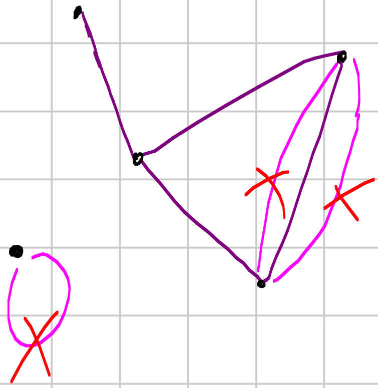
COMBINATORIA 2 - (soprattutto) GRAFI

Titolo nota 09/09/2011

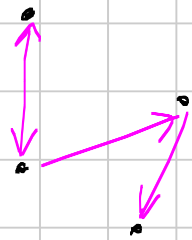
$\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$

(V, E), $E \subseteq V^{(2)}$

GRAFO



GRAFO diretto

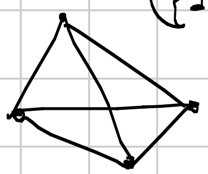


TEORIA DI RAMSEY

6 persone $\rightarrow$ ci sono 3 amici
o 3 sconosciuti

grafo "completo" K_6

[notazione:
K_n $(\{1,\dots n\}, \{1..n\}^{(2)})$



]

2-colora gli archi

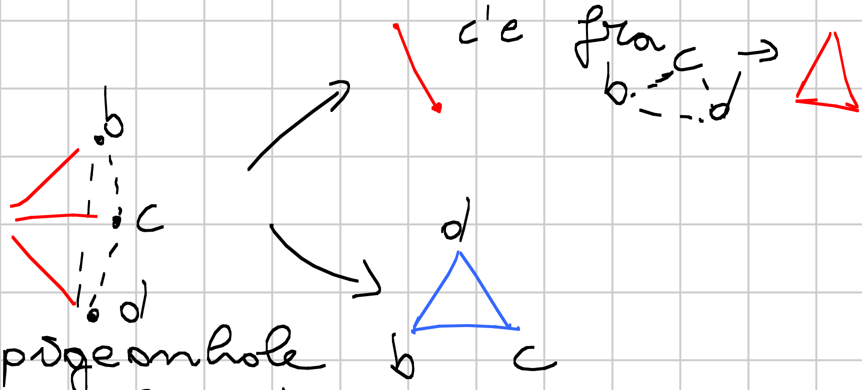
a — b = a e b sono amici

a — b = a e b sconosciuti

TESI: $\exists$ △ o △

pigeonhole!

a. 5 archi



pigeonhole
3 archi stesso colore

[Teorema di Ramsey] Dati a, b esiste $R(a,b)$ tale che in $K_{R(a,b)}$, comunque 2-colorato, esiste K_a o K_b!

(esempio: $R(3,3) = 6$)

induzione! (su $a+b$) ← minimo che funziona

passo base $R(3,2) = R(2,3) = 3$

passo induttivo

$$R(a,b) \leq R(a,b-1) + R(a-1,b)$$

$K_{R(a,b-1)+R(a-1,b)}$

$x \bullet \rightarrow$ escono $R(a,b-1)+R(a-1,b)-1$ archi

$\Rightarrow$ pigeonhole 2 casi

- $R(a-1,b)$
  - $K_{a-1} \rightarrow K_a$ con x
  - K_b
- $R(a,b-1)$
  - $K_{b-1} \rightarrow K_b$ con x
  - K_a ho vinto!

STIMA: $R(a,b) \leq \binom{a+b-2}{b-1}$

base $\quad R(2,3) = R(3,2) = 3 = \binom{3}{1}$

passo induttivo

$$R(a,b) \leq \binom{a+b-3}{b-2} + \binom{a+b-3}{b-1} =$$
$$= \binom{a+b-2}{b-1} \qquad \square$$

Problema: ROM TST 2008

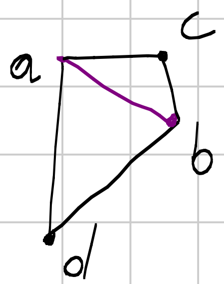
Un insieme di persone è n-bilanciato se:
- $\forall$ sottoinsieme da 3 ci sono 2 amici
- $\forall$ sottoinsieme da n ci sono 2 sconosciuti

mostrare che un insieme n-bilanciato ha $\leq \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ persone.

K_N due-colorato | ogni K_3 ha —— $\to$ No K_3
ogni K_n ha —— $\to$ No K_n

$$N \leq R(n,3) - 1 \leq \binom{n+1}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} =$$
$$= \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Problema 6 punti nel piano: formano segmenti di lunghezze tutte $\neq$.
Allora $\exists$ segmento che è lato + lungo di un triangolo e lato + corto di un altro.



Ho un K_6.
Guardo ciascun triangolo; coloro ___ il suo lato + corto.

