Titolo nota 08/09/2011

A2 - BASIC DISUGUAGLIANZE (un po' di)

1) Medie

2) Riarrangiamento

3) Cauchy - Schwarz

4) Convessità

1. Medie

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$G(x_1 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

$$Q(x_1 \dots x_n) = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

- Omogeneità

$\lambda > 0$

$$A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda A(x_1 \dots x_n)$$

idem per le altre

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$$

$$H(x_1, \dots, x_n) = M_{-1}(x_1 \dots x_n) = \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$\underset{=}{M_{-1}(x_i)} \qquad \underset{=}{M_1(x_i)} \qquad \underset{=}{M_2(x_i)}$$

(R) (CS) (C)

$$H(x_i) \leq G(x_i) \leq A(x_i) \leq Q(x_i) \leq M_p(x_i)$$

$G(x_i) =: M_0(x_i)$

ok $\leq$ $\qquad$ $p \geq 2$ $\qquad$ $\wedge$ ok

$\min(x_i) =: M_{-\infty}(x_i)$ $\qquad$ $M_{+\infty}(x_i) = \max(x_i)$

e se vale anche una sola =

allora $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

- omogeneità (cosa succede se $x_i \to \lambda x_i$)
- ottimalità ($\exists$? casi di =)
- caratterizzazione dei casi di =

Come si ricordano?

(C)

$$p < q \implies M_p(x_i) \leq M_q(x_i)$$

Studio qualitativo di una disuguaglianza in p per $p \to$ valore

Per esempio, fissati $x_1, \dots, x_n > 0$

si può mostrare che $M_p(x_i) \xrightarrow[p\to\infty]{} \max(x_i)$

SIGNIFICA: fissati gli x_i
si può rendere $M_p(x_i)$ vicino
quanto vogliamo a $\max(x_i)$
pur di prendere p abbastanza
grande ($p \gg 0$)

es $\sqrt[p]{\dfrac{x^p+y^p}{2}} \xrightarrow{p \gg 0} x$

supp. $x > y > 0$

$$x \sqrt[p]{\frac{1+(y/x)^p}{2}}$$

$\to 1$

$(y/x) < 1$

$\frac{1}{2}$

si avvicina a x quando $p \gg 0$

Analogamente potete provare a mostrare:

$$M_p(x_i) \xrightarrow[p \to 0^+]{} G(x_i)$$

$$M_p(x_i) \xrightarrow[p \to -\infty]{} \min(x_i)$$

(da fare per esercizio).

Tutte le disuguaglianze tra medie seguono da:

(R) RIARRANGIAMENTO

(CS) CAUCHY-SCHWARZ

(C) CONVESSITÀ

(R) DISUGUAGLIANZA DI RIARRANGIAMENTO

Siano $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ sia $\sigma : \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$

$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$

Allora: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Cosa succede nel caso di $=$? Caratterizzazione?

dimostrazione di (R)

Supp. che σ sia la permutazione per la quale si ottiene il massimo M

$$M = \cancel{a_1 b_{\sigma(1)}} + \dots + a_i b_{\sigma(i)} + \dots + a_j b_{\sigma(j)} + \dots + \cancel{a_n b_{\sigma(n)}}$$

$$\geq$$

$$\cancel{a_1 b_{\sigma(1)}} + \dots + a_i b_{\sigma(j)} + \dots + a_j b_{\sigma(i)} + \dots + \cancel{a_n b_{\sigma(n)}}$$

se $\sigma \neq id$

$\exists\ i < j$

$\sigma(i) > \sigma(j)$

$$a_i \left(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)} \right) + a_j \left(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)} \right) \geq 0$$

$$(a_i - a_j)\left(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)} \right) \geq 0$$

$$(a_i - a_j)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}) \geq 0$$

$$\underbrace{(a_i - a_j)}_{\leq 0} \quad \underbrace{(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})}_{\geq 0}$$

l'unica possibilità è che sia 0

$a_i = a_j$ $\qquad$ $b_{\sigma(i)} = b_{\sigma(j)}$

__Morale__ (1) se gli $a_i \nearrow$, $b_i \nearrow$ strettamente crescenti

la permutazione σ che dà il massimo è id

(2) Se gli $a_i \nearrow$, $b_i \nearrow$ debolmente crescenti

$\Downarrow$

σ è una permutazione che può scambiare $i \leftrightarrow j$ solo se $a_i = a_j$

ex

$1\ 2\ 2\ 3\ 4 = (a_i)$

$5\ 6\ 7\ 8\ 8 = (b_i)$

$1\ 2\ 2\ 4\ 3$

$5\ 7\ 6\ 8\ 8$

Applicazioni - esempi di (R)

