C1 Medium - dario2994 (generatrici)

Titolo nota 06/09/2011

$a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = ogf(a_i)$

$ogf(a_i) \qquad ogf(b_i)$

$ogf(a_i) + ogf(b_i) := ogf(a_i + b_i)$

$ogf(1) = 1 + x + x^2 + \cdots$

$ogf(i) = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

$ogf(i+1) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

$ogf(a_i) \cdot ogf(b_i) := ogf\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)$

$(1 + 2x + 3x^2 + 40x^3)(3 + 2x + x^2 + 2x^3) = \cdots \quad x^2(1\cdot 1 + 4 + 9)$

$ogf(1) \cdot ogf(1) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots + x^4) = \cdots \quad x^4(1+1+1+1+1) = 5$

$ogf\left(\sum_{j=0}^{i} 1 \cdot 1\right) = ogf(i+1)$

$ogf(a_i) = ogf(b_i) \iff \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i = b_i$

$A, B, C \quad ogf(a_i, b_i, c_i)$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + B = B + A$

$AB = BA$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B)\, C$

$A(B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$AB = 0 = ogf(0) \longrightarrow A = 0 \lor B = 0$

Data $ogf(a_i)$ $\quad \frac{1}{ogf(a_i)} = ogf(b_i) \iff ogf(a_i)\,ogf(b_i) = 1$

$$[x^k] \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_k$$

L'inverso di $ogf(a_i)$ esiste ed è unico $\iff a_0 \neq 0$

Dim.

Caso I: $a_0 = 0$ $\quad ogf(b_i) \cdot ogf(a_i) = 1$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{b_0 \cdot a_0} = [x^0]\, ogf(b_i) \cdot ogf(a_i) = 1$$

$\lightning$

Caso II: $a_0 \neq 0$

$a_0 \cdot b_0 = 1 \to b_0 = \frac{1}{a_0}$

$b_0, b_1, \ldots, b_n$ già scelti

$$\underbrace{[x^{n+1}]\, ogf(a_i) \cdot ogf(b_i)}_{\shortparallel} = [x^{n+1}]\, 1 = 0$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n+1} a_j b_{n+1-j} = 0}$$

$$-a_0 \cdot b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \underbrace{b_{n+1-j}}_{\text{Ho un valore già scelto}}$$

$n+1$

$$b_{n+1} = -\frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_{n+1-j}}{a_0}$$

$$ogf(a_i) = \frac{1}{P(x)}$$

$ogf(1) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \overset{?}{=} \frac{1}{1-x}$

Vale come uguaglianza tra reali complessi per $|x| < 1$

$$\underbrace{ogf(1)}\cdot \underbrace{(1-x)}_{\text{è una generatrice}} = 1$$

ho solo 0

$$[x^0] = 1\cdot 1 = 1$$

$$[x^n](1\cdot 1) + (1\cdot(-1)) + 0 = 0$$

$$ogf(1) = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad a_{-1} = 0$$

$$ogf(a_i)\cdot(1-x) = ogf(a_i - a_{i-1})$$

$$\frac{ogf(a_i)}{1-x} = ogf(a_i)\cdot ogf(1) = ogf\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\cdot 1\right) =$$

$$\frac{ogf(a_i)}{1-x} = ogf(a_0 + a_1 + \dots + a_i)$$

$$ogf(a_{i+1}) \overset{?}{=} a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots$$

$$= \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) - a_0}{x}$$

$$ogf(a_{i+1}) = \frac{ogf(a_i) - a_0}{x}$$

$$\underline{ogf(a_{i-1})} = \underset{0}{a_0x + a_1x^2 + \dots} = \underline{x\, ogf(a_i)}$$

$$ogf(F_i) = F(x).$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$

ci torniamo tra un attimo.

$$ogf(F_{i+2}) = ogf(F_{i+1} + F_i) = ogf(F_{i+1}) + ogf(F_i)$$

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x)$$

$$ogf(F_{i+1}) = \frac{F(x) - F_0}{x} = \frac{F(x)}{x} \qquad ogf(F_i) = F(x)$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

$$D\, ogf(a_i) := ogf((i+1)a_{i+1})$$

$$D\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

$$\int ogf(a_i) := ogf\left(\frac{a_{i-1}}{i}\right) \quad \text{per } i=0 \quad 0$$

$$\int D\, ogf(a_i) = ogf(a_i) \quad (\text{a meno di } [x^0])$$

$$D \int ogf(a_i) = ogf(a_i)$$

$$ogf(a_i) \circ \underset{B(x)}{ogf(b_i)} = ogf\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} [x^i]\left(a_j (ogf(b_i))^j\right)}\right)$$

