SENIOR 2010 – M – PRELIMINARI

INDUZIONE CLASSICA $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

INDUZIONE ESTESA $P(0), P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

PRINCIPIO MINIMO INTERO: $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min A$

Esempio 1 Esistenza della fattorizzazione (non unicità)

$n+1 \to$ o è primo

$\to$ o $n+1 = \underbrace{a \cdot b}_{\text{più piccoli}}$

Idem sui polinomi.

Esempio 2 BEZOUT: Dati a, b e posto $d = (a,b)$

$\exists\, x, y$ t.c. $ax + by = d$

Dim.: induzione sul numero di divisioni euclidee.

Supponiamo wlog $a > b$. Allora

$a = qb + r$ Fatto generale: $0 \leq r < b$

$d = (a,b) = (b,r)$

La coppia (b, r) produce d con una divisione in meno

$\bar{x} b + \bar{y} r = d$ per Hp induttiva

$$\bar{x} b + \bar{y}(a - qb) = d \qquad \underbrace{(\bar{x} - q\bar{y})}_{y} b + \underbrace{\bar{y}}_{x} a = d$$

Se $a = b$, it's easy!

— o — o —

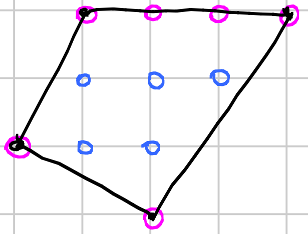
Esempio 3 Teorema di PICK.

Dato un poligono nel piano con vertici a coord. intere (anche non convesso), allora

$$\text{Area} = I + \frac{1}{2} B - 1$$

I = p.ti coord. intere int.

B = " " " bordo



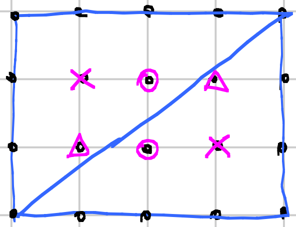
$I = 5$ $\quad$ $B = 6$

$$\text{Area} = 5 + 3 - 1 = 7$$

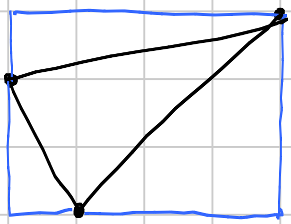
<u>Idea della dim.</u>

Caso Facilissimo: rettangoli (esercizio)

Caso Semifacile: triangoli rettangoli
Cercare di capire come i p.ti cambiano di categoria dal rettangolo al triangolo

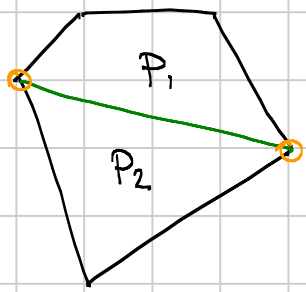


Caso un po' meno facile: triangoli qualunque
Idea: ogni triangolo è differenza di un rettangolo, meno un po' di triangoli rettangoli.
Ci sono un po' di casi ...



<u>Induzione</u>: un poligono qualunque lo divido in 2 tracciando una diagonale
(ovvio per i convessi, ma non ovvio per i non convessi)

I 2 sottopoligoni hanno meno lati.
Per ipotesi induttiva



$P = P_1 \cup P_2$

$$\text{Area}(P_1) = \boxed{I_1} + \frac{1}{2}\boxed{B_1} - 1$$

$$\text{Area}(P_2) = \boxed{I_2} + \frac{1}{2}\boxed{B_2} - 1$$

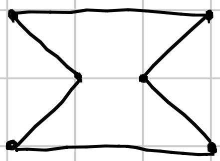
I due estremi della diagonale "uccidono un -1"

interni a P, ma non tutti

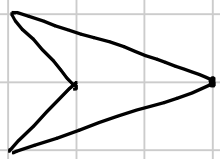
quelli sulla diagonale diventano interni con peso 1, quelli sul resto del bordo vanno con peso $\frac{1}{2}$ nel bordo di P

Come suddividere un non convesso in 2 sotto poligoni ?

Domanda 1: è vero che da ogni vertice esce una diagonale buona?

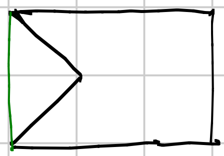


No!



Domanda 2: come trovo una diagonale interna ?

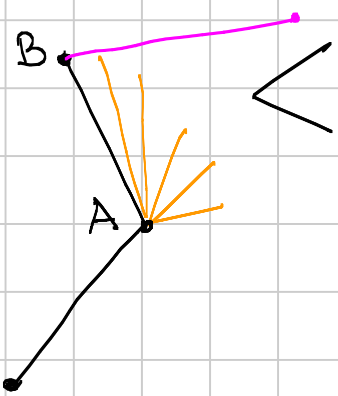
Idea alternativa: invece di dividere, convessifico e poi ragiono sulla differenza.



$P = P_1 \setminus P_2$

P_1 e P_2 hanno meno lati e ragiono come prima.

Partiamo da un vertice con angolo $> 180°$



Idea: uniamo con i p.ti del lato rosa

→ o arriviamo all'altro estremo del lato rosa

→ o nel frattempo abbiamo incontrato un altro vertice

N.B. il rosa non è detto che sia quello che esce da B...

Esempio 4 Giochi finiti.

→ 2 giocatori

→ regole

→ $\exists M$: la partita si conclude dopo $\leq M$ mosse con un vinc.

