INDUZIONE - PRINCIPIO DEI CASSETTI

Titolo nota 04/09/2011

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali $= \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

P_n = affermazione che dipende da $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \text{ è un numero intero } \forall n \in \mathbb{N}$$

- Dimostrare che P_1 è vera
- Dimostrare che <u>SE</u> P_n è vera, <u>ALLORA</u> è vera anche P_{n+1}

$\rightarrow$ P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ PER OGNI

- $$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{6+15+10-1}{30} = \frac{30}{30} = 1 \in \mathbb{N}$$
- $$\frac{(n+1)^5}{5} + \frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{30}$$

$$\underbrace{\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}}_{\in \mathbb{N} \text{ per ipotesi induttiva}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30}}_{=1} + \underbrace{\frac{\cancel{5}^{1}n^4 + \cancel{10}^{2}n^3 + \cancel{10}^{2}n^2 + \cancel{5}^{1}n}{\cancel{5}}}_{\in \mathbb{N}}$$

$$+\underbrace{\frac{\overset{2}{\cancel{4}}n^3+\overset{3}{\cancel{6}}n^2+\overset{2}{\cancel{4}}n}{\cancel{2}}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{\overset{1}{\cancel{3}}n^2+\overset{1}{\cancel{3}}n}{\cancel{3}}}_{\in\mathbb{N}}$$

Ho una somma di 5 quantità intere

$\boxed{P_n \text{ è vera } \forall n \in \mathbb{N}}$

$$S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \dots + n-1 + n = S_n\\
&n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1 = S_n\\
\hline
&\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n(n+1)} = 2S_n
\end{aligned}$$

$$S_1 = 1 \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad S_{n+1} \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

PROGRESSIONI ARITMETICHE

$$a_i = \alpha + (i-1)\cdot r \qquad i \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = \alpha \qquad a_2 = \alpha + r \qquad a_3 = \alpha + 2r \quad \dots$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{?}{=} \frac{n(2\alpha+(n-1)r)}{2}$$

• $S_1=a_1=\alpha$ $\qquad \frac{1\cdot(2\alpha+\cancel{(1-1)\cdot r})}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$

• $S_{n+1} \overset{?}{=} \frac{(n+1)(2\alpha+nr)}{2}$

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\frac{n(2\alpha+(n-1)r)}{2}+\overbrace{(\alpha+nr)}^{a_{n+1}}=$$

$$\frac{n(2\alpha+(n-1)r)+2\alpha+2nr}{2}=\frac{2\alpha(n+1)+n(nr-r+2r)}{2}=$$

$$=\frac{2\alpha(n+1)+nr(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(2\alpha+nr)}{2}$$

$$S_n^{(2)}=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

• $n=1$ $\quad S_1^{(2)}=1^2=1$ $\qquad \frac{1\cdot(2\cdot1+1)\cdot(1+1)}{6}=\frac{1\cdot3\cdot2}{6}=1$

• $S_{n+1}^{(2)}=S_n^{(2)}+(n+1)^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}+(n+1)^2=$

$$\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)\overbrace{(2n^2+7n+6)}^{(2n+3)(n+2)}}{6}=\frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+1)}{6}$$

$S_n^{(k)}$ è un polinomio di grado $k+1$ nella variabile n

$$S_n^{(2)} = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$S_1^{(2)} = 1^2 = 1$$

$$S_2^{(2)} = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_3^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$S_4^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ 8a+4b+2c+d = 5 \\ 27a+9b+3c+d = 14 \\ 64a+16b+4c+d = 30 \end{cases} \qquad a = 1/3, \quad b = 1/2, \quad c = 1/6, \quad d = 0$$

