A3 Basic - Successioni e funzioni

Titolo nota 09/09/2011

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = P_{k+1}(n) \qquad i^k = P_{k+1}(i) - P_{k+1}(i-1) =$$

$$= \left(i^{k+1} + \dots \right) - \left((i-1)^{k+1} + \dots\right)$$

Equazioni alle differenze finite

$$P_5(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 3$$

Progressione aritmetica : $x_n = x_0 + nr$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + r \\ x_0 \text{ dato} \end{cases} \qquad x_n - x_{n-1} = r$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_0 + ir) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_0 + \sum_{i=1}^{n} ir = n x_0 + r \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Progressione geometrica: $x_n = x_0 \cdot r^n$

$$\begin{cases} x_n = r x_{n-1} \\ x_0 \text{ dato} \end{cases} \qquad \log x_n = \log x_{n-1} + \log r$$

$$\log x_n = \log x_0 + n \log r$$

$$x_n = x_0 \cdot r^n$$

$$x_n = a x_{n-1} + b \qquad y_n = x_n - x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = a x_{n-2} + b$$

$$x_n - x_{n-1} = a(x_{n-1} - x_{n-2}) \qquad y_n = a\, y_{n-1}$$

$$y_n = y_0 \cdot a^n \qquad x_n - x_{n-1} = y_0 \cdot a^n$$

$$+ \qquad +$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = y_0 \cdot a^{n-1}$$

$$x_n - x_{n-2} = y_0 (a^n + a^{n-1})$$

$$x_n - x_0 = y_0 (a^n + a^{n-1} + \dots + a^1)$$

$$\parallel$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad a(1 + a + \dots + a^{n-1})$$

$$a \neq 1$$

$$x_n = x_0 + a\, y_0 \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

b_0, b_1 dati

$$b_{n+1} = (n+1) b_n - n b_{n-1}$$

Allora $\forall m$ naturale da un certo $\overline{k}$ in poi $b_n \equiv k \pmod m$ $\quad n \geq \overline{k}$

$$b_{n+1} - b_n = n(b_n - b_{n-1})$$

$$c_{n+1} = b_{n+1} - b_n \qquad c_{n+1} = n\, c_n \qquad c_n = a \cdot (n-1)!$$

$$c_1 = b_1 - b_0 = a$$

$b_{n+1} = b_n + c_{n+1} = b_n + a\, n!$ Se $n \geq m$,

$m \mid n!$

$$b_{n+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \gamma$$

$$b_n \longmapsto c_n = b_n - s \qquad b_n = c_n + s$$

$$c_{n+1} + s = a_1 c_n + a_1 s + a_2 c_{n-1} + a_2 s + \gamma$$

$$s = (a_1 + a_2) s + \gamma \qquad s = \frac{\gamma}{1 - a_1 - a_2}$$

* $\boxed{b_{n+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1}}$ Ricorrenza a due termini

1) E' lineare : B_n e β_n sono soluzioni, anche λB_n e $B_n + \beta_n$ sono soluzioni.

$$B_{n+1} = a_1 B_n + a_2 B_{n-1}$$
$$\beta_{n+1} = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1}$$

$$(B_{n+1} + \beta_{n+1}) = a_1 (B_n + \beta_n) + a_2 (B_{n-1} + \beta_{n-1})$$

* ha soluzioni che sono progressioni geometriche?

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

Se $x_0 r^n$ soddisfa $*$

$$\cancel{x_0} r^{n+1} = a_1 \cancel{x_0} r^n + a_2 \cancel{x_0} r^{n-1}$$

$x_0 = 0$

$r = 0$

$r, x_0 \neq 0$

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0$$

Trovo r_1 e r_2 soluzioni di

$x_0 r_1^n$ e $x_0 r_2^n$ sono soluzioni qualunque sia x_0, quindi

$\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ è soluzione $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che sono tutte così, purché $r_1 \neq r_2$.

