# SENIOR 2011 – ALGEBRA (Advanced)

Titolo nota 09/09/2011

$$f(x+f(y)) = y + f(x)$$

$x=0 \Rightarrow$ iniett. e surg. ; $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0)=0 \rightsquigarrow x_0 = 0$

$y = f(z) \to$ Cauchy $\longrightarrow f(x) = \pm x$ su $\mathbb{Q}$

$\{q_i\}_{i\in I}$ base $\qquad f(q_1) = -q_1 \qquad f(q_i) = q_i$

— o — o —

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodiche $\qquad f(x)+g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Base di Hamel $= \{q_1\} \cup \{q_i\}_{i\in I}$

Ogni $x\in\mathbb{R}$ si scrive $\qquad c_1 q_1 + \sum_{i\in I} c_i q_i$

solo # finito $\neq 0$

$f(x) = c_1 q_1 \qquad g(x) = x - c_1 q_1$

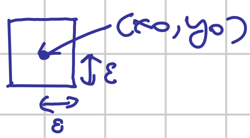
periodica di periodo uno qualunque dei $q_i \neq q_1$ $\qquad$ periodica di periodo $q_1$

$f(x+q_i) = f(c_1 q_1 + \text{roba}) = c_1 q_1$

— o — o —

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è sol. della Cauchy e $\exists$ quadrato del piano in cui il grafico non entra, allora $f(x) = f(1)\,x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Dim.</u> Posso supporre WLOG che $f(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{Q}$.
Suppongo $\exists\, y\in\mathbb{R}$ t.c. $f(y)\neq 0$ WLOG $>0$ (sia $y$, sia $f(y)$)
Allora il grafico entra in ogni $\square$.




Voglio entrare in $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$
Considero

$f(q_1+q_2 y)$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$
$= f(q_1) + q_2 f(y)$
$= q_2 f(y) \longrightarrow q_2 f(y)$ può essere vicino a piacere a $y_0$
$\qquad\qquad \longrightarrow q_1 + q_2 y$ " " " " " $x_0$

Frazioni egizie  Dato $X \subseteq \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{x} < r$$

Allora $\exists\ X \subseteq Y \subseteq \mathbb{N}$ t.c. $\displaystyle\sum_{y \in Y} \frac{1}{y} = r$.

Idea euristica: fare scendere il numeratore del resto. Sia $\frac{p}{q}$ il resto.
Se uso $\frac{1}{n}$, il nuovo resto è

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np-q}{nq} \qquad \text{Voglio} \quad \begin{array}{lll} np-q \geq 0 & n \geq \frac{q}{p} & \\ np-q < p & (n-1)p < q & n < \frac{q}{p}+1 \end{array}$$

Quindi $n = \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$. Due pbm: – già usato?
– succ. diverso?

Il successivo sarebbe $\left\lceil \frac{nq}{np-q} \right\rceil > \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$. Basta che sia

$$\frac{nq}{np-q} \geq \frac{q}{p}+1 = \frac{q+p}{p} \iff \cancel{nq}p \geq \cancel{nqp} + np^2 - q^2 - qp$$
$$\iff q^2+qp \geq np^2 \iff \boxed{q(q+p) \geq np^2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}} + \dots \qquad \text{L'ultimo usato } \frac{1}{k} \text{ e } \frac{p}{q} < \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{p}{q} < \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{q}{p} > k+1 \Rightarrow \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil \geq k+2 \text{ e quindi OK.}$$

Serve $q(q+p) \geq \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil p^2$ ; $p^2 \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil < p^2\left(\frac{q}{p}+1\right) = pq+p^2 \leq pq+q^2$

Dim. Step 1 Partendo dal max di $X$ aggiungo frazioni fino a quando posso
Step 2 Parto con $\lceil\ \rceil$.

