SENIOR 2011 - A3 MEDIUM

Titolo nota 09/09/2011

Successioni, eq. funzionali

Ricorrenze lineari:

$$a_{n+1} = c \cdot a_n \Rightarrow a_n = c^n \cdot a_0 \quad \text{(omogenea)}$$

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + d \quad \text{(succ. perturbata)}$$

$$b_n = a_n + \beta$$

$a_{n+1} = c \cdot a_n + d$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \beta = c \cdot a_n + d + \beta = c \cdot b_n \underbrace{- c\beta + d + \beta}_{=0}$$

$a_n = b_n - \beta$

$$b_{n+1} = c \cdot b_n$$

$$-c \cdot \beta + d + \beta = 0 \leadsto \beta = \frac{d}{c-1}$$

Ora sappiamo che $b_n = c^n \cdot b_0$, ma allora

$$a_n = b_n - \beta = c^n \cdot b_0 - \frac{d}{c-1}$$

Per sapere chi è b_0, utilizziamo la condizione iniziale

Metodo alternativo:

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + d$$

$$a_1 = c \cdot a_0 + d$$

$$a_2 = c \cdot a_1 + d = c^2 \cdot a_0 + c \cdot d + d$$

$$a_3 = c \cdot a_2 + d = c^3 \cdot a_0 + c^2 d + c d + d$$

$\vdots$

Ovviamente la formula è da dimostrare per induzione $\longrightarrow$

$$a_n = c^n \cdot a_0 + d\left(1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1}\right)$$

$$a_n = a^n \cdot a_0 + d\,\frac{c^n - 1}{c-1}.$$

$$\boxed{a_{n+1} = c \cdot a_n}.$$

Prendiamo la classe di tutte le soluzioni di questa successione per ricorrenza.

1) Se a_n è soluzione e b_n è soluzione, anche $a_n + b_n$ è soluzione;

2) Se a_n è soluzione, anche $\lambda \cdot a_n$ è soluzione ($\lambda \in \mathbb{R}$).

o —— o —— o —— o

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + \text{Mostro}(n)$$

Che proprietà sono verificate dall'insieme delle soluzioni di questa?

Se a_n è sol. e b_n anche, cosa posso dire di $a_n + b_n$?

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + \text{Mostro}(n)$$

$$b_{n+1} = c \cdot b_n + \text{Mostro}(n)$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = c \cdot (a_n + b_n) + 2 \cdot \text{Mostro}(n)$$

Non va bene ...

E per la differenza?

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) = c \cdot (a_n - b_n)$$

$$\boxed{\text{Soluzione generale con Mostro}} = \boxed{\text{Sol. generale dell'omogenea} + \text{Sol. speciale con Mostro}}$$

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + d$$

Vogliamo trovare tutte le soluzioni di questa. L'omogenea la sappiamo risolvere, ci basta trovare UNA soluzione particolare.

Proviamo a cercarla $a_n \equiv \alpha$. Cosa deve valere?

$$\alpha = c \cdot \alpha + d$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha = -\frac{d}{c-1}$$

Quindi la soluzione generale è:

$$a_n = -\frac{d}{c-1} + c^n \cdot \lambda$$

dove λ si deve trovare con le condizioni iniziali.

Proviamo a risolvere $a_{n+1} = 3a_n + n$

$$a_n = \alpha n + \beta$$

$$\alpha(n+1) + \beta = 3(\alpha \cdot n + \beta) + n$$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 3\alpha n + 3\beta + n$$

$$(2\alpha + 1)n + 2\beta - \alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha + 1 = 0 \qquad 2\beta = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{4} + 3^n \cdot \ell$$

Esempio 3. $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} + \boxed{3n^2}$

Mostro (n)

$$a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

$$-3n^2 + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 5(\alpha n^2 + \beta n + \gamma) - 6(\alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \gamma)$$

Facciamo i conti e troviamo α, β, γ

$$a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma + \ell_1 \cdot 2^n + \ell_2 \cdot 3^n$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Piccola digressione: Consideriamo l'insieme delle successioni che verificano