1) a, b, c qualsiasi

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a \; b \; c)$$

$$(b \; c \; a) \quad (a \; b \; c)$$

2) a, b, c positivi

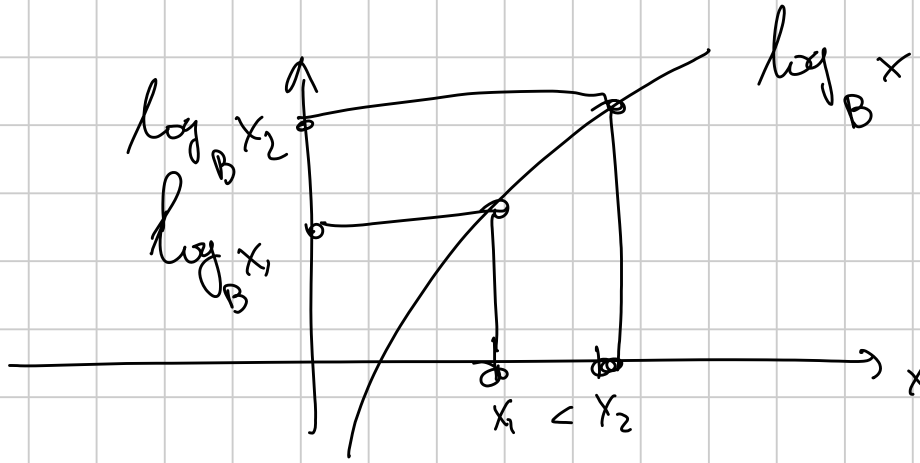
$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq a^b \, b^c \, c^a$$

$$a \log a + b \log b + c \log c \qquad b \log a + c \log b + a \log$$

$$a, b, c \nearrow \quad \Rightarrow \quad \log a, \log b, \log c \nearrow$$

$\boxed{B > 1}$ $\log_B x$ è il numero a cui deve essere elevato B per ottenere x

$B > 1$



3) Somma di quozienti ciclici

$a_1, a_2, \dots, a_n$ positivi

(non necessariamente ↗)

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

$a_1 \quad \dots \quad a_n$ non ordinati

$1/a_1 \quad \dots \quad 1/a_n$ non ordinati

Se σ è l'ordinamento crescente degli a_i

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \dots \leq a_{\sigma(n)}$$

$$1/a_{\sigma(1)} \geq 1/a_{\sigma(2)} \geq \dots \geq 1/a_{\sigma(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i / a_{i+1} \geq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = n$$

Altro modo di dirla:

se $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$

allora $a_1/a_{\sigma(1)} + \cdots + a_n/a_{\sigma(n)} \geq n$

$\forall$ permutazione σ

4) $G(x_1 \cdots x_n) \leq A(x_1 \cdots x_n)$

$x_1, \ldots, x_n$ positivi

$G = G(x_i)$

$a_1 = G/x_1$

$a_2 = G^2/x_1x_2$

$\vdots$

$a_n = G^n/x_1 \cdots x_n = 1$

non ne conosco l'ordinamento

$a_i \leq a_{i+1}$?