$$a_0 + a_1 B(x) + a_2 (B(x))^2 + a_3 (B(x))^3 + \ldots$$

$$ogf(k^i) \overset{?}{=} 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots = 1 + (kx) + (kx)^2 + \ldots$$

$$= ogf(1) \circ (kx) = \frac{1}{1-kx}$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \qquad \alpha, \beta \text{ le radici di } 1-x-x^2$$

$$F(x) = -x\left(\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\right) = \frac{-x}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right) =$$

$$\frac{x}{\alpha-\beta}\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{x}{\beta}}\right)$$

$$F_k = [x^k]F(x) = [x^{k-1}]\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - \left(\frac{1}{\beta}\right)^k}{\alpha-\beta} = \frac{\beta^k - \alpha^k}{\alpha-\beta}$$

$$\text{ogf}\left(\binom{n}{i}\right) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n + 0 - - -$$

$$= (x+1)^n$$

$$\text{ogf}\left(\binom{i+n}{n}\right) \overset{?}{=} \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

$1, n+1$

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\dots(1+x+x^2+\dots)}_{(n+1)}$$

$\binom{k+n}{n}$ ‖ hope

$[x^k]$ = modi di scegliere $n+1$ naturali a somme k.

$$\| \quad \binom{k+n}{n}$$

Dato $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ diciamo $A(n)$ il numero di $2n$-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots y_n) \in (0,1)$ t.c.:

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e' pari

e $B(x)$ e' dispari.

Quanto vale $\frac{A(n)}{B(n)}$?

a_k e' il numero di $2n$-uple t.c.) fa k.

$$[x^k](x+3)^n = a_k$$

$x_1=0$ $\cancel{y_1}=1$ $x_2=1$ $\cancel{y_2}=1$ n $x_n=1$ $y_n=0$

$(x+1+1+1)(x+1+1+1) - - (x+1+1+1)$

(x_i, y_i) $(x_i\, y_i)$ $1,1$

x Boh 1 Boh

$[x^k](x+3)^n = a_k$

$[x^k](x+3)^n = a_k$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$

$A(n) = a_0 + a_2 + \dots + a_n, a_{n-1}$

$$\frac{(x+3)^n + (-x+3)^n}{2} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n.$$

$$\frac{(1+3)^n + (-1+3)^n}{2} = A(n) = \frac{4^n + 2^n}{2}$$

$$\frac{(1+3)^n - (-1+3)^n}{2} = B(n) = \frac{4^n - 2^n}{2}$$

Sia $a_0, a_1, a_2 \dots$ definita da una ricorrenza infinita:

a_0 ha il valore che vuole

$$a_{n+1} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

$ogf(a_i) = A(x)$ $ogf(b_i) = B(x)$

$$ogf(a_{n+1}) = ogf\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)$$

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = A(x) \cdot B(x)$$?

$$A(x) = \frac{a_0}{1-xB}.$$

$a_0 = 100$

$a_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{100}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{100}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{100(1-x)}{1-2x} = 100\left[\frac{1-x}{1-2x}\right]$$

$$100(1-x)\,\text{ogf}(2^i) = 100\cdot\text{ogf}(2^i - 2^{i-1}) = \text{ogf}(100(2^{i-1})).$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ e caso

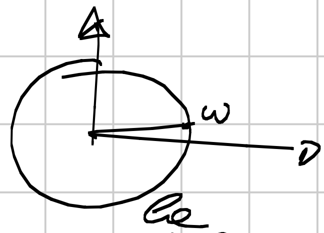
$$a_{n+k+1} = b_0 a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \dots - b_k a_n \qquad \text{ogf}(a_i)$$

$$\text{ogf}(a_{n+k+1}) =$$

Roots of unity filter

Sia $A(x) = \text{ogf}(a_i)$. e sia p un numero primo.

$$b_i := \begin{cases} a_i & \text{se } p \mid i \\ 0 & \text{se } p \nmid i \end{cases}$$



$$B(x) = \text{ogf}(b_i)$$

$$a_0 + a_p x^p + a_{2p} x^{2p} + \dots$$

sia ω la radice primitiva dell'unità p-esima.

$$B(x) = \frac{\sum_{j=0}^{p-1} A(\omega^j x)}{p}$$

---

b_k

$$[x^k] \frac{\sum_{j=0}^{p-1} A(\omega^j x)}{p} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} a_k (\omega^j)^k = a_k\left(\frac{\sum_{j=0}^{p-1}(\omega^j)^k}{p}\right)$$