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

è chiuso per somma e moltiplicazione per numeri $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi se abbiamo a_n che soddisfa e b_n che soddisfa, allora

$$c_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$$

Supponiamo di voler risolvere

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = 0 = \alpha \cdot a_0 + \beta \cdot b_0 \\ a_1 = 1 = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{ha sol.} \Updownarrow \; a_0 \cdot b_1 - b_0 \cdot a_1 \neq 0$$

Sapendo questo cerchiamo succ. della forma $a_n = \rho^n$

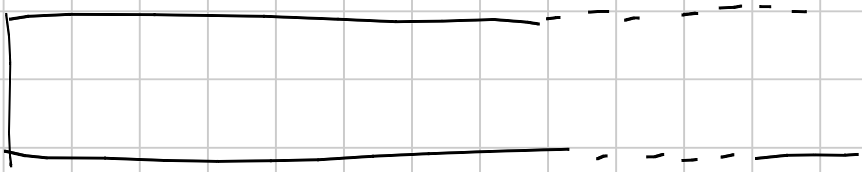
$$x^2 = 5x - 6$$

nel caso l'equazione avesse radici doppie, considera

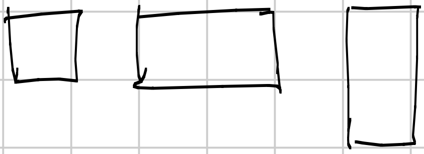
$a_n = \rho^n$, $b_n = n\rho^n$.

Ovviamente tutto questo vale anche per le ricorrenze con K termini.

Esempio K.

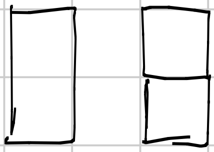


rettangolo $2\times n$, da tassellare con mattonelle 1×1 o 2×1

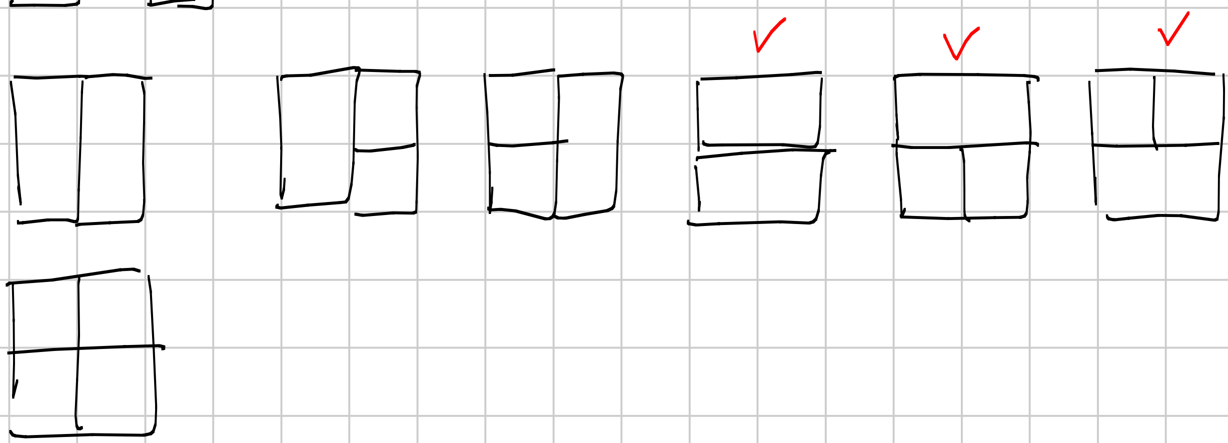


a_n

$n=1$



$n=2$



($a_0 = 1$)

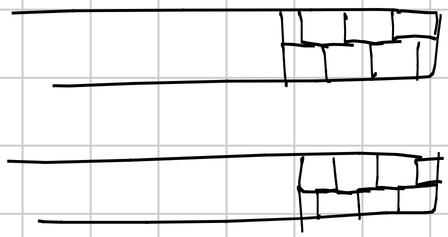
$a_1 = 2$ $\qquad a_2 = 7$

Come posso fare $2\times n$. Guardo cosa succede a destra. Cerco il punto più vicino dove non taglio nessuna mattonella.