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{G^i}}{\cancel{x_1 \cdots x_i}} \leq \frac{G^{i+1}}{\cancel{x_1 \cdots} x_{i+1}}$

$\Leftrightarrow x_{i+1} \leq G$

$$\boxed{a_1/a_2 + a_2/a_3 + \cdots + a_n/a_1 \geq n}$$

$a_i / a_{i+1} \quad = \quad x_{i+1} / G$

$a_n / a_1 \quad = \quad x_1 / G$

$x_2/G + x_3/G + \dots + x_1/G \geq n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq G$$

Dimostriamo che se $G(x_i) = A(x_i) \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots x_n$
(il caso di uguaglianza) $\leq$

Con un'altra tecnica.

caso $n=2$ $\qquad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

e vale $=$ se e solo se $x=y$

infatti $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$
$$+2xy \qquad\qquad +2xy$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

vale $=$ sse $(x-y)^2 = 0$ i.e. $x=y$

caso n qualsiasi

Supponiamo $\sqrt[n]{x_1 \cdots\cdots x_n} \overset{(\leq)}{=} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

se gli x_i non sono tutti uguali

avremo $x_1 \neq x_2$

Adesso chiamo $x'_i = x_i \quad i \neq 1,2$

x'_1, x'_2 t.c. $\begin{cases} x'_1 x'_2 = x_1 x_2 \\ x'_1 + x'_2 < x_1 x_2 \end{cases}$

OSS la disuguaglianza $G(x,y) \leq A(x,y)$ fatta per $n=2$

si dice che $\min\{x+y \mid xy = c\}$

è ottenuto per $x=y=\sqrt{c}$

cioè tra tutti i rettangoli di area $xy=c$ fissata

il quadrato è quello che minimizza il perimetro

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\;) = \sqrt{c}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{c}$$

ed è minima per $x=y=\sqrt{c}$

perché è un'uguaglianza

Ora però trovo :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \sqrt[n]{x_1' \cdots x_n'} \le \frac{x_1' + \dots + x_n'}{n} < \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

assurdo gli x_i non verificavano l'ug. $G(x_i) = A(x_i)$.

EX. (Chebycheff) Mostrare:

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ qualsiasi

$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \le \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$A(a_i b_{n+1-i}) \le A(a_i)A(b_i) \le A(a_i b_i)$$

Suggerimento $\sum_{i,j} a_i b_j$

$$\frac{\left(\sum_i a_i\right)}{n}\frac{\left(\sum_i b_i\right)}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} a_i b_j \le \frac{1}{\cancel{n^2}}\cdot \cancel{n} \sum_i a_i b_i$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_i a_i b_i$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1 \le \sum_i a_i b_i$$
$$a_1 b_3 + \quad\quad + a_n b_2 \quad //$$
$$\vdots$$
$$a_1 b_n + \dots + a_n b_{n-1} \quad //$$

$x, y, z > 0$

EX. Calcolare $\mathrm{MIN}\left\{ x+2y+3z \mid x^3y^2z = 1 \right\}$

Somma di ai

prodotto

con $\sum_i a_i \sim x+2y+3z$

$\prod a_i \sim x^3y^2z$

$a_1 = x$
$a_2 = 2y$
$a_3 = 3z$

$\sum a_i = ok$

$\prod a_i = x\cdot 2y \cdot 3z \neq x^3y^2z$

$$x + 2y + 3z = \overbrace{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+y+y+3z}^{6} \leftarrow a_i$$

$$\prod a_i = x^3y^2z \cdot \left(\frac{1}{3^3} \cdot \quad \cdot 3\right)$$

$$\frac{x+2y+3z}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{1}{9}\underbrace{x^3y^2z}_{=1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$=$

Se $\frac{x}{3} = y = 3z$ tc $x^3y^2z = 1$

$x = 3y$ $\quad y = ?$ $\quad (3y)^3 y^2 \left(\frac{y}{3}\right) = 1$

$z = y/3$

$\downarrow$

y

il minimo è $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot 6$

EX Calcolare $\text{MIN}\{x^2+y^4+z^6 \mid xyz = n\}$ $\quad x,y,z>0$

n fissato

Sugg trovare a_i tc $\sum a_i \sim x^2+y^4+z^6$

$\prod a_i \sim (xyz)^\alpha$

3) Cauchy-Schwarz

$x_1, \dots, x_n$ qualsiasi
$y_1, \dots, y_n$

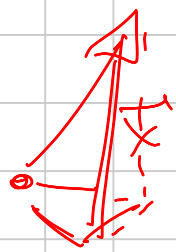
$$\Rightarrow \quad |x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$$