Caso I: $p \mid k$ In questo caso vorrei

$$\frac{\sum_{j=0}^{p-1}(\omega^j)^k}{p} = 1$$

$$\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(\omega^k)^j = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} 1 = 1$$

Caso II $p \nmid k$

$$\frac{\sum_{s=0}^{p-1} (\omega^s)^k}{p} = 0 \iff \sum_{s=0}^{p-1} (\omega^k)^s = 0$$

ω^k se $p \nmid k$ è una radice primitiva p-esima dell'unità.

$$\underline{(\omega^k - 1)}\Big(\underbrace{\sum_{s=0}^{p-1} (\omega^k)^s}_{=0}\Big) = \underline{(\omega^k)^p - 1} = 0$$

non si annulla

Quanti sono i numeri di n cifre che sono divisibili per 3 e contengono solo cifre $\{2,3,7,9\}$?

La somma delle cifre deve essere divisibile per 3.
Devo scegliere n numeri da $\{2,3,7,9\}$ con somma $\equiv 0 \ (3)$

$$\underbrace{(x^2+x^3+x^7+x^9)(x^2+x^3+x^7+x^9) \cdots (x^2+x^3+x^7+x^9)}_{n}$$

$$\| \\ (x^2+x^3+x^7+x^9)^n$$

$$(x^2+x^3+x^7+x^9)^n = P(x)$$

$$\frac{P(x)+P(\omega x)+P(\omega^2 x)}{3}$$

Il risultato è $\dfrac{P(1)+P(\omega)+P(\omega^2)}{3}$

4^n

$P(\omega)$? $\quad (\omega^2+1+\omega+1)^n = (1+\underline{(\omega^2+\omega+1)})^n = 1$

$P(\omega^2)$? $= 1$

$$\boxed{\frac{4^n+2}{3}}$$

Romania 2003.

exponential generating function.

$Egf(a_i) = ogf\left(\frac{a_i}{i!}\right)$

$Egf(a_i) + Egf(b_i) = Egf(a_i + b_i)$

$Egf(a_{i+1})\ ? = D\ Egf(a_i)$

$Egf(a_i) \cdot Egf(b_i) = ogf\left(\frac{a_i}{i!}\right) \cdot ogf\left(\frac{b_i}{i!}\right) =$

$= ogf\left(\sum_{j=0}^{i} \frac{a_j\, b_{i-j}}{j!\,(i-j)!}\right) = Egf\left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_j\, b_{i-j}\right)$

$Egf(1)\ ? \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = e^x$

IMO 5 2008.

$k \geq n > 0$; $k \equiv n\ (2)$

$2n$ lampadine numerate.

Sequenze di mosse = cambiare da ON → OFF le ~~1~~ alcune lampadine

Sia $A(k)$ il numero di sequenze di k mosse t.c. alla fine le prime n sono accese, le seconde n sono spente.

Sia $B(k)$ " " — — — — — — — — , le seconde n non sono state toccate.

Calcolare $\frac{A(k)}{B(k)}$.

— o —

2^{k-n}.

Mosse di tipo B = associare ad ognuna delle prime n lampadine un numero dispari e poi ordinarle in tutti i modi possibili

$\underline{a_1} \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad \underline{a_n}$

$$\boxed{\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1, a_2, \dots, a_n}} = \binom{k}{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

3 Campadine A, B, C
1 rosse nelle prime 3 nelle seconde 5 nelle 3°

$\Updownarrow$

numero di modi di ordinare 9 palline di cui 1 rosse, 3 blu, 5 verdi: $\dfrac{9!}{1!\,3!\,5!} = \binom{9}{1,3,5}$

$$[x^k]\, F(x) = \frac{B(k)}{k!} =$$

$$F(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^n = \operatorname{egf}(B(i)).$$

gli esponenti si sommano $\rightarrow [x^k]$ mi assicura k mosse totali.

$$\frac{1}{a_1!} \cdot \frac{1}{a_2!} \cdots \cdots \frac{1}{a_n!} = \frac{\binom{k}{a_1\, a_2 \cdots a_n}}{k!}$$

$$B(k) = k! \cdot [x^k]\, F(x).$$

o

$A(k)$?

$$A(k) = k! \cdot [x^k] \underline{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^n} \underline{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^n}$$