$$a_n = \underbrace{2\cdot a_{n-1}}_{\substack{\text{se posso}\\ \text{tagliare alla}\\ \text{prima colonna}}} + \underbrace{3\cdot a_{n-2}}_{\substack{\text{se posso}\\ \text{tagliare}\\ \text{alla } 2^a \text{ colonna}}} + 2\cdot a_{n-3} + 2\cdot a_{n-4} + \dots 2\cdot a_1$$

posi. a destra nel caso taglio alla 1ª colonna: 3

Da 3ª colonna in poi l'unica è:



Quindi 2 possibilità per la parte a dx

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-3} + \dots + 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_0$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 3a_{n-3} + 2a_{n-4} + \dots + 2a_0$$

Sottraggo:

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}.$$ Ok bene!

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot A_n + a_{n-1} \\ A_{n+1} = a_{n+1} + A_n \end{cases} \qquad A_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}$$

$$\underset{\shortparallel}{} \frac{a_{n+2} - a_n}{2} = a_{n+1} + \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}.$$

$$- \; a_{n+1} = a_n + \underbrace{a_{n-1} + \dots + a_0}_{= a_n} .$$

$$- \; a_{n+1} = n a_n + \underbrace{(n-1) a_{n-1} + \dots + 2a_2 + a_1}_{= a_n} .$$

$$- \; a_{n+1} = a_n + 2 \cdot a_{n-1} + \dots + (n-1) a_2 + n a_1$$

$$- \; a_{n+1} = a_n + a_n = 2 \cdot a_n = 2^n \cdot \alpha$$

$$- \; a_{n+1} = (n+1) a_n = (n+1)! \cdot \alpha$$

— o — o — o —

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \text{Mostro}(n)$$

sol. particolari

Mostro = polinomio $\boxed{ok}$ polinomio dello stesso grado

= esponenziale $\boxed{ok}$ esponenziale con la stessa base, con un coeff. davanti

$7^n \rightsquigarrow \alpha \cdot 7^n$ ⚠ *

= polinomio + esp. $\boxed{ok}$ pol. + esp.

= pol. · esp. $\boxed{ok}$ pol. · esp.

= $\log(n)$

* Attenzione, se 7 è rad. del polinomio caratteristico allora provare $\alpha \cdot n \cdot 7^n$ come sol. part.

$$\alpha \cdot 7^{n+2} = \alpha \cdot 7^{n+1} + \alpha \cdot 7^n + 7^n$$

$$\alpha 7^2 = \alpha 7 + \alpha + 1$$

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + \log(n)$$

$$a_n = \log(n) + c\log(n-1) + c^2\log(n-2)$$
$$= \log\left(n \cdot (n-1)^c (n-2)^{c^2} \cdots \cdot 2^{c^{n-1}}\right)$$

logaritmi, purtroppo, no!

$$\text{Mostro}(n) = \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{i} = \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{i}$$

$$\rho_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$
$$\rho_2 = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta.$$

Funzioni trigonometriche sì, se della forma

$$\sin(n\theta + \varphi), \quad \cos(n\theta + \xi)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

— $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ <~ mi ricorda la formula di duplicazione del coseno

$$a_0 = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \cos(2\theta), \quad a_2 = \cos(4\theta)$$

$$\ldots \quad a_n = \cos(2^n\theta)$$

$$a_0 = 2$$

$$a_0 = 2\cos\theta$$

$$a_1 = 2\left(2\cos\theta\right)^2 - 1 = 8\cos^2\theta - 1 =$$

$$a_0 = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \text{ dove } x = e^{i\theta}$$

$$a_1 = 2\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)^2 - 1 = \cancel{2}\,\frac{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}{\cancel{4}\,2} - 1 =$$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2}$$

$$a_1 = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} \qquad a_2 = \frac{x^4 + \frac{1}{x^4}}{2} \qquad a_3 = \frac{x^8 + \frac{1}{x^8}}{2}$$

$$a_n = \frac{x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}}}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad a_0 = \dfrac{x + \frac{1}{x}}{2}$ che valori potrà assumere?