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \le \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

$$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$$
$$\vec{X} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \qquad \text{PRODOTTO SCALARE}$$

$$|\vec{X}| = \sqrt{\sum x_i^2} \qquad \text{NORMA O LUNGHEZZA DI } \vec{X}$$

se $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$



$$|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \le |\vec{X}| \cdot |\vec{Y}|$$

Vale l'$=$ se e solo se $\vec{X} = \lambda \vec{Y}$

cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $x_i = \lambda y_i$

oppure $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$

* dimostrazione (tramite somma di quadrati)

$$\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - \left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \geq 0 \; ?$$

$$\underbrace{\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2}_{} - \cancel{\sum_i a_i^2 b_i^2} - \sum_{i \neq j} a_i b_i a_j b_j \overset{?}{\geq} 0$$

$$\cancel{\sum_i a_i^2 b_i^2} + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2$$

$$\sum_{i \neq j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \overset{?}{\geq} 0$$

chiaro

Vale l'$=$ $\Longrightarrow$ $a_i b_j = a_j b_i \quad \forall i,j$

moralmente $a_i / b_i = a_j / b_j = \lambda$ $\forall i,j$

cioè $a_i = \lambda b_i \quad \forall i$

Scriverlo bene!

- se $b_i = 0 \; \forall i \longrightarrow \vec{b} = 0$ ok
- se $\exists b_i \neq 0$: $b_j = 0 \rightarrow a_j = 0$

  $b_j \neq 0 \rightarrow \dfrac{a_i}{b_i} = \dfrac{a_j}{b_j}$ ∎

Significato geometrico di Cauchy-Schwarz:

(almeno per $n=2,3$)

legge del coseno $$\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right| = \Big|\,|\vec{x}|\underbrace{|\vec{y}|\cos\vartheta}_{\text{lunghezza col segno della proiezione di } \vec{y} \text{ su } \vec{x}}\Big|$$

$$\le |\vec{x}|\,|\vec{y}|.$$

Cosa vuol dire se ho $=$?

$\vec{y} \parallel \vec{x}$

Applicazione di Cauchy-Schwarz

1) $A(x_1 \dots x_n) \leq Q(x_1, \dots x_n)$

applico Cauchy-Schwarz a $\vec{x} = (x_1 \dots x_n)$

$\vec{y} = \vec{\mathbb{1}} = (1, \dots, 1)$

$$\left(\sum_i x_i\right)^2 = \left(\sum_i x_i \cdot 1\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n 1^2}_{n}$$

$/n^2$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum x_i^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_1^n x_i}_{A(x_i)} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}}_{Q(x_i)}$$

Vale $=$? $\Longleftrightarrow$ $x_1 = x_2 = \dots x_n$.

EX. Mostrare:

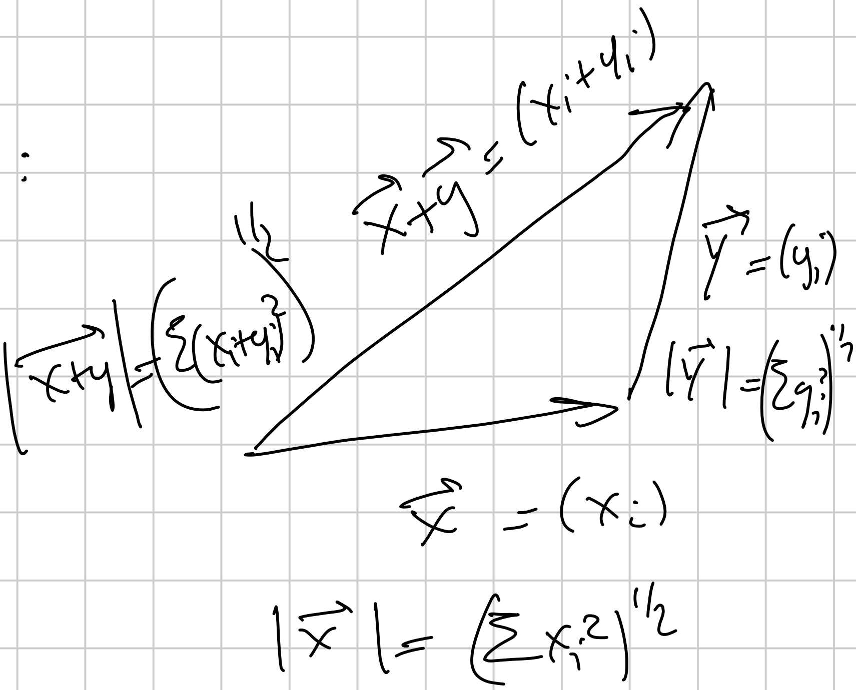
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

(Minkowsky $p=2$ o triangolare)

Suggerimento: usare Cauchy-Schwarz.