Se $r_1 = r_2$ anche $n r_1^n$ è soluzione:

$$x^2 - 2 r_1 x + r_1^2 = 0 \qquad b_{n+1} = 2 r_1 b_n - r_1^2 b_{n-1}$$

$$(n+1) r_1^{n+1} = 2 r_1 \cdot n r_1^n - r_1^2 \cdot (n-1) r_1^{n-1}$$

$$n+1 = 2n - (n-1).$$

Le soluzioni (tutte) sono allora del tipo

$$\alpha r_1^n + \beta n r_1^n$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad r_1 + r_2 = 1$$

$$r_1^2 + r_2^2 \qquad \frac{1 + \cancel{2\sqrt{5}} + 5}{4} + \frac{1 - \cancel{2\sqrt{5}} + 5}{4}$$

$$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = F_n$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = 1 \end{cases} \qquad \alpha = -\beta \qquad \alpha = \frac{1}{r_1 - r_2}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\cancel{1} + 3\sqrt{5} + \cancel{15} + 5\sqrt{5}}{8} - \frac{\cancel{1} - 3\sqrt{5} + \cancel{15} - 5\sqrt{5}}{8}\right) = 2$$

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$; $a_1 - a_0 > 1$, $a_0 > 0$ Allora $a_{100} > 2^{99}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad 2, 1$$

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \qquad (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) > 1$$

$$\alpha > 1$$

$$a_{100} = \alpha \cdot 2^{100} + \beta$$

$$= \alpha \cdot 2^{99} + \alpha \cdot 2^{99} + \beta \qquad \alpha \cdot 2^{99} + \beta > \alpha + \beta > 0$$

$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$ $\qquad$ $a_{100} - a_{99} = 2^{99}(a_1 - a_0)$

$a_{99} > 0$ perché se $a_0 \geq 0$ e $a_1 - a_0 \geq 1$

$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{99}$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_k$

In quanti modi possono disporsi in modo che distino al più 1 passo dalla posizione iniziale?

1	2	3
2	1	3
1	3	2

$N_k \qquad N_1 = 1 \quad N_2 = 2 \quad N_3 = 3$

$N_4 = 5$

1	2	3	4
1	3	2	4
1	2	4	3
2	1	3	4
2	1	4	3

$M_k = \{\text{modi per } k \text{ bambini}\}$

$M_k = A_k \cup B_k \qquad A_k = \{b_1 \text{ resta fermo}\}$

$B_k = \{b_1 \text{ e } b_2 \text{ si scambiano}\}$

$|A_k| = |M_{k-1}| = N_{k-1} \qquad |B_k| = |M_{k-2}| = N_{k-2}$

$N_k = N_{k-1} + N_{k-2} \qquad N_1 = 1 \quad N_2 = 2$

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \\ b_0 = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

3 2 5 7 12 19 31

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$|r_2| < 1$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \pm \varepsilon$$

$[\alpha^n] \quad \lambda\bar{\alpha}^n + \mu\alpha^n$

$p \mid 2^n + 3^n + 6^n - 1^n$ n grande

${}^4b_n$ p primo

$(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$

b_n è soluzione $\quad b_{n+1} = c_1 b_n + c_2 b_{n-1} + c_3 b_{n-2} + c_4 b_{n-3}$

$b_0\ b_1\ b_2\ b_3$ mod p ci sono p^4 possibilità

$b_0 b_1 b_2 b_3\ b_4\ b_5\ b_6 \ldots$

La quaterna $b_0 b_1 b_2 b_3$ prima o poi si ripete mod p

$p \neq 2,3$

$n = -1 \qquad 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1^{(-1)}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$18+12+6=36$

$b_{-1} = 0 \mod p$

Allora se il periodo è lungo N,

$b_{N-1} \equiv 0 \mod p$.