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{se} \quad x = 1$$

Con rag. di cont. dico che riesco a prendere tutti i num. reali ≥ 1, e anche quelli ≤ -1.

$$a_n = \lfloor (\sqrt{5}+2)^n \rfloor$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ A\sqrt{5}+B}}{(\sqrt{5}+2)^n} + \underset{\substack{\shortparallel \\ -A\sqrt{5}+B}}{(2-\sqrt{5})^n} = 2B \in 2\mathbb{N}$$

$$-1 < 2-\sqrt{5} < 0 \qquad |2-\sqrt{5}| < 1$$

$$b_n = (\sqrt{5}+2)^n + (2-\sqrt{5})^n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ a_n + 1 & \text{se } n \text{ e' pari} \end{cases}$$

$$b_n = (\sqrt{5}+2)^n - \varepsilon = \lfloor (\sqrt{5}+2)^n \rfloor \qquad (n \text{ dispari})$$

$$b_n = (\sqrt{5}+2)^n + \varepsilon = \lfloor (\sqrt{5}+2)^n \rfloor + 1 \qquad (n \text{ pari})$$

$$x^2 - 4x - 1$$

$$\begin{cases} b_{n+1} = 4b_n + b_{n-1} \\ b_0 = 2 \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$(\sqrt{2}+1)^n = a_n + \sqrt{2}\, b_n$$

$$(\sqrt{2}-1)^n = -a_n + \sqrt{2}\, b_n$$

$$\rightsquigarrow b_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{2\sqrt{2}}$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n}{2}$$

eq. funzionali

$f: S \longrightarrow S$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x \in S \quad \forall y \in S$$

$S = \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = \lambda \cdot x$ per qualche $\lambda \in \mathbb{Q}$

- $f(0) = 0$
- $f(n) = n \cdot f(1)$ (induzione) $f(x) = \lambda x$ su $\mathbb{N}$
- $f(x) = \lambda x$ su $\mathbb{Z}$
- $f(x) = \lambda x$ su $\mathbb{Q}$ (induzione e $f(mx) = m f(x)$, $x = \frac{p}{m}$)

Non possiamo andare oltre $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$$f(a+\sqrt{2}b) = \begin{cases} b + \sqrt{2}a \\ a \\ b \\ a+b \end{cases} \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

f lineare $\Rightarrow f(a+\sqrt{2}b) = \lambda a + \lambda\sqrt{2}b \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$

$$f(a+\sqrt{2}b) = a f(1) + b f(\sqrt{2}).$$

Quindi ci sono sol. dell'eq. di Cauchy brutte quanto voglio, in particolare il grafico è denso in $\mathbb{R}^2$, cioè preso un qualunque quadratino in $\mathbb{R}^2$, esso conterrà almeno 1 punto del grafico.

Vorrei fare un esempio di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi l'eq. di Cauchy ma non sia lineare.

BASI DI HAMEL Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ è detto base di Hamel se soddisfa le seguenti 2 proprietà:

① per ogni $r \in \mathbb{R}$, esistono un num. finito di $b_1, b_2, \dots, b_k \in B$ e $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$r = q_1 b_1 + q_2 b_2 + \dots + q_k b_k$$

② se ho $\{b_1, \dots, b_k\} \subseteq B$ $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$q_1 b_1 + q_2 b_2 + \dots + q_k b_k = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$$

Sappiamo subito dalla ②+① che ogni numero reale ha una e una sola rapp. con la base di Hamel.

Avendo una base di Hamel possiamo costruire un controesempio alla Cauchy

$$f(x) = f(q_1 b_1 + q_2 b_2 + \dots + q_k b_k) =$$

$$= q_1 f(b_1) + q_2 f(b_2) + \dots + q_k f(b_k)$$

Per costruire una f che soddisfi Cauchy, mi basta fissare i valori sulla base di Hamel.

$$f(b_1) = b_2 \quad , \quad f(b_2) = b_1 \quad e \quad f(b_i) = b_i \quad \forall i \geq 3$$

$$f(\underline{\alpha_1 b_1} + \underline{\alpha_2 b_2} + \text{roba}) = \alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_1 + \text{roba}$$

• $f(x + 3f(y)) = ay + f(x)$

$[a = 0 \quad f \neq 0, \quad \text{esiste?}]$

1 $\cancel{x=0}$ $\quad f(3f(y)) = ay + f(0)$ $\quad a \neq 0$ $\quad f$ iniettiva e surgettiva