$F(x)$ lo so scrivere bene. e^x senza i coefficienti pari! $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$A(k) = k!\,[x^k] \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n = k!\,[x^k] \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}\right)^n = \frac{\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^n}{2^n}$$

$$B(k) = k!\,[x^k] \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$$

$$\rightarrow \frac{A(k)}{B(k)} = \frac{[x^k]\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^n}{[x^k]\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{[x^k]\, g(2x)}{[x^k]\, g(x)} = \frac{z \cdot 2^k}{z} = 2^k$$

$$2^k / 2^n = 2^{k-n}.$$

$a_0, a_1, \dots$ e $b_0, b_1, \dots$ sono uguali

$$\Updownarrow$$

$$ogf(a_i) = ogf(b_i).$$

Snake oil method

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} z_{j,n}$$

$z_{m,n}$ con $n < m$ e' 0

$$z_{j,n} = \binom{n}{j}\binom{n+100}{j}$$

$$\binom{(n+100)\cdot 30^n}{n-j} -$$

$$ogf(a_i) = \sum_{j=0}^{\infty} ogf(z_{j,i}).$$

$$= z_{j,0} + z_{j,1}\, x + z_{j,2}\, x^2 + \dots$$

$$ogf(a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i (a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \left(\sum_{j=0}^{i} z_{j,i}\right) =$$

$[x^0]$ $z_{0,0}$

$[x^1]$ $z_{0,1}$ $z_{1,1}$

$[x^2]$ $z_{0,2}$ $z_{1,2}$ $z_{2,2}$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(z_{j,0}+z_{j,1}x+z_{j,2}x^2+\dots\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{ogf}(z_{j,i})$$

o

Iran NMO 2008

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n+i-1}{2i-1}=F_{2n}$$

o

$\mathrm{ogf}(\underline{F_{2i}})=?\ F(x)$

$$F_{2(n+2)}=F_{2n+3}+\overset{\swarrow}{F_{2(n+1)}}=F_{2(n+1)}+\underline{\underline{F_{2n+1}}}+F_{2(n+1)}$$

$F_{2n+1}=F_{2(n+1)}-F_{2n}$

$$=3F_{2(n+1)}-F_{2n}$$

$$\mathrm{ogf}\left(F_{2(i+2)}\right)=3\cdot\mathrm{ogf}\left(F_{2(i+1)}\right)-\mathrm{ogf}\left(F_{2i}\right)$$

$$\frac{F(x)-F_0-xF_2}{x^2}=3\,\frac{F(x)-F_0}{x}-F(x)$$

$$\frac{F(x)-x}{x^2}\qquad 3\,\frac{F(x)}{x}$$

$$F(x)-x=3xF(x)-x^2F(x)$$

$$F(x)=\frac{x}{x^2-3x+1}$$

$$\mathrm{ogf}(\text{sommatoria})=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n+i-1}{2i-1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}x^n\binom{n+i-1}{2i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\underline{x^i}\sum_{\underline{\underline{n=0}}}^{\infty}x^n\binom{n+(2i-1)}{(2i-1)}=$$

$$\sum_{\underline{\underline{i=1}}}^{\infty}x^i\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{2i}\right)$$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{k+n}{k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1}} \qquad \cancel{k = 2i-1}$$

$$= \sum_{i \geq 0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^i \boxed{-\ 1} \qquad \text{ogf}(1) \circ \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)} - 1 \ \overset{\boxed{S_1^{\cdot 1}}}{=} \ \frac{x}{1-3x+x^2}$$

---

qualcosa di Mac Laurin

$$\frac{D^k \text{ogf}(a_i)\big]_0}{k!} = a_k \qquad D^2 \text{ogf}(a_i) = D\left(D \text{ogf}(a_i)\right)$$

Si dimostra per induzione! Facile!

Teorema binomiale esteso!

Def. $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Allora $\text{ogf}\left(\binom{\alpha}{n}\right) = (x+1)^{\alpha}$

Il th. bin. esteso si mostra con Mac Laurin

Per induzione vale:

$$D^k (x+1)^{\alpha} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(k-1))\,(x+1)^{\alpha-k}.$$

$$[x^k](x+1)^{\alpha} = \frac{D^k (x+1)^{\alpha}\big]_0}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(k-1))}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

$$\text{ogf}\binom{2i}{i} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$[x^k]\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=[x^k](1-4x)^{-\frac{1}{2}}=(-4)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}=$$

$$(-2)^k\cdot 2^k\cdot\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!}=\frac{(2k-1)!!\cdot 2^k}{k!}=$$

$$\frac{(2k-1)!!\cdot\boxed{2^k\cdot k!}}{(k!)^2}=\frac{(2k-1)!!\cdot\boxed{(2k)!!}}{(k!)^2}=\frac{2k!}{(k!)^2}=\binom{2k}{k}$$