Equazioni funzionali

L'incognita è una funzione $f: A \to B$

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $(0, +\infty)$

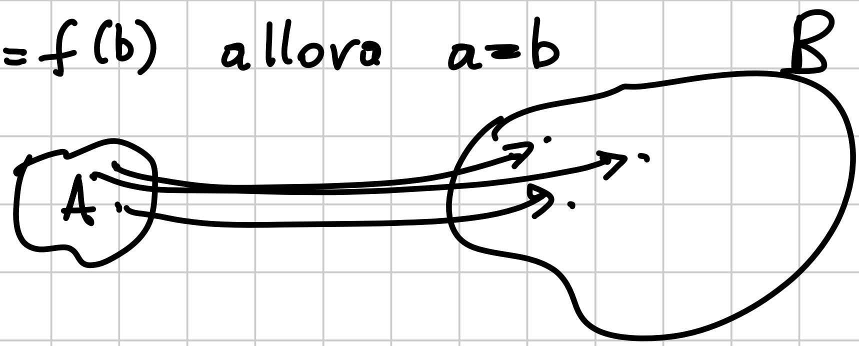
funzione $\neq$ formula

$f(n) = \{$numero delle persone con n capelli$\}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f: A \to B$ iniettiva $:=$

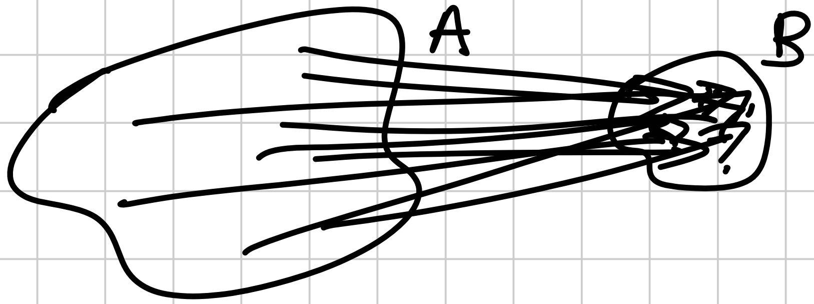
Se $f(a) = f(b)$ allora $a = b$



$f: A \to B$ è surgettiva $:=$

$\forall b \in B \ \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

(anche più di uno)



Se $|A|$ e $|B|$ sono finiti,

f iniettiva $\Rightarrow |A| \leq |B|$

f surgettiva $\Rightarrow |A| \geq |B|$

f iniettiva e surgettiva $\doteq$ bigettiva
biunivoca

In questo caso $\exists\, g : B \to A$ t.c.

se $f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

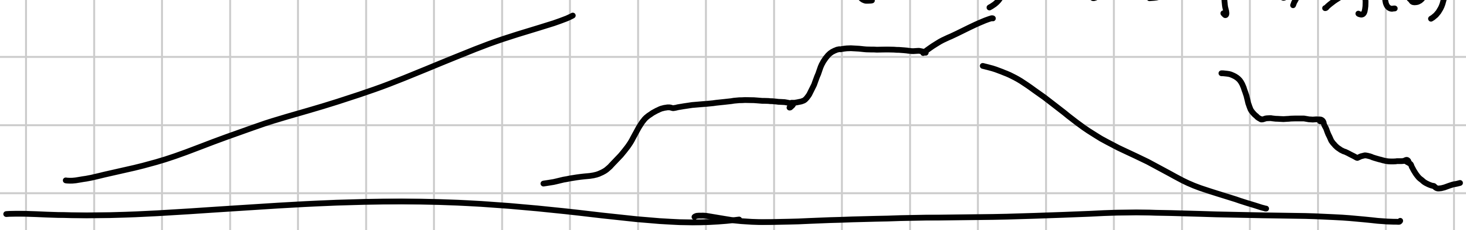
f monotòna

monotona strett. crescente $a<b \quad f(a)<f(b)$

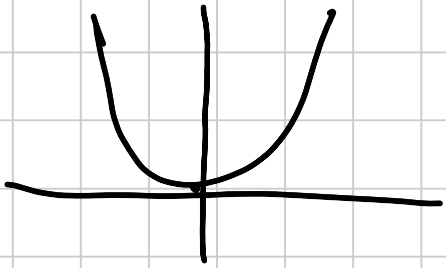
" crescente (debolmente) $a<b \quad f(a)\leq f(b)$