2 x_0 t.c. $f(x_0) = 0$ $\quad y = x_0$ in ↑

$$f(\cancel{0}) = a x_0 + \cancel{f(0)} \qquad x_0 = 0$$

3 back to 1 : $f(3f(y)) = ay$

4 poiché f è suriettiva anche $3f$ lo è e quindi $\forall z$ posso trovare y t.c. $3f(y) = z$

$$f(x + z) = f(z) + f(x) \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $f(x) = \lambda x$ per $x \in \mathbb{Q}$

Sostituendo trovo $\lambda^2 \cdot 3 = a$ $\rightsquigarrow$ $a \geq 0$

per a negativi non ci sono soluzioni

$f(x) = \lambda x$ per $x \in \alpha \mathbb{Q}$

fisso la base di Hamel:

So che $f(b_i) = \pm \lambda_0 b_i$ $\boxed{\lambda_0^2 \cdot 3 = a}$

$$f(x + 3f(y)) = ay + f(x)$$

Se $\frac{a}{3} \in \mathbb{Q}^2$, ho soluzioni non banali, altrimenti boh!

$\underline{5}$ $a = 0$ $f(x + 3f(y)) = f(x)$

base di Hamel $= b_1, b_2, \ldots$ —

$f(b_i) = b_1$ per ogni $i > 1$

$f(b_1) = 0$

$$f(x + 3f(y)) = f(x + 3\overset{\overset{k \in \mathbb{Q}}{\downarrow}}{k} \cdot b_1) = f(x) + 3kf(b_1) =$$
$$= f(x)$$

- 1 sugli interi e 0 altrove, funziona anche

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lfloor x \rfloor \equiv 1 \ (3) \\ 2 & \equiv 2 \ (3) \\ 0 & \equiv 0 \ (3) \end{cases}$

—— o ——

con $\alpha > 0$

$$1 \quad \lambda_0 \quad \lambda_0^2 \quad \lambda_0^3 \quad \cdots \quad \lambda_0^n \quad \cdots$$

$$\alpha \quad \lambda_0\alpha \quad \lambda_0^2\alpha \quad \cdots \quad \cdots$$

Se fosse stato $\lambda_0 = \sqrt{2}$, allora prendo la base di Hamel di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

Quando possiamo affermare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sodd. Cauchy è lineare?

- monotonia;
- locale limitatezza;
- continuità in un punto;
- un qualsiasi cerchietto in $\mathbb{R}^2$ è privo di punti del grafico di f.

→ breve sketch di dimostrazione: loc. lim. in 0

wlog che $f(1)=0$ $\quad f(x) - x f(1) = g(x)$

$g(1) = g(0) = 0 \rightsquigarrow g(\mathbb{Q}) = 0$

prendiamo un η t.c. $g(\eta) > 0$.

Supponiamo per assurdo che $|g(x)| \le M \quad \forall\, |x| \le \varepsilon$

Prendo n t.c. $g(n\eta) = n\, g(\eta) > M$

Ora so che $\exists\ q \in \mathbb{Q}$ t.c. $|n\eta - q| \le \varepsilon$

$\rightsquigarrow g(n\eta - q) = g(n\eta) - g(q) > M$

contraddicendo l'ipotesi $(|r_\eta - q| < \varepsilon)$.

$\boxed{\text{IMO } 1992-2}$ $f(x^2+f(y)) = y + [f(x)]^2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

① $x=0$ $\quad f(f(y)) = y + f(0)^2 \quad$ f in. e su.