Teorema: in ogni gioco finito esiste una strategia vincente per uno dei 2 giocatori

Dim. Induzione su M.

$M=1$ banale ($M=0$ ancora meglio!)

$M \Rightarrow M+1$ Idea: fatta una mossa ottengo un gioco con al + M mosse.

Quindi ci sono 2 casi

→ Alberto può muovere in modo che il gioco nuovo sia vincente per il secondo: muove così e vince

→ tutti i nuovi giochi sono vincenti per il primo: Alberto si arrende

— o —

Esempio 5 Stupido $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$ $n \in \mathbb{N}$

Provo per induzione ...

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{\text{Hp ind.}}{\overset{\text{serve } x \geq -1}{\geq}} (1+x)\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3$$

$$\overset{?}{\geq} \frac{n(n+1)}{2}x^2$$

Spero che $\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\cancel{x^2} + \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}x^{\cancel{3}} \overset{?}{\geq} \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\cancel{x^2}$

$(n-1)(1+x) \overset{?}{\geq} n+1$ Se $x \sim 0$ NON VA!!!

$\boxed{\text{Più FORTE}}$ $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

Questo viene banalmente per induzione!!!

Esempio 6 $\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n^2} \leq 2$

Per induzione non viene ... così!

Più forte: $\quad 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

Proviamo ... $\quad n=1$: ok

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$1+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} 2-\frac{1}{n+1}$$

Quindi spero che

$$\frac{1}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}$$

Resta $\quad n^2+n \leq n^2+n+1 \quad$ Ok!!!

Esercizio per casa $\quad$ Provare con $\quad \frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\dots+\frac{1}{n^a}=f_a(n)$

Dimostrare che è limitata se $a>1$.

Idea 1: $\quad f_a(n) \leq 100-\frac{1}{n} \quad$ Non può funzionare!

Idea 2: $\quad f_a(n) \leq M_a-\frac{1}{n} \quad$ con M_a opportuno

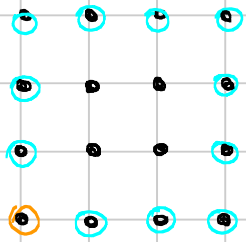
(Non dovrebbe funzionare...)

Idea 3: $\quad f_a(n) \leq M_a-\frac{N_a}{n^{a-1}}$: si tratta di scegliere bene M_a col N_a

Ci sta sotto $\quad \int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx = \left[\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^n = \frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{n^{a-1}}\right)$

Esempio 7

$\boxed{m=3}$ →



IMO 2007 – 6 Facilitato
Reticolo $(n+1)\times(n+1)$ Trovare minimo numero di rette che coprono i p.ti del reticolo – Basso sx.

Risposta: $2n$. P.ti del bordo: $4n-1$
Ogni retta ne tocca al + 2 $\Rightarrow$ almeno $\frac{4n-1}{2} = 2n - \frac{1}{2}$ rette, quindi almeno $2n$ rette.
Ovviamente è falso per colpa delle rette non diagonali

Enunciato + forte: dato rettangolo $(n+1)\times(m+1)$ servono almeno $n+m$ rette
Dim: stessa (p.ti del bordo) e se ho una retta verticale scendo di 1 in una dimensione (induzione su $m+n$)

Achtung! I passi base sono gli $1\times m$ e $n\times 1$
(volendo anche questi si riducono allo stesso modo)

Soluzione "ufficiale" che si generalizza in 3 variabili

Fatto generale: $P(x,y)$ polinomio che si annulla sui p.ti del reticolo meno p.to base
$\Rightarrow$ grado $P \geq m+n$
Basta poi prendere $P(x,y)$ = prodotto equazioni rette

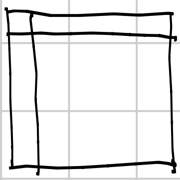
Induzione su $m+n$, o meglio principio del minimo intero.
Supponiamo che per $m_0 \times n_0$ abbia polinomio di grado + piccolo $P(x,y)$. Come trovo polinomio per $(m_0-1)\times n_0$?

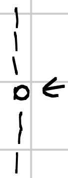
$Q(x,y) = P(x+1,y) - P(x,y)$ Tutte le proprietà e grado + basso.

Esercizio Matrice $n \times n$ di interi simmetrica $a_{ij} = a_{ji}$
Tutti Dispari sulla diagonale
$\Rightarrow$ esistono un po' di colonne che sommate danno una colonna di tutti Dispari

Tradotto: matrice in $\mathbb{Z}_2$ simmetrica con tutti 1 sulla diagonale.
Esiste un vettore in $\mathbb{Z}_2$ che moltiplicato per la matrice dà tutti 1.

Variante: grafo con lampadine. Ad ogni mossa cambio stato una lampadina e tutte le sue collegate.

Induzione:  se va male ottengo $\rightsquigarrow$ 

Analogo: killando i-esima riga e i-esima colonna 

Idea: se posso ottenere 2 colonne, posso ottenere la somma
Posso ottenere 2 uni dove voglio e resto zeri
$\Rightarrow$ se n è pari ho finito.

Nel caso dispari basterebbe riuscire ad ottenere un # dispari di uni, ma per questo basta sommare tutte le colonne
(N.B. funziona solo se n è dispari)

Achtung! L'ipotesi l'ho però usata anche per n pari per avercela sull' $n-1$ dispari precedente!