monotona strett. decrescente $a<b \quad f(a)>f(b)$

" decrescente (deb.) $a<b \quad f(a)\geq f(b)$



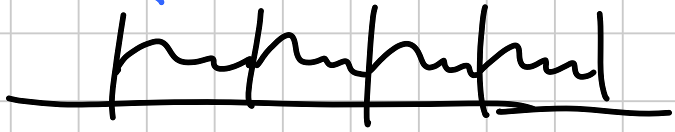
x^2 su $\mathbb{R}$



su $\mathbb{R}^+$ è crescente (strett.)
su $\mathbb{R}^-$ decrescente (strett.)

- divido in casi
- mi serve solo uno dei due

f periodica $\quad \exists k$ t.c. $f(x+k) = f(x)$ $\forall x$

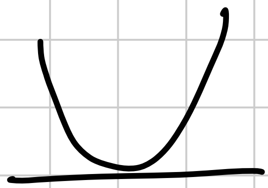


Il più piccolo k che soddisfa la condizione

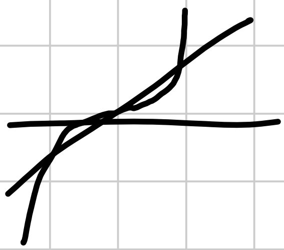
è detto periodo (minimo) di f

(o f costante)

f pari $\qquad f(x) = f(-x)$



f dispari $\qquad f(x) = -f(-x)$

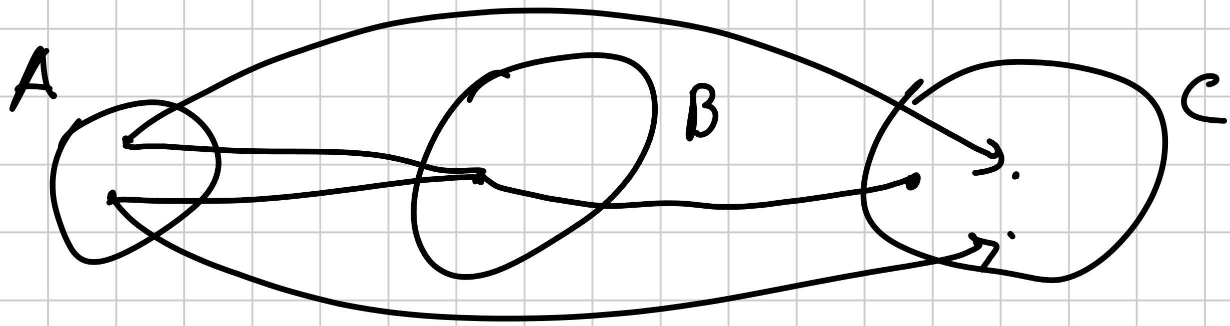


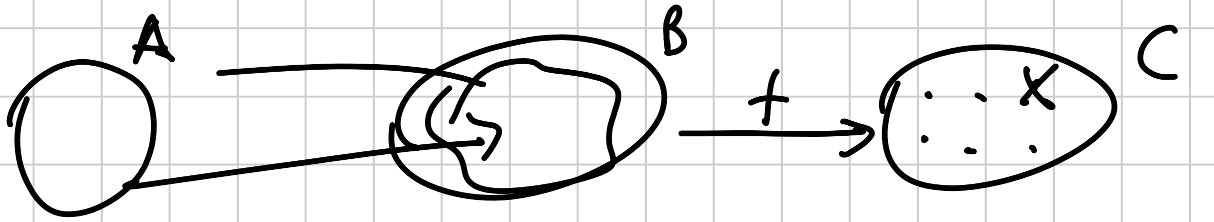
$f \circ g \qquad A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$

