3?

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$$

Dimostriamo! G è un graf senza triangoli "estremale" su n vertici.

$|E|$ archi



$$d_i - 1 + d_j - 1 \leq n-2$$
$$d_i + d_j \leq n$$

$$n|E| \geq \sum_{\underbrace{ij}_{\text{arco}}} d_i + d_j = \sum_i d_i^2$$

$$\sum d_i^2 \cdot \underbrace{\sum_i 1^2}_{= n} \geq \left(\sum d_i\right)^2$$

$$n^2 \cancel{|E|} \geq 4|E|^{\cancel{2}} \rightsquigarrow |E| \leq \frac{n^2}{4}$$

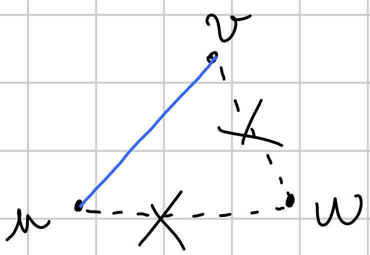
[Turán] Un grafo su n vertici senza k-sottografi completo ha al più $\left\lfloor \frac{(k-2)n^2}{2(k-1)} \right\rfloor$

$$n = (k-1)h$$

$$\binom{k-1}{2} h^2 = \frac{\cancel{(k-1)}(k-2)\,n^2}{2\,\cancel{(k-1)}(k-1)}$$

G grafo senza K^k estremale.
dimostro che è $k-1$-partito completo.

CLAIM

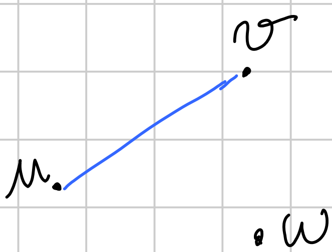


NON può succedere

CASO 1 $d(w) < d(u)$

Cancello w e "raddoppio" u

dimostro.



→ gli archi diventano
$$|E| - d(w) + d(u) > |E|$$

→ può contenere un K^k ?

- senza $\tilde{u}$? NO
- con u e $\tilde{u}$? NO
- con $\tilde{u}$ e senza u ? NO

CASO 2 $\quad d(w) \geq \begin{matrix} d(u) \\ d(v) \end{matrix}$ $\quad$ Cancello u e v e "triplico" w

$$\to |E| - d(u) - d(v) + 1 + 2d(w) > |E|$$

→ può contenere un K^k ?

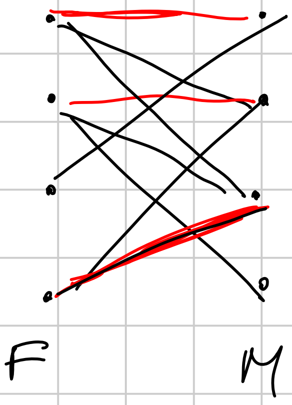
- con più di uno dei w fratelli ? NO
- con (al più) uno dei w ? NO

ES $\quad 5n$ punti $\quad 10n^2 + 1$ archi;
comunque lo coloro con 2 colori ha un triangolo monocromatico.

$$\frac{(\overset{6}{k} - 2)(5n)^2}{(k-1)2} \qquad \frac{4 \cdot 25 n^2}{10} = 10n^2$$

⇝ il mio grafo ha un K^6 ⇝ RAMSEY ...

MATCHING



donne

$|A|$
$\shortparallel$
$|B|$

uomini

ogni donna ha un po' di uomini che piacciono.