Significato geometrico:

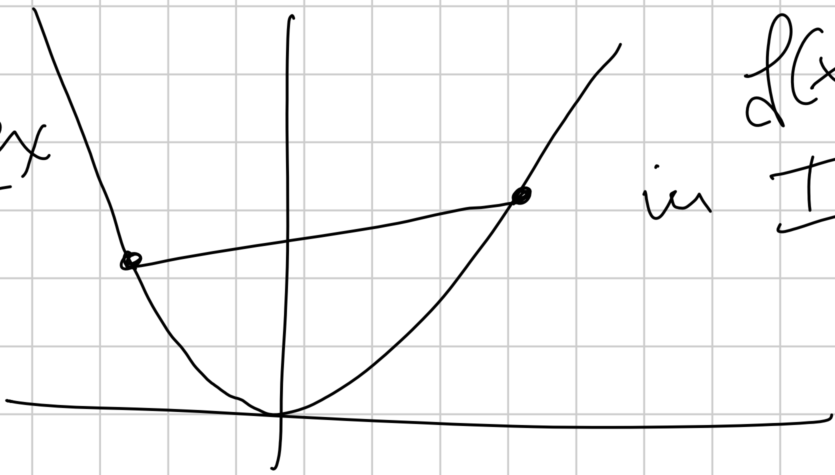
$n = 2, 3$



4) DISUGUAGLIANZE DI CONVESSITÀ

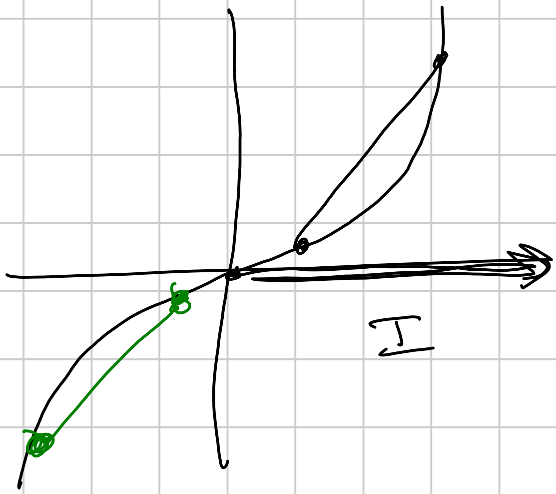
__def.__ una funzione f si dice CONVESSA (CONCAVA) in un certo intervallo $\underline{I}$ se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del grafico di f in $\underline{I}$ sta AL DI SOPRA (AL DI SOTTO) del grafico