$$f \circ g : A \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

$f \circ g$ iniettiva $\Rightarrow g$ iniettiva

$f \circ g$ surgettiva $\Rightarrow f$ surgettiva





$f(f(x)) = x$ su $\mathbb{R}$

f è iniettiva e surgettiva

$x = f(z)$ $\qquad f(f(f(z))) = f(z)$

$f(f(f(z))) = f(z)$

$f(f(z)) = z$

$f(x) = x$

$f(x) = -x$

x	$f(x)$
a	b
$f(a) = b$	$f(f(a)) = a$
$f(b) = a$	$f(f(b)) = b$

$\mathbb{R} = \bigcup_i \{a_1^i \; a_2^i\}$ $\qquad f(a_1^i) = a_2^i \quad f(a_2^i) = a_1^i$.

Eq. di Cauchy :

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\qquad$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1) $f(0)$ $\qquad f(0+\cancel{0}) = f(0) + \cancel{f(0)}$ $\qquad f(0) = 0.$

2) $f(0+1) = \underbrace{f(0)}_{0} + f(1)$

$f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

$f(3) = f(2+1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1).$

$f(n) = f(n-1) + f(1) = (n-1)f(1) + f(1) = nf(1).$

induzione

$f(-1)$ $\qquad \underbrace{f(-1+1)}_{0} = f(-1) + f(1)$

$f(-1) = -f(1)$

$f(-n) = -f(n)$ $\qquad f(x) + f(-x) = f(x-x) = 0$

$f(x) = -f(-x)$

f è dispari

$n \in \mathbb{Z}$ $\quad f(n) = nf(1)$

$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(1)$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}f(1)$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1) \qquad [\text{Induzione}]$$

2) $f(1) = a \qquad f(x) = ax \qquad a \in \mathbb{Q}$

$a \in \mathbb{R}$

$$a(x+y) = ax + ay$$

Su $\mathbb{Q}$ è finita

Su $\mathbb{R}$ che si fa con $\sqrt{2}$? con π?

$f(1) = a = 2$

$f(\sqrt{2}) = \pi \qquad f(m\sqrt{2}) = m\pi \qquad f\left(\frac{m}{n}\sqrt{2}\right) = \frac{m}{n}\pi$

$\sqrt{3} \qquad \pi \qquad \sqrt{e} \qquad \log\left(\frac{e+\pi}{\sqrt{2}}\right) \ldots$

Su $\mathbb{R}$ tantissime soluzioni

a meno che...

- f monotòna crescente o decrescente
- f continua
- f localmente limitata: $\exists$ intervallino $[a,b]$ su cui $|f| \leq K$.

$$\Longrightarrow f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x+f(y)) = f(x) + y \qquad \forall x,y \in \mathbb{Q}.$$

(1) $f(f(0)) = f(0)$ $\qquad$ $f(0)=0$? <u>NO</u>

$$f(f(y)) = f(0) + y$$

$f(0)+y$ è bigettiva, quindi anche f lo è (grazie al suo doppio ruolo in $f(f(y))$). Quindi $f(0)=0$ per (1)

$$f(f(y)) = y$$

$x = f(z)$

$$f(f(z)+f(y)) = f(f(z)) + y = z+y$$

$y = f(z)$

$$f(x+f(f(z))) = f(x) + f(z)$$

$$\overset{\shortparallel}{f(x+z)}$$

$\Rightarrow f(x) = ax$ $\qquad \forall x,y$

$a(x+ay) = ax + y$ $\qquad$ $\cancel{ax} + a^2y = \cancel{ax} + y$

$a^2 = 1$ $\qquad$ $a = \pm 1$ $\qquad$ 1) $f(x) = x$

2) $f(x) = -x$

1) $x+y = x+y$ ✓

2) $-(x-y) = -x+y$ ✓

IMO 2008 - 4

Trovare tutte le $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

t.c. $$\frac{[f(w)]^2 + [f(x)]^2}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$ $\forall x,y,z,w \in (0,+\infty)$ t.c. $xw = yz$