Posso sposare le tutte donne a partner graditi?

uomini graditi alle tizie di S

$$S \subseteq A \qquad |\Gamma(S)| \geq |S|$$

CONDIZIONE NECESSARIA

[Hall] $\forall S \subseteq A \quad |\Gamma(S)| \geq |S| \iff$ esiste un "perfect matching"

$\Leftarrow$ già fatta

dimostriamo! induzione su $|A| = |B|$

$\forall S \quad |\Gamma(S)| \geq |S|$

$|\Gamma(S)| = |S|$
$S \neq A$

- S ha un perfect matching con $\Gamma(S)$
- $A \setminus S$ ha un perfect matching con $B \setminus \Gamma(S)$

$- \; S' \subseteq A \setminus S \quad |\Gamma(S') \cap (B \setminus \Gamma(S))| \geq |S'|$

per assurdo ho $<$

$$\Gamma(S' \cup S) < |\Gamma(S') \cap (B \setminus \Gamma(S))| + \underbrace{|\Gamma(S)|}_{= |S|} < |S' \cup S|$$

$\llcorner |\Gamma(S)| > |S| \quad \forall S \subsetneq A$

prendo x e un suo vicino y.

Il grafo $A \setminus \{x\} \cup B \setminus \{y\}$ soddisfa la condizione:

per ass.

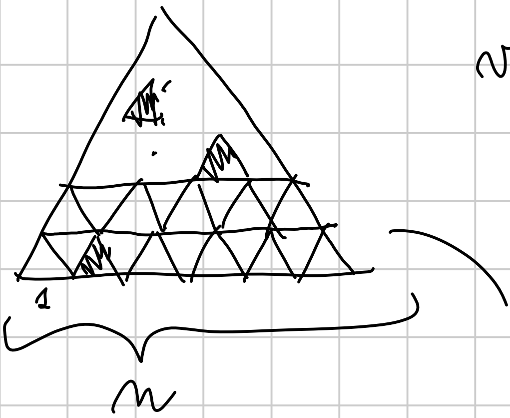
$S' \subseteq A \setminus \{x\} \quad |\Gamma(S')| > |S'|$

$\llcorner$ c'è y $\rightsquigarrow$ $|\Gamma(S') \setminus \{y\}| \geq |S'|$

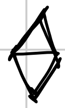
se non c'è ancora meglio

$\square$

$\boxed{\text{ES}}$ (ISL 2006. C6)

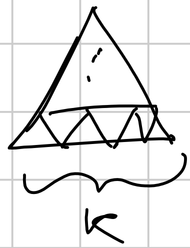


voglio tassellarlo



n buchi

$\forall$ sottotriangolo da k



ha almeno k buchi

TEOREMA DI DILWORTH

$(X, \leq)$

poset

ORDINE PARZIALE

$\leq$ è una RELAZIONE su X

- riflessiva ($x \leq x$)
- antisimmetrica ($x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$)
- transitiva ($x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$)

$(\mathbb{R}, \geq)$, $(\mathbb{R}^2, \geq)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$(a,b) \geq (c,d) \iff a \geq c,\ b \geq d$

[Dilworth] La cardinalità della massima anticatena è uguale al minimo numero di catene la cui unione è tutto.

$(X, \leq)$ poset $\quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$ è una CATENA (di lunghezza n)

Un insieme $A \subseteq X$ con elementi 2 a 2 NON CONFRONTABILI è un' ANTICATENA.

[Dilworth duale] Sostituisci "catena" con "anticatena" e viceversa.

[ROM TST '05] n^2+1 interi tc $\forall$ sott da $n+1$ c'è una coppia di el. $(a,b) \mid a \mid b$, allora posso trovare

$a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_{n+1}$

la massima anticatena ha # $\leq n$.

$\rightsquigarrow$ riesco a coprire tutto con al + n catene

Quanto possono essere lunghe?
Almeno una è lunga (almeno) $n+1$.

[Erdős – Szekeres] Successione di $ab+1$ reali distinti
Allora ha una sottosuccessione crescente da $a+1$, o una decrescente da $b+1$.

$x_1 \ \ldots \ x_{ab+1}$ $\qquad x_i \prec x_j$ se $i<j$, $x_i < x_j$

max anticatena $\leq b$

$\rightsquigarrow$ ricopro con b catene (succ crescenti)

$\rightsquigarrow$ $\exists$ una catena lunga $a+1$

alessandra.caraceni@sns.it