__ex__



$f(x) = x^2$ è convessa in $\underline{I} = \mathbb{R}$

__ex__

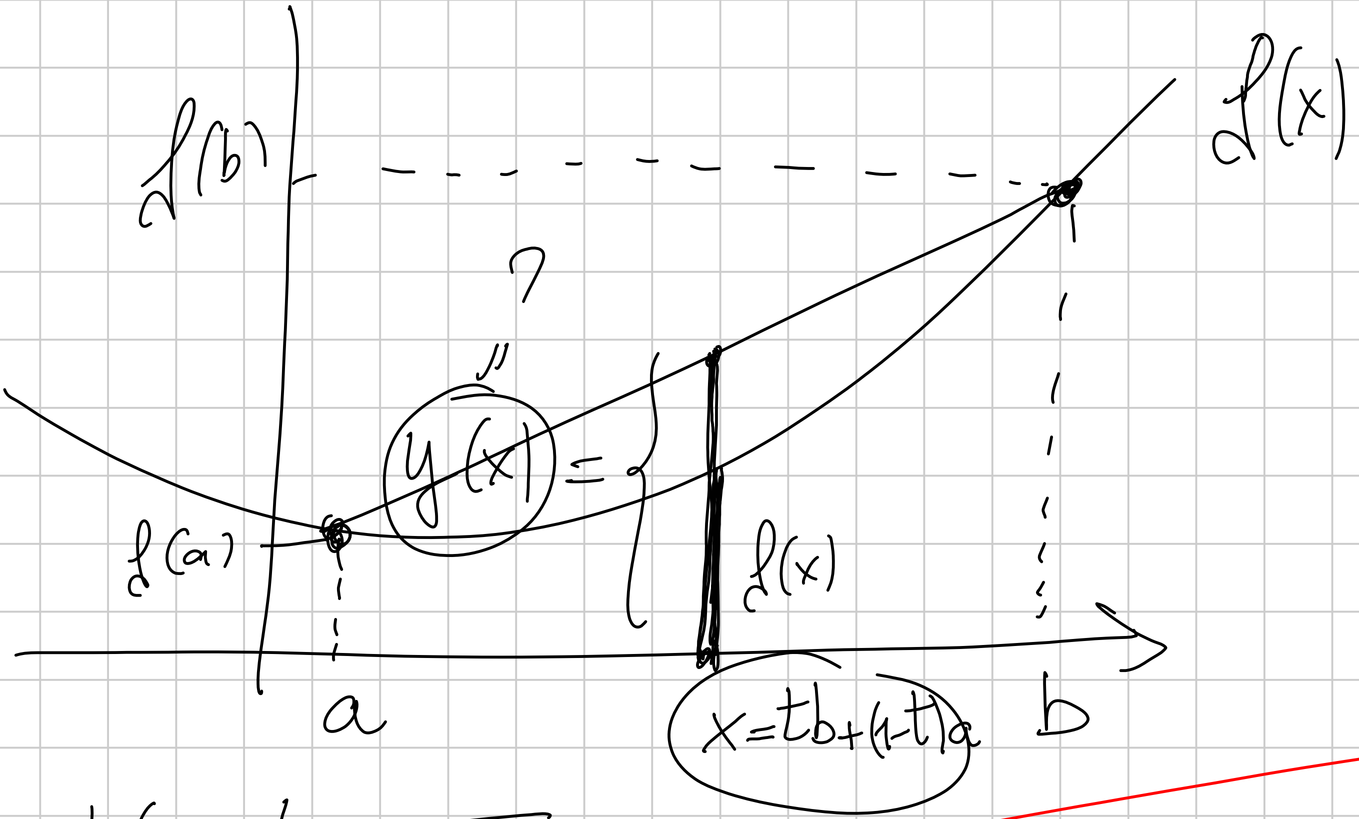


$f(x) = x^3$

è convessa in $\mathbb{R}_+$

è concava in $\mathbb{R}_-$

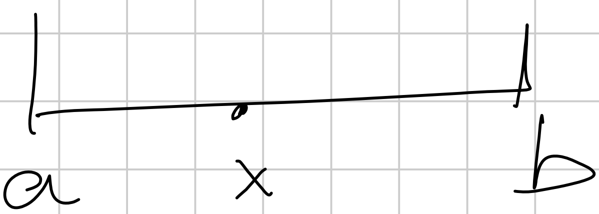
Come si scrive analiticamente la condizione di convessità di f in I



$\forall\, a,b \in I$ e $\forall\, x \in (a,b)$ ho $\boxed{y(x) \geq f(x)}$?

$x = tb + (1-t)a$

dove $t \in [0,1]$



$x = a + t(b-a) = tb + (1-t)a$

$0 < t < 1$

retta r passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$r: \quad \frac{y-f(a)}{x-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$y(x) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) + f(a)$$

$$x \to tb+(1-t)a$$

$$= \left(\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\right)\left(\underbrace{tb+(1-t)a-a}_{t(\cancel{b-a})}\right) + f(a)$$