② $y=x_0$ $\quad f(0) = x_0 + f(0)^2$

$f(x_0)=0$

$x=x_0 \quad f(x_0^2+f(y)) = y$

$x=-x_0 \quad f(x_0^2+f(y)) = y + [f(-x_0)]^2$

$\rightsquigarrow f(-x_0)=0$

$-x_0 = x_0 \Rightarrow x_0 = 0$

③ back to ① $\quad f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

④ $y=0$ $\quad f(x^2) = f(x)^2$

⑤ $y=f(z)$ $\quad f(x^2+f(f(z))) = f(z) + f(x)^2$

$f(x^2+z) = f(z) + f(x^2)$

Questa è cauchy, chiamando $x^2=y$

$$f(y+z) = f(z) + f(y) \quad \forall z \in \mathbb{R},\ \forall y \geq 0$$

$\rightsquigarrow f(x) = \lambda x$ per $\lambda \in \mathbb{Q}$

ci dice $\lambda = \pm 1$

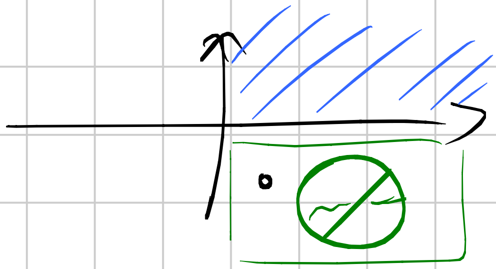
⑥ $-\ f(x^2+z) = f(z) + f(x)^2$

$f(z + \text{qualcosa di positivo}) = f(z) + \text{qualcosa di positivo}$

$w \geq z \qquad x = \sqrt{w-z}$

$$f(w) = f(z) + f(\sqrt{w-z})^2 \geq f(z)$$

$-\ f(x^2) = (f(x))^2$



$\boxed{\text{BMO 1997-4}}$ $\quad f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2 + y \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

① $x=0 \qquad f(f(y)) = y + f(0)^2 \qquad f$ in surg.

② $x=x_0 \qquad f(f(y)) = y + 0^2 \qquad f(0)=0$

③ $f(f(y)) = y$

$y=0 \qquad f(xf(x)) = [f(x)]^2$

$x = f(z) \qquad f(f(z)\,f(f(z))) = [f(f(z))]^2 = z^2$

$$\overset{\shortparallel}{f(z\,f(z))} = [f(z)]^2$$

$f(z)^2 = z^2 \qquad \forall z \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \pm x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dobbiamo controllare il MISTONE.

$$f(a)=a \qquad f(b)=-b \qquad a,b\neq 0$$

$$f(a^2-b)=a^2+b$$

a^2-b $\quad$ $b-a^2$

$\boxed{b=0}$ $\quad$ $\boxed{a=0}$

Non va bene, il mistone non ha colpito!

BMO '07 - 2 $\qquad f(f(x)+y)=f(f(x)-y)+4f(x)\cdot y$

$y=f(x)$

$$f(2\cdot f(x))=f(0)+4f(x)^2 \qquad z=2f(x)$$

$$f(z)=f(0)+z^2 \qquad z\in 2\,\mathrm{Im}(f)$$

$y=f(x)-2f(z)$ ← è per fare in modo che $f(f(x)-y)=f(2f(z))$ e quindi io lo posso calcolare

$$f(2(f(x)-f(z)))=f(0)+4f(z)^2+4f(x)(f(x)-2f(z))$$
$$=f(0)+[2(f(x)-f(z))]^2$$

$$f(z)=f(0)+z^2 \qquad z\in 2(\mathrm{Im}f-\mathrm{Im}f)$$

$f(\text{qualcosa}) = f(\text{qualcos'altro}) + 4f(x)\cdot z$

$f(q\ldots) - f(q\ldots) = 4f(x)\cdot z$

fisso $f(x) \neq 0$, ottengo che in effetti
($f \equiv 0$ soluzione?) $\quad Imf - Imf = \mathbb{R}$

$Imf - Imf = \mathbb{R}$ vuol dire che, preso un qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, so trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) - f(\beta) = c$.

$f(x) \neq 0$

$\forall$ c scelgo z t.c. $4f(x)\cdot z = c$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{c}{4f(x)}$$

$$f(x+f(z)) - f(x-f(z)) = 4z f(x)$$

$$f\left(x+f\left(\frac{c}{4f(x)}\right)\right) - f\left(x-f\left(\frac{c}{4f(x)}\right)\right) = c$$

$$\alpha = x + f\left(\frac{c}{4f(x)}\right) \qquad \beta = x - f\left(\frac{c}{4f(x)}\right)$$

$$f(\alpha) - f(\beta) = c.$$