SOMMA DEI CUBI

$$S_n^{(3)} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- $S_1^{(3)} = 1^3 = 1$ $\qquad \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

$$S_{n+1}^{(3)} = S_n^{(3)} + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n+1\right]$$

$$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA $\qquad r \neq 1$

$$\overset{i=1}{\alpha}, \ \overset{i=2}{\alpha r}, \ \overset{i=3}{\alpha r^2}, \ \ldots \qquad a_i = \alpha r^{i-1}$$

$$S_n^{(G)} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha \frac{r^n - 1}{r-1}$$

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^{n-1} = \alpha(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

$$(r^{n+1}-1) = (r-1)\underbrace{(r^n+r^{n-1}+r^{n-2}+\dots+r+1)}$$

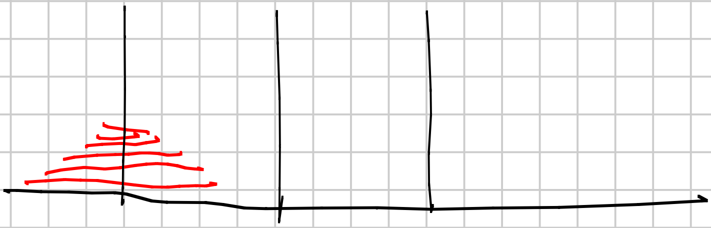
$$(r^n-1) = (r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+\dots+r+1)$$

• $S^G_1 = \alpha \qquad \alpha \cdot \dfrac{r^1-1}{r-1} = \alpha \cancel{\dfrac{r-1}{r-1}} = \alpha$

• $S^G_{n+1} = S^G_n + \alpha r^n = \alpha \dfrac{r^n-1}{r-1} + \alpha r^n =$

$$= \alpha \frac{r^n-1+r^n(r-1)}{r-1} = \alpha \frac{r^{n+1} - \cancel{r^n} + \cancel{r^n} - 1}{r-1} = \alpha \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

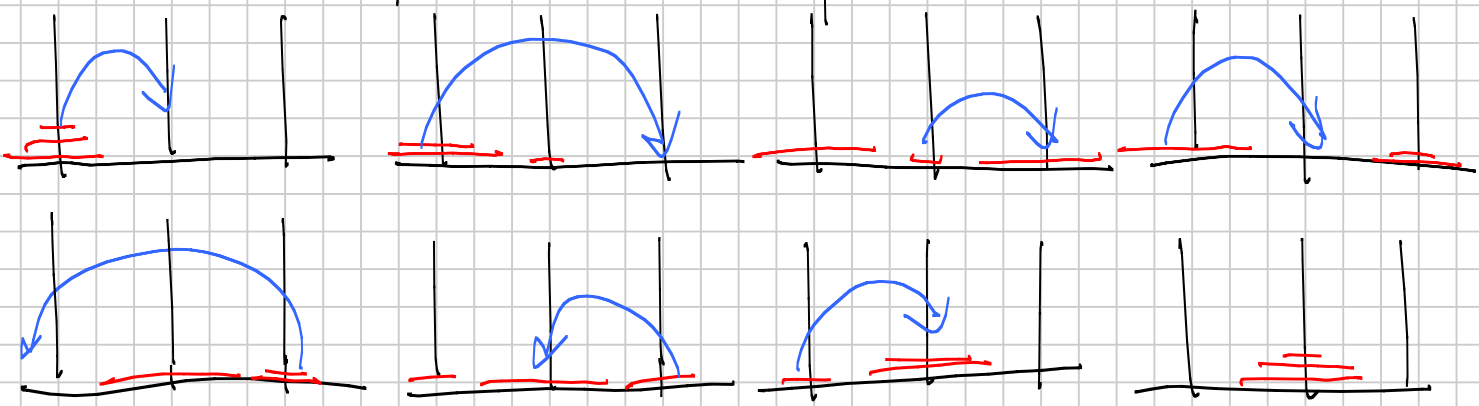
TORRE DI HANOI



• Si può spostare 1 disco alla volta (quello superiore) da un piolo ad un altro

• Non si può mettere un disco + grande sopra uno più piccolo

• Quanto vale il numero minimo di mosse necessario per poter spostare una pila di n dischi?



$$\begin{cases} N_1 = 1 \\ N_n = 2N_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$N_1 = 1 = 2^1 - 1$

$N_2 = 3 = 2^2 - 1$

$N_3 = 7 = 2^3 - 1$

$N_4 = 15 = 2^4 - 1$

$\vdots$

$N_1 = 2^1 - 1 = 1$

OK

$N_n = 2^n - 1$?