—o—o—

$\boxed{\text{RMM 2009-4}}$ $\displaystyle\sum_{x \in X} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ posso arrivare a $\frac{\pi}{2}$

Devo aggiungere $\displaystyle\sum_{z \in Z} \arctan\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{prec.}$

$$\tan\left( \qquad\qquad \right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{prec}\right) = \frac{1}{\boxed{\tan(\text{prec})}} \in \mathbb{Q}$$

$$\tan\left(\sum_{z \in Z} \arctan\frac{1}{z}\right) = \frac{p}{q} \text{ dato} \qquad \text{el. di } Z \text{ abbast. grandi}$$

Step 1  Aggiungo finché posso a partire da $\frac{1}{\max x + 1}$

Step 2  Mi fermo su $\arctan \frac{1}{k}$ quando  $\frac{1}{k+1} > \frac{p}{q} \leftarrow$ tan (resto)

Ora uso $\frac{1}{n}$ e vedo che serve

$$\frac{1}{n} < \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \tan\left(\arctan \frac{p}{q} - \arctan \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{p}{q} - \frac{1}{n}}{1 + \frac{p}{qn}} = \frac{np-q}{nq+p}$$

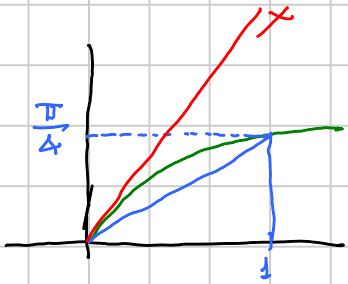
$$np - q < p \qquad n < \frac{q}{p} + 1 \qquad n = \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil.$$

$$\frac{1}{k+1} > \frac{p}{q} \Rightarrow n = \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil \text{ è nuovo}$$

Il successivo $\left\lceil \frac{nq+p}{np-q} \right\rceil > \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$ e questo viene...

— o — o —

$\sum a_n$  Confronto: se $\sum b_n = +\infty$ e $a_n \geq b_n$ $\forall n \geq 1$, allora $\sum a_n = +\infty$




$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$
$\arctan x \geq \frac{\pi}{4} x \quad \forall x \in [0,1]$
} seguono dalla concavità

$$\arctan \frac{1}{n} \geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è decrescente per $x \geq 0$  Alternativa studio $f(x) = x - \arctan x$ e vedo che è strett. crescente.

— o — o —

$$\underbrace{\big[\overbrace{g(f(x))}^{x}\big]'}_{1} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Conosco $f(x)$, $f'(x)$
$g(x)$ inversa

$$g'(\underset{\uparrow \atop g(x)}{f(x)}) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

— o — o —

Confronto asintotico: se $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0, \neq +\infty$

Allora $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ converge
diverge $\Leftrightarrow$ diverge

Dim. per n grande $\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \ell+1$ $\quad \frac{\ell}{2} b_n < a_n < (\ell+1) b_n$

Nell'esempio $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

— o — o —

$\boxed{\text{INF} - \text{SUP}}$ $\boxed{\text{IMO } 1982-3}$ $\{x_n\}$ succ. di reali t.c.

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$$

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \qquad \exists\, n \geq 1 \text{ t.c. espressione } \geq 3{,}999$$

Se $x_n = \frac{1}{2^n}$ diventa $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots < 4$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Partiamo con $x_0$ qualunque e poniamo

$$F(x_0, n) = \inf \{ \text{Espressione al variare delle succ con } x_0 \text{ fissato} \}$$

$$F(x_0, n+1) = \inf \left\{ \frac{x_0^2}{x_1} + F(x_1, n) : x_1 \in [0, x_0] \right\}$$

$$F(x_0, n) \overset{?}{=} F(1, n)$$

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots = x_0 \left( \frac{1}{\frac{x_1}{x_0}} + \frac{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2}{\frac{x_2}{x_0}} + \frac{\left(\frac{x_3}{x_0}\right)^3}{\frac{x_2}{x_0}} + \dots \right)$$