$x = y = z = w = 1$

$$\frac{\cancel{2} f(1)^2}{\cancel{2} f(1)} = 1 \qquad f(1)^2 = f(1) \qquad f(1) = 1$$

$x = 1$
$y = w$
$w = w$
$z = 1$

$$\frac{f(w)^2 + 1}{f(w^2)+1} = \frac{w^2+1}{w^2+1} = 1$$

$$f(w)^2 = f(w^2)$$

$$\frac{f(w^2)+f(x^2)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

$x^2 : (0,+\infty)$ è bigettiva

$$\ast \quad \frac{f(w)+f(x)}{f(y)+f(z)} = \frac{w+x}{y+z}$$ $\forall x,y,z,w \in (0,+\infty)$ $xw = yz$

$x = w$
$y = w^2$
$z = 1$
$w = w$

$$\frac{2f(w)}{f(w^2)+1} = \frac{2w}{w^2+1} \qquad f(w^2) = f(w)^2$$

$$2(w^2+1) f(w) = 2w + 2w f(w)^2$$

$$f(w)^2 - \cancel{2}\frac{w^2+1}{\cancel{2}w} f(w) + 1 = 0 \qquad f(w) = \begin{cases} w \\ \frac{1}{w} \end{cases}$$

2 soluz.?

$$\frac{f(w)+f(x)}{f(y)+f(z)} = \frac{w+x}{y+z} \qquad f(x)=x \ \checkmark \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{\frac{w+x}{\cancel{wx}}}{\frac{y+z}{\cancel{yz}}}$$

E' possibile che $f(a)=\frac{1}{a}$ $\quad f(b)=b$ $\quad a,b\neq 1$?

$w=a \quad x=b$

$y=ab \quad z=1$

$$\frac{\frac{1}{a}+b}{f(ab)+1} = \frac{a+b}{ab+1}$$

$$f(ab)=\begin{cases} ab & 1) \\ \frac{1}{ab} & 2) \end{cases}$$

1) $\dfrac{\frac{1}{a}+\cancel{b}}{\cancel{ab+1}} = \dfrac{a+\cancel{b}}{\cancel{ab+1}}$ $\quad \frac{1}{a}=a$

$a^2=1 \quad a=1$ ass.

2) $$\frac{\frac{1}{a}+b}{\frac{1}{ab}+1} = \frac{a+b}{ab+1}$$

$$\frac{\frac{\cancel{1+ab}}{\cancel{a}}}{\frac{\cancel{ab+1}}{\cancel{a}b}} = b = \frac{a+b}{ab+1}$$

$\cancel{a}b^2+\cancel{b} = \cancel{a}+\cancel{b} \quad b^2=1 \quad b=1$ ass.

Non esistono 2 punti con soluzioni diverse

quindi
- $f(x)=x \quad \forall x$
- $f(x)=\frac{1}{x} \quad \forall x$

(e loro soddisfano).

TST 2002: Trovare tutte le $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

t.c.
1) $f(x+yf(x))=f(x)f(y)$
2) assumono il valore 1 al più un numero finito di volte.

$f(t)=1 \qquad f(2t)$

$x=t, y=t \quad \underbrace{f(t+tf(t))}_{f(2t)} = f(t)f(t)=1$

$\underbrace{f(t+2tf(t))}_{f(3t)} = f(2t)f(t)=1$

Induzione: allora $\exists$ infiniti

t_i t.c. $f(t_i)=1 \quad [i \cdot t]$ ass.

$f(x+yf(x)) = f(x)f(y) \overset{y=x,\ x=y}{=} f(y+xf(y))$

$f(a)=f(b) \qquad x=a \quad y=\frac{b-a}{f(a)}$

$a\neq b \quad a<b$

$\underbrace{f\left(\cancel{a}+\frac{b-\cancel{a}}{\cancel{f(a)}}\cdot \cancel{f(a)}\right)}_{f(b)} = \cancel{f(a)}\cdot f\left(\frac{b-a}{f(a)}\right) \qquad f\left(\frac{b-a}{f(a)}\right)=1$ ass.