$N_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 =$

$= 2^1 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

$f(x) = \dfrac{x}{x+1} \qquad x \geq 0$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x + x + 1}{x+1}} = \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{2x+1} =$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x + 2x + 1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$\underbrace{f(f(f \ldots f}_{n \text{ volte}}(x) \ldots) = f^{(n)}(x) = \frac{x}{nx+1}$$

- $n=1$ è ovvio $\frac{x}{1\cdot x+1} = \frac{x}{x+1} = f(x)$ ok

$\uparrow$ 1 volta

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+nx+1}{nx+1}} = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$\forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

- $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$

$1 \geq 1+0$

$1 \geq 1$ vera

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0}(1+x)^n$$

$$\geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

INDUZIONE FORTE

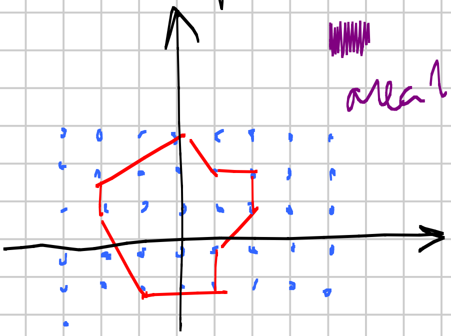
Supponiamo che un'affermazione P_n sia vera per

- tutti i valori 1, 2, 3, 4 ... n e che
- SE P_n è vera, ALLORA P_{n+1} è vera

$\rightarrow$ P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

TEOREMA DI PICK

Supponiamo di considerare in un piano cartesiano solo i punti a coordinate intere



Se un poligono ha tutti i vertici in punti del reticolo la sua area S è data da

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

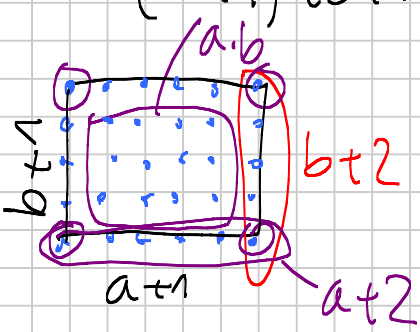
I = n° di punti interni al poligono

B = n° di punti sul bordo del poligono (spigoli e vertici)

<u>Dim</u> si dimostra a mano per i triangoli e poi si usa l'induzione forte

Rettangolo di lati di lunghezza $a+1$ e $b+1$

$S = (a+1)(b+1)$



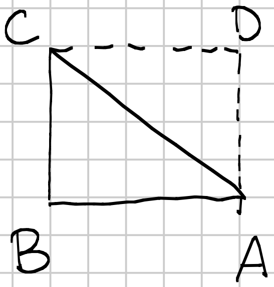
$I = a \cdot b$

$$B = 2(a+2) + 2(b+2) - 4$$
$$= 2a + 2b + 4$$

$$S = I + \frac{B}{2} - 1 = a \cdot b + \frac{2a+2b+4}{2} - 1 = ab + a + b + 1$$
$$= (a+1)(b+1)$$

Come si fa a vedere che funziona per un triangolo?