$$\geq x_0 F(1, n)$$

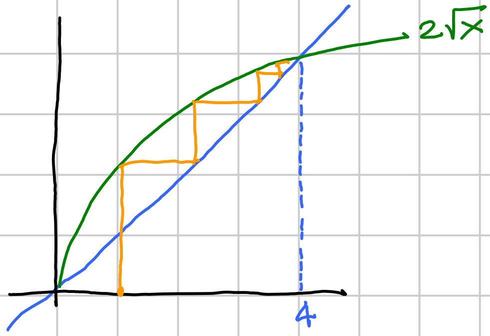
Quindi $F(x_0, n) \geq x_0 F(1, n)$ in realtà anche $= \dots$

$$F(1, n+1) = \inf \left\{ \frac{1}{x_1} + F(x_1, n) \right\}$$

$$\geq \inf \left\{ \frac{1}{x_1} + x_1 F(1, n) \right\}$$

$$\geq \inf \left\{ 2\sqrt{F(1,n)} \right\} = 2\sqrt{F(1,n)}$$

Quindi $F(1,n+1) \geq 2\sqrt{F(1,n)}$




Se $F_{n+1} \geq 2\sqrt{F_n} \Rightarrow F_n$ supera $4-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Dim. per induzione che $F_n \geq 4 - \frac{4}{n}$

Spero $2\sqrt{F_n} = 4\sqrt{1-\frac{1}{n}} \overset{?}{\geq} 4 - \frac{4}{n+1}$

— o — o —

$\boxed{\text{IMO SL 2001}}$ $\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$

$x_i \geq 0$

$F(a,n) = \sup\{$ Espr. con a al denom. invece di 1 $\}$

① Ricorrenza $F(1,n+1) = \sup\left\{\frac{x}{1+x^2} + F(1+x^2, n) : x \geq 0\right\}$

② Dip. da a: $F(a,n) = \frac{1}{\sqrt{a}} F(1,n)$

$$\frac{x_1}{a+x_1^2} + \frac{x_2}{a+x_1^2+x_2^2} + \dots = \frac{1}{a}\left\{\frac{x_1}{1+\frac{x_1^2}{a}} + \frac{x_2}{1+\frac{x_1^2}{a}+\frac{x_2^2}{a}} + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\frac{x_1}{\sqrt{a}}}{1+\left(\frac{x_1}{\sqrt{a}}\right)^2} + \dots\right\}$$

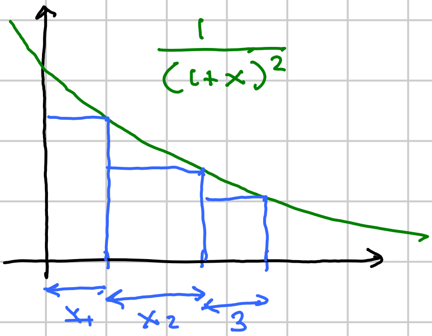
$$F(1,n+1) = \sup \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} F(1,n)$$

$$< \sup\left\{\frac{x}{1+x^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+x^2}}\right\} < \sqrt{n+1}$$

Svolgo tutto e viene $\boxed{\text{WC 2007}}$

**Esercizio** $\displaystyle \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1+x_2}+\dots+\frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{\sqrt{x_1}}{1+x_1}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\frac{\sqrt{x_2}}{1+x_1+x_2}+\dots \underset{C.S.}{\leq} \sqrt{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}\sqrt{\frac{x_1}{(1+x_1)^2}+\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^2}+\dots}$$




$$\int_0^N \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^N = 1-\frac{1}{1+N} < 1$$

$$\frac{x_1}{(1+x_1)^2}+\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^2}+\dots \leq 1-\frac{1}{1+x_1+\dots+x_n}$$

$$\leq \frac{x_1}{1\cdot(1+x_1)}+\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)}$$

$$\boxed{1-\frac{1}{1+x_1}}+\boxed{\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_1+x_2}}$$