Allora f è iniettiva e

$x+yf(x) = y+xf(y) \qquad y(f(x)-1)=x(f(y)-1)$

$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{f(y)-1}{y} = a \ \forall x,y. \quad \frac{f(x)-1}{x}=a \ \forall x$

$f(x)=ax+1. \qquad a(x+y\cdot(ax+1))+1=(ax+1)(ay+1)$

$a>0$

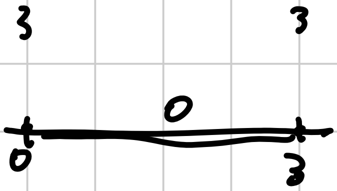
$ax+a^2xy+ay+1 = a^2xy+ax+ay+1 \quad \square.$

$f: \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x+3f(y))=f(x)+ay$

1) per $a=0$ $\mathbb{R}$ esiste una sol. non costante.

periodo 3



1) $x = 3k$, $y = 3k$

2) $x = 3k$, y no

3) x no, $y = 3k$

4) x, y no

1) $f(3k \overset{3}{+} 3\cdot 3) = f(\overset{3}{3k})$ 2) $f(3k+3\cdot 0) = f(3k)$

3) $f(x \overset{0}{+} 3\cdot 3) = f(\overset{0}{x})$ 4) $f(x+3\cdot 0) = f(x)$

$x=0$ $f(3f(y)) = f(0) + ay$ f bigettiva

$x=y=0$ $f(3f(0)) = f(0) \Rightarrow 3f(0) = 0$ $f(0)=0$

$$\boxed{f(3f(y)) = ay}$$

$f(x+9f(y))$?

$x = x+3f(y)$ $f(x+3f(y)+3f(y)) = f(x+3f(y)) + ay$
$= f(x) + ay + ay$

$x+6f(y)$

$f(x+9f(y)) = f(x) + 3ay$

$y = 3f(z)$ $f(x+\underset{=}{3f(3f(z))}) = f(x)+3af(z)$

$f(x+3az)$ x

$y = f(z)$

$x=0$
$f(3az) = 3af(z)$

$f(x+9f(f(z))) = f(x)+3af(z)$

$$\cancel{x} + 9f(f(z)) = \cancel{x} + 3f(3f(z)) \qquad 3f(f(z)) = f(3f(z))$$

$$\cancel{x} + 3az \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{az}$$

$$f(\underline{f(z)}) = \frac{a}{3}z$$

$$f(3f(y)) = ay \qquad f(3\underline{f\left(\frac{z}{3}\right)}) = \frac{a}{3}z$$

$$f(z) = 3f\left(\frac{z}{3}\right)$$

$$f(3az) = \cancel{3}af(z)$$

$$\shortparallel$$

$$\cancel{3}f(az)$$

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + ay \qquad f(3y) = z$$

$$\shortparallel$$

$$f(x + f(3y))$$

$$f(f(z)) = \frac{a}{3}z$$

$$f(x+z) = f(x) + \frac{a}{3}3y =$$

$$z = 3y$$

$$= f(x) + \frac{\cancel{a}}{\cancel{3}}f(f(3y)) =$$

$$= f(x) + f(z).$$

E' un'equazione di Cauchy!

su $\mathbb{Q}$ $\quad f(x) = \lambda x$

$$\lambda(x + 3\cdot\lambda y) = \lambda x + ay \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\shortparallel$$

$$\lambda x + 3\lambda^2 y \qquad 3\lambda^2 = a$$

$\mathbb{Q}$ $\quad a = 57^{57} \quad 3^{57}\cdot 19^{57}$ no

$\quad a = 75^{75} \quad 3^{75}\cdot 5^{150}$ si $\qquad$ E.

$\mathbb{R}$ $\quad a \geq 0$ ✓