Tr. rettangolo coi cateti paralleli agli assi



AB ha $a+2$ punti (a senza contare gli estremi)

BC ha $b+2$ punti (b senza contare gli estremi)

AC ha $c+2$ punti (c senza contare gli estremi)

i = numero dei punti interni ad $\overset{\triangle}{ABC}$

Quanti sono i punti interni al rettangolo

$2i + c = ab$

Quanti sono i punti di bordo di $\overset{\triangle}{ABC}$

$B = a+2+b+2+c+2-3 = a+b+c+3$

$$I + \frac{B}{2} - 1 = i + \frac{a+b+c+3}{2} - 1 = \frac{\overbrace{2i+c}^{ab}+a+b+3-2}{2}$$

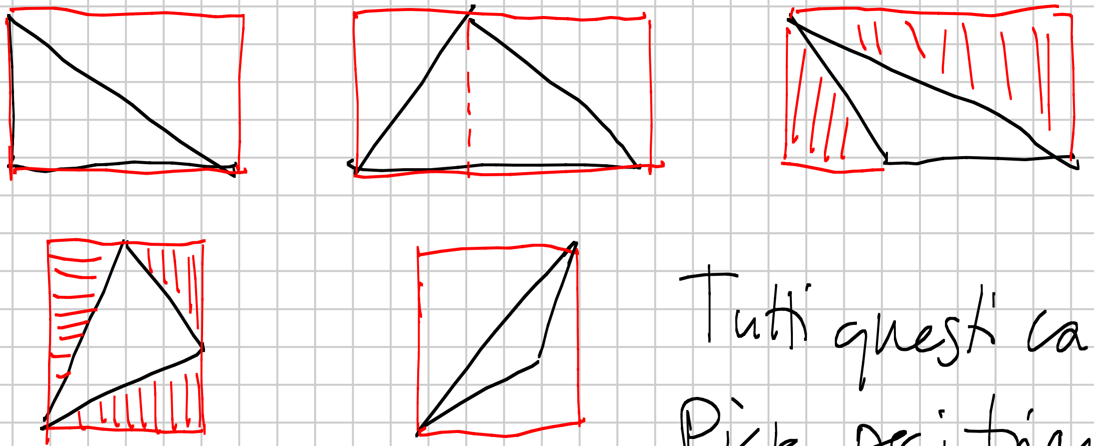
$$= \frac{ab+a+b+1}{2} = \frac{(a+1)(b+1)}{2} = \frac{S}{2}$$

Abbiamo Pick per un 

Per mostrare la validità di PICK per un triangolo qualsiasi, si divide in casi

2 lati // assi (fatto) 1 lato // assi → 2 casi

0 lati // assi (2 casi)



Tutti questi casi esauriscono Pick per i triangoli

Supponiamo che Pick sia vero per tutti i poligoni da 3 a n lati e mostriamo che è vero per poligoni con n+1 lati.

Si spezza il poligono P in 2 sottopoligoni che hanno ciascuno un minor numero di lati

se P è convesso basta tirare una diagonale

se P ha un angolo > 180° si tracciano tutte le semirette uscenti dal vertice di quell'angolo finché non se ne trova una che batte in un vertice → ci deve essere per forza, altrimenti il poligono avrebbe area infinita

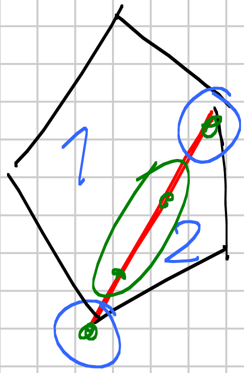
$$A = A_1 + A_2 \qquad P_1 \cup P_2 = P$$

area di P_1 area di P_2

I_1, B_1 interni e di frontiera per P_1

I_2, B_2 punti interni e di frontiera per P_2

$$A_1 = I_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \qquad A_2 = I_2 + \frac{B_2}{2} - 1$$