Dim. che esiste un unico modo di partizionare $\mathbb{N}$ in A, B in modo che $\forall n\in\mathbb{N}$ il # di modi di esprimerlo come somme di el. distinti di A = # 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 di B.

$$A(x)=\sum_{a\in A}x^a \qquad B(x)=\sum_{b\in B}x^b.$$

$$a(i):=\begin{cases} i\in A\to 1\\ i\notin A\to 0\end{cases}$$ stesso come per $b(i)$

$A(x)=\text{ogf}(a(i))$ e $B(x)=\text{ogf}(b(i))$.

$$A(x)+B(x)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$[x^k]A(x)^2 \overset{?}{=} 2$(# modi di esprimere k come somme di 2 el. distinti) + (# modi di esprimerlo come somma di 2 elementi uguali)

$k=m+n \qquad x^m\cdot x^n \qquad x^n\cdot x^m$

$k=m+m \qquad x^m\cdot x^m$

$A(x)^2-A(x^2)=2$ # modi distinti.

$$B(x)^2-B(x^2)=A(x)^2-A(x^2)$$

$$A(x)+B(x)=\frac{1}{1-x} \qquad A(x^2)+B(x^2)=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\boxed{(x-1)\,A(x^2) + A(x) = \frac{x}{1-x^2}} = x\left(1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots\right) =$$

$$x + x^3 + x^5 + \cdots$$

Posso assumere $a(0) = 1$ o in A (WLOG.)

$[x^{2k}]\ (x-1)\,A(x^2) + A(x) = 0$

$$[x^{2k-1}]\,A(x^2) - [x^{2k}]\,A(x^2) + [x^{2k}]\,A(x) = 0$$

$$0 \qquad -[x^k]\,A(x) + [x^{2k}]\,A(x) = 0 \;\to\; -a(k) + a(2k) = 0$$

Con lo stesso metodo ma prendendo $[x^{2k+1}]$ ottengo

$a(2k+1) + a(2k) = 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a(2k) = a(k) \\ a(2k+1) = -a(2k) + 1 \end{cases}$$

$\to$ Sequenza è univocamente determinata.

Provate che $a(i) \in \{0,1\}\ \forall i$ e trovate quanto vale $a(100000)$

$a(i) = 1 \iff$ il numero di 1 nella scrittura binaria di i è pari $\leftarrow a_0 = 1$

0

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ Ci posso sostituire un valore $x \in \mathbb{C}$ e vedere quanto viene.

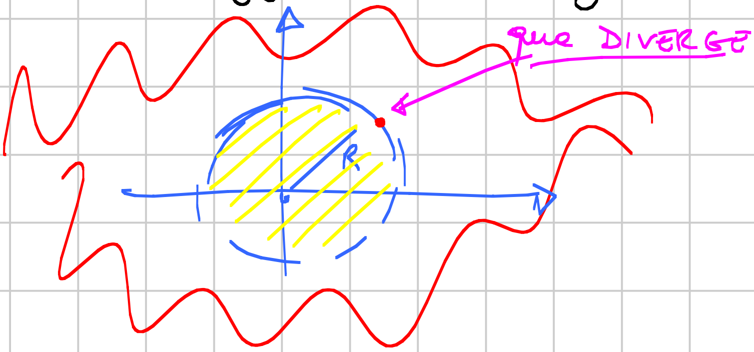
$a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$

Voglio mostrare che $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

$\exists R \geq 0 \in \mathbb{R}$ t.c.

- Converge se $|x| < R$
- Non converge se $|x| > R$
- Non so cosa fa per $|x| = R$

R si chiama raggio di convergenza della serie



$$R = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

Se $|x| > R \to a_n x^n$ non è infinitesimo per $n \to \infty$

Se per $x > 0 \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i x^i|$ converge $\to \sum_{i=0}^{\infty} a_i \gamma^i$ converge sempre per $\cancel{x}\ \gamma \in \mathbb{C}$ con $|\gamma| < x$

E perchè $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i x^i|$ per $x \in \mathbb{R}$ con $x < R$ converge?