$$= \left(f(b)-f(a)\right)t + f(a)$$

$$= t\,f(b) + (1-t)\,f(a)$$

CONVESSITÀ di f in I

$$f(tb+(1-t)a) \leq t\,f(b) + (1-t)\,f(a)$$

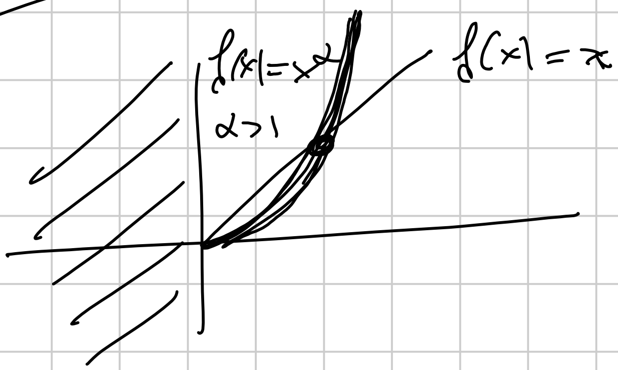
$$\forall a,b \in I \quad e \quad \forall t \in [0,1]$$

COSA c'entra tutto ciò con le disuguaglianze?

ogni volta che ho f convessa e $t \in [0,1]$

$\rightsquigarrow$ disuguaglianza

ex: $f(x) = x^{\alpha}$ $\quad \alpha > 1 \quad I = \mathbb{R}_+$



è convessa se $\alpha > 1$ in $\mathbb{R}_+$

$t = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}}(a+b)^{\alpha} \leq \frac{1}{2}(a^{\alpha} + b^{\alpha})$$

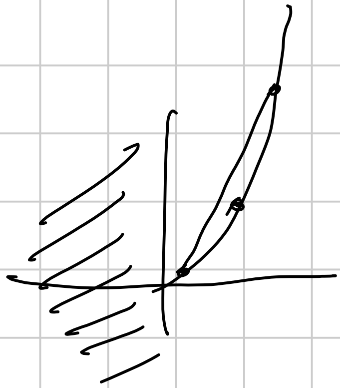
$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \leq \sqrt[\alpha]{\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}} = M_{\alpha}(a,b)$$

$$M_p(a_1,\dots,a_n) \leq M_q(a_1,\dots,a_n)$$

$$p<q$$

lo faccio per $n=2$:

prendo $f(x) = x^{q/p}$ — ≥ 1



Convessa in $I = \mathbb{R}_+$

applico la dis di convessità

per $t=\frac{1}{2}$ e ad x_1^p, x_2^p

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1^p+x_2^p)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1^p)+f(x_2^p)\right)$$

$$\left(\frac{x_1^p+x_2^p}{2}\right)^{q/p} \leq \frac{1}{2}\left((x_1^p)^{q/p}+(x_2^p)^{q/p}\right)$$

prendo $\sqrt[q]{}$

$$\left(\frac{x_1^p+x_2^p}{2}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{x_1^q+x_2^q}{2}\right)^{1/q}$$

Come si trovano le funzioni convesse (CONCAVE)?

(i) $\boxed{f(tx+(1-t)y) \overset{(\geq)}{\leq} t f(x) + (1-t) f(y)}$

$\forall t \in [0,1]$, $\forall x,y \in I$

(ii) [se f è continua] $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \overset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$

(iii) [se f ha derivate seconde] $f''(x) \geq 0$ su I $(\leq)$

(iv) [Jensen, x induzione da (i)]

se ho $d_1, \dots, d_n \in [0,1]$ $\boxed{\sum d_i = 1}$ pensare a $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $t, (1-t)$; $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$\boxed{f(d_1 x_1 + \dots + d_n x_n) \overset{(\geq)}{\leq} d_1 f(x_1) + \dots + d_n f(x_n)}$

$\forall x_1, \dots, x_n \in I$

tutte condizioni eq. alla convessità

ex $\quad f(x) = x^{\alpha} \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\alpha > 1 \qquad f''(x) = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}$

$\longrightarrow f$ è convessa $\qquad > 0 \quad x \in \mathbb{R}_+$

ex $\quad M_p(x_1, \dots, x_n) \leq M_q(x_1, \dots, x_n) \quad p<q$

applico la (iv) a $f(x) = x^{q/p}$

e ai pesi $\lambda_1 = 1/n, \dots, \lambda_n = 1/n$

e a $x_1^p, \dots, x_n^p$

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1^p + \dots + x_n^p)\right) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1^p) + \dots + f(x_n^p)\right]$$

$$\left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{q/p} \leq \frac{(x_1^p)^{q/p} + \dots + (x_n^p)^{q/p}}{n}$$

prendo $\sqrt[q]{\ } \rightsquigarrow M_p \leq M_q$.