x = n° di punti sulla diagonale estremi esclusi

$$A_1 + A_2 = I_1 + I_2 + \frac{B_1 + B_2}{2} - 2$$

$B = B_1 + B_2 - 2 - 2x$ = n° di punti di frontiera di P

$$I = I_1 + I_2 + x$$

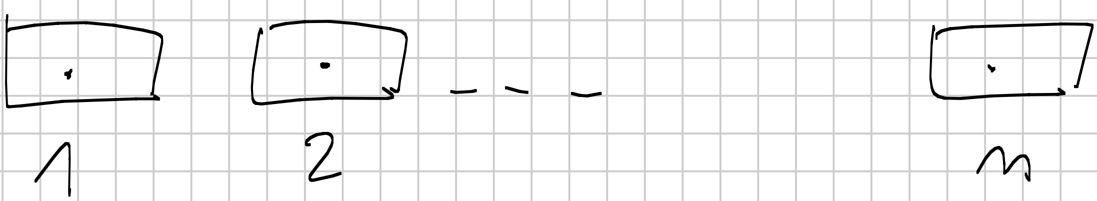
$$I_1 + I_2 = I - x \qquad B_1 + B_2 = B + 2 + 2x$$

$$A = A_1 + A_2 = I - x + \frac{B + 2 + 2x}{2} - 2 = I + \frac{B \cancel{-2x} + \cancel{2x}}{2}$$

$-2+1 = I + \frac{B}{2} - 1$ → abbiamo Pick per un poligono di $n+1$ lati

---

PRINCIPIO DEI CASSETTI



k oggetti con $k > n$

Esiste almeno un cassetto che contiene almeno due oggetti

Dimostrare che a una festa con n invitati ci sono almeno due persone che hanno dato lo stesso numero di strette di mano

n cassetti → non possono essere tutti pieni
n persone

Se è pieno il 1° cassetto, allora vuol dire che l'ultimo cassetto è vuoto e viceversa

I cassetti pieni vanno
da 0 -- a $n-2$ oppure
da 1 -- a $n-1$

quindi i cassetti pieni in tutto possono essere $n-1$

A questo punto scatta il principio dei cassetti.

Poiché gli invitati sono n e i cassetti sono $n-1$

almeno un cassetto contiene almeno due invitati

$\exists$ almeno 2 invitati che hanno dato lo stesso numero di strette di mano.

Prendiamo $n+1$ interi positivi tutti minori di $2n$

Mostriamo che ne esiste almeno uno di essi che è divisore di un altro numero di tale insieme.

$x_1, x_2 \, --- \quad x_{n+1}$

$x_1 = 2^{k_1} \cdot y_1 \qquad x_2 = 2^{k_2} \cdot y_2 \quad \cdots \qquad x_{n+1} = 2^{k_{n+1}} \, y_{n+1}$

DISPARI

$\{x_1 \, -- \quad x_{n+1}\}$

$\{y_1 \quad - \quad y_{n+1}\} \qquad y_i < 2n$

$n+1$ numeri dispari $< 2n$

possono essere tutti distinti ?

$1 \; 3 \; 5 \; .. \quad 2n-1$

$n=1 \quad n=2 \quad n=3$

$2n=2 \quad 2n=4$

Devono esserne almeno 2 uguali

i_1 i_2 $x_{i_1} = 2^{k_{i_1}} \cdot y_{i_1}$ $x_{i_2} = 2^{k_{i_2}} \cdot y_{i_2}$

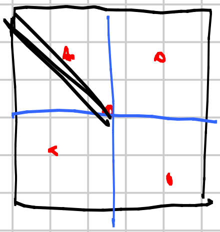
uguali

se $k_{i_1} > k_{i_2}$, x_{i_1} divide x_{i_2} $2^{k_{i_1} - k_{i_2}}$ oppure

$k_{i_2} > k_{i_2}$, x_{i_2} divide x_{i_1} $2^{k_{i_2} - k_{i_1}}$

ESEMPIO GEOMETRICO

In un quadrato di lato 1 prendiamo 5 punti. Mostriamo che ne esistono almeno 2 che distano fra loro al più .. $\sqrt{2}/2$



$$d_{max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per il principio dei cassetti

$\exists$ almeno un quadrato che contiene almeno 2 punti $\longrightarrow$ $\exists$ due punti che distano fra loro $d \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$