— o — o — o —

$\boxed{\text{IMO 1985 – 6}}$ $\quad x_{n+1} = x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right) \qquad x_1$ dato

$\exists! x_1$ t.c. $\quad 0 < x_n < x_{n+1} < 1 \quad$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Come si comporta al variare di $x_1$.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $\exists\, x_1$ per cui $x_n \to +\infty$ $\quad$ ( $x_{n+1} \geq x_n^2$ e se parto alto… )

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ L'insieme degli $x_1$ per cui $x_n \to +\infty$ è una semiretta (se $x_1$ va bene, tutti i successivi vanno bene). Non sappiamo se con o senza p.to iniziale.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Se per un certo $x_1$ esiste $n$ t.c. $x_n > 1$, allora $x_n \to +\infty$.

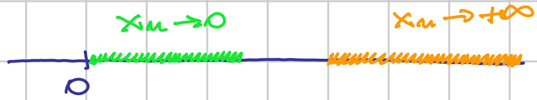
Border line: supponiamo che $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & x_n & \left(x_n+\frac{1}{n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \ell & & \ell & \cdot\ \ell \end{array} \qquad \ell = \ell^2 \Rightarrow \ell = 0, 1.$$

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Per $x_1 = 0$ abbiamo che $x_n \to 0$

Se $x_1$ è abbastanza piccolo, allora $x_n \to 0$
(per induzione si dim. che $x_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\quad x_n \le \frac{1}{2^n}$ )

**Fatto 5** L'insieme degli $x_1$ per cui $x_n \to 0$ è un segmento, con o senza estremo destro.




**Fatto 6** Se $\exists\, n$ t.c. $x_{n+1} < x_n$, allora $x_n$ è decrescente da lì in poi e $x_n \to 0$.
(La decrescenza è una banale induzione (occhio: per la crescenza non vale)).
Teo. mist. (succ. monotone) Una successione monotona e limitata dalla parte giusta ha limite reale.
Quindi $x_n \to \ell$ e $\ell \ne 1$ perchè quando ha iniziato a decrescere stava sotto 1.

**Fatto 7** Partendo dalla terra di nessuno devo stare sempre $\le 1$ (vedi fatto 3) e essere crescente (vedi fatto 6), quindi in particolare $x_n \to 1$. Resta da dim. che è $\ne \emptyset$.

**Fatto 8** Continuità. Fisso $n \ge 1$. Allora il valore di $x_n$ è una funzione continua di $x_1$. È addirittura polinomiale.

**Fatto 9** La zona rossa è aperta. Prendo $x_1$ in zona rossa. $\exists\, n$ t.c. $x_n \ge 2$, ma allora per $x_1$ vicini $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{stesso } n}}{x_n} \ge \frac{3}{2}$, ma allora sono pure in zona rossa.

**Fatto 10** La zona verde è aperta. Se ho $x_{n+1} < x_n$ per un certo $n$ ed un certo $x_1$, allora ce l'ho per gli $x_1$ vicini.

**Fatto 11** La terra di nessuno è fatta da un solo elemento.
Supponiamo che esistano 2 valori iniziali $\alpha < \beta$ per cui $x_n \to 1$. $\quad x_n(\alpha) \quad x_n(\beta)$

$$x_{n+1}(\beta) - x_{n+1}(\alpha) = x_n^2(\beta) + \frac{1}{n} x_n(\beta) - x_n^2(\alpha) - \frac{1}{n} x_n(\alpha)$$

$$= (x_n(\beta) - x_n(\alpha)) \underbrace{(x_n(\beta) + x_n(\alpha))}_{\to 2} + \underbrace{\frac{1}{n}(x_n(\beta) - x_n(\alpha))}_{\geq 0}$$

$$\geq x_n(\beta) - x_n(\alpha) \quad \text{per } n \text{ grande abbastanza}$$

Dunque $x_n(\beta) - x_n(\alpha)$ non può tendere a 0.

Quindi terna di nessuno = inf rosso = sup verde.