ex (YOUNG) $\boxed{AB \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q}$

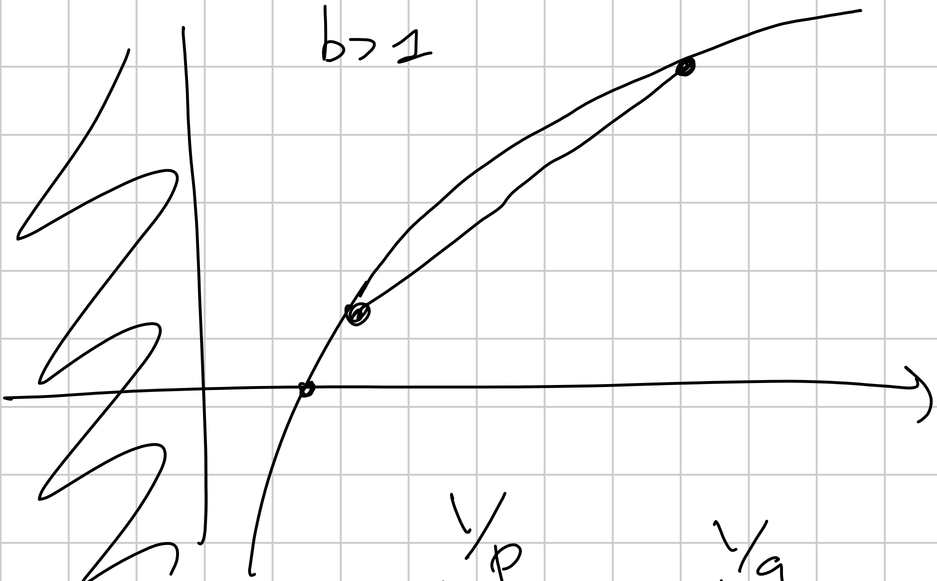
per $A, B > 0$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$p, q > 0$

Sugg $f(x) = \log_b x$ è CONCAVA

$b > 1$ $\left(f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \right)$



$$\log(\overset{1/p}{t}a + \overset{1/q}{(1-t)}b) \geq \overset{1/p}{t}\log a + \overset{1/q}{(1-t)}\log b$$

$$\log\left(\underbrace{\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b}\right) \geq \frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b$$

$a = A^p$

$b = B^q$

$$\log\left(\overbrace{\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q}^{\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q}\right) \geq \cancel{\frac{1}{p}}\,p\log A + \cancel{\frac{1}{q}q}\log B = \log AB$$

abbiamo detto

f STRETTAMENTE convessa su I se vale

$$f(tx+(1-t)y) \overset{<}{\le} t f(x) + (1-t) f(y)$$

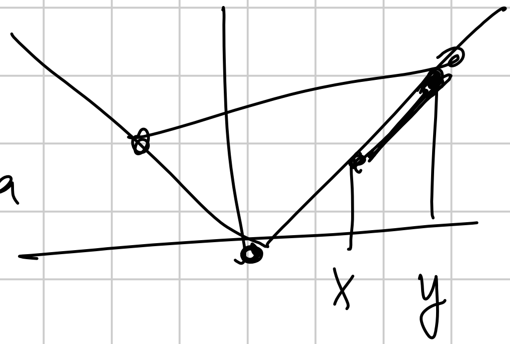
$t \in [0,1]$ $\quad x, y \in I$

$t \in (0,1)$

es $\quad f$ convessa

$\quad f$ non strettam. convessa

$$f(x) = |x|$$



EX Dimostrare che:

$x_1, \dots, x_n \ge 0$

$\sum_i x_i = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{n} f(x_1) + \dots + \frac{1}{n} f(x_n) \ge f\left(\frac{\overbrace{x_1+\dots+x_n}^{1}}{n}\right)$$