Perchè è minorata da una geometrica $a_i x^i$

Quanto vale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$? (USA 2003 qualcosa)

Quanto vale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} F_n$? si può comportare male solo divergendo

$$ogf(F_i) = \frac{x}{1-x-x^2} \qquad ogf\left(\frac{F_i}{2^i}\right) = ogf(F_i) \circ \frac{x}{2} =$$

$$ogf\left(\frac{F_i}{2^i}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}$$

se questo non diverge mai per $|x| < 1 \to$ Ho vinto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \boxed{2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}x}{1-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2}$$

non posso mettere 1 perché una radice è < 1

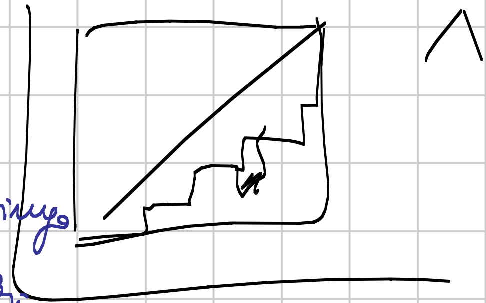
$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i \frac{2^i}{3^i} = \infty$$

Catalan!

I numeri di Catalan $C_0, C_1, C_2, \dots$.

C_n è il numero di disposizioni corrette di n parentesi (e n parentesi).

~~( )) (~~ no   ( ) ( ) sì



A ogni disposizione associo la sottostringa iniziale che è una buona disposizione.

((( ) ( ))) ( )

( ) (( ))

(( ))

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}$$

Prendo le disposizioni che hanno come sottostringa iniziale buona lunga (i+1)

$C_0 = 1$.

$$\mathrm{ogf}(C_i) = \frac{C_0}{1 - x\,\mathrm{ogf}(C_i)} \qquad \mathrm{ogf}(C_i) = C(x)$$

$$C(x) = \frac{1}{1 - x C(x)} \longrightarrow x\,C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

$$C(x) = \left.\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}\right] \qquad 1 \pm \sqrt{1} = 0$$

$-$

si deve semplificare!

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}. \qquad \mathrm{ogf}\left(\binom{2i}{i}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$\underline{\mathrm{ogf}\big((i+1)\,C_i\big)} \overset{\text{hope}}{=} \mathrm{ogf}\left(\binom{2i}{i}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-4x}}}$$

$\|$

$D\big(x \cdot C(x)\big)$ e applicando le regole di derivazione trovo l'identità!

Sono dati n pesi $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ e una bilancia a 2 bracci.

modi di piazzare i pesi (contando l'ordine) in modo che nel piatto di destra ci sia sempre un peso maggiore che nel piatto di sinistra? $= a_n$

Fatto I: Non cambia nulla se scelgo n potenze di 2 distinte a caso. Motivazione: Somme di potenze di 2 < delle successive.

Prendo 2^{n-1} e lo piazzo per k-esimo. In quanti posso farlo?

$2^{n-1} \to$ piatto di destra.

I k precedenti pesi già messi li posso scegliere in $\binom{n-1}{k}$ modi. E li posso piazzare in $\boxed{a_k}$ modi!

I successivi in quanti modi posso piazzarli? $\underline{(n-1-k)!}\ \underline{2^{n-1-k}}$

$$\binom{n-1}{k} a_k \cdot (n-1-k)! \cdot 2^{n-1-k}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\binom{n-1}{k}}\ \underline{a_k}\ \underline{(n-1-k)!}\ 2^{n-1-k}.$$

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

$$\underline{n b_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{b_k \cdot 2^{n-1-k}}^{\text{Prodotto}}.$$

$$\boxed{f(x) = ogf(b_i)} \qquad f' = \frac{f}{1-2x}.$$

$$\underline{g(x)} = ogf((i+1)b_{i+1}). \qquad 2^0 + 2^1x + 2^2x^2 + \dots = \frac{1}{1-2x}$$

$$(n+1)\, b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k\, 2^{n-k}$$

$$g(x) = ogf((i+1)b_{i+1}) = ogf\left(\sum_{k=0}^{i} b_k\, 2^{i-k}\right) =$$

$$ogf(b_i) \cdot ogf(2^i) = \frac{f(x)}{1-2x}$$

$$(1-2x)\, g(x) = f(x) \qquad [x^n]$$

$$[x^{n+1}]\, g(x) - 2[x^n]\, g(x) = [x^{n+1}]\, f(x)$$

$$(n+1)\, b_{n+1} - 2n\, b_n = b_n \to b_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot b_n$$

Per induzione è facile accorgersi che: $b_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n!}$

$a_n = n!\ b_n = (2n-1)!!$