Ramsey $\Rightarrow \exists$ △ o △

unico caso: prendo il suo lato + lungo

NON può esistere

TEORIA DEI GRAFI ESTREMALE

Ho un grafo su n vertici; quanti archi ha al max se NON contiene un K_3?

$$ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$ ([Teorema di Mantel])

- induzione
- CS

$\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ con $|V(\mathcal{G})| = n$
NO △.

dimostrazione: [Notazione: independent set = insieme di nodi non collegati da archi; K_n invisibile]

insieme dei nodi

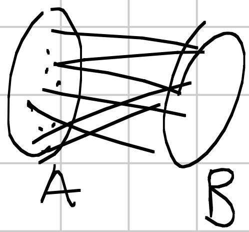
prendo $A \subseteq V$ independent set massimale.
$B = V \setminus A$
covering

[notazione: B è covering se ogni arco ha un vertice in B] [x nodo $d(x)$ = grado di x = # archi che escono da x]

$$|E(G)| \le \sum_{x\in B} d(x) \le |B|\,|A| \overset{\text{AM-GM}}{\le} \left(\frac{|A|+|B|}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

$d(x) \le |A|$
perché
{vicini di x}
è un
independent set

caso di uguaglianza $|A| = |B|$ (n pari)



grafo bipartito completo

$K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$

caso n dispari

$K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$ex(n, K_r)$ = # max archi di un grafo su n nodi SENZA K_n.

$n \ge r$

[Teorema di Turán] $ex(n, K_r) \le \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\frac{n^2}{2}$

dimostrazione. induzione (estesa) su n.

passo base $n = 0 \dots r$

passo induttivo G con $ex(n, K_{r+1})$ archi, n nodi, SENZA K_{r+1}.

G contiene come sottografo K_r.

$A \subseteq V(G)$

$$x \in V(G) \setminus A \overset{=B}{} \qquad d_A(x) \leq r-1 \qquad |A| = r, \quad |B| = n-r$$

$$|E(G)| \leq \underbrace{(n-r)(r-1)}_{\text{da B in A}} + \overbrace{ex(n-r, K_{r+1})}^{\text{dentro B}} + \binom{r}{2} =$$

$$ex(n-r, K_{r+1}) \leq \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2} + \frac{(r-1)}{2}\underbrace{(2n-2r+r)}_{(2n-r)} =$$

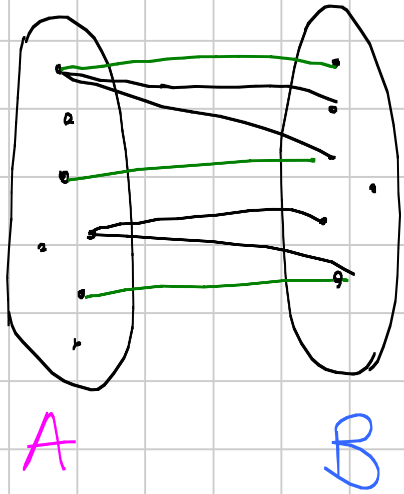
$$= \frac{r(2n-r)}{2} - \frac{r(2n-r)}{r\,2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{2nr-r^2}{2}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2 - \cancel{2nr} + \cancel{r^2} + \cancel{2nr} - \cancel{r^2}}{2} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$$

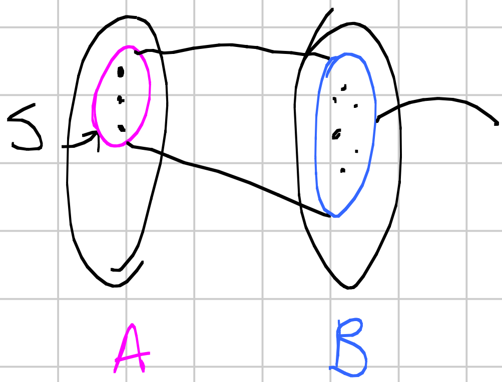
MATCHING in grafo bipartiti



$\mathcal{G}$

perfect matching $(|A|=|B|)$

un matching su tutti gli elementi di A



$N(S)$ = uomini che piacciono almeno a una sposa di S

se $\exists$ perfect matching

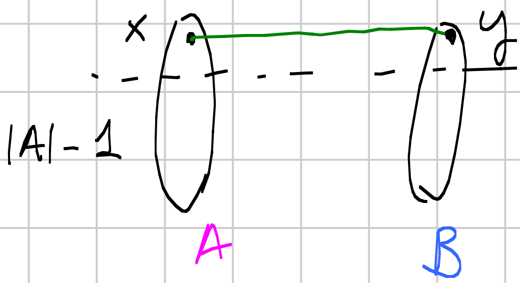
$$|N(S)| \geq |S|$$

[Teorema di Hall / Lemma dei matrimoni]

Dato grafo bipartito con $V = A \cup B$ $(|A| \leq |B|)$ esiste un matching di A in B $\iff \forall S \subseteq A \quad |N(S)| \geq |S|$. (*)

($\Leftarrow$) dimostriamo! Per induzione (estesa) su $|A|$.

- $\forall S \neq A \quad |N(S)| > |S|$



scelgo x, $y \in N(x)$ e li sposo.

È vera (*) per $A \setminus \{x\}$, $B \setminus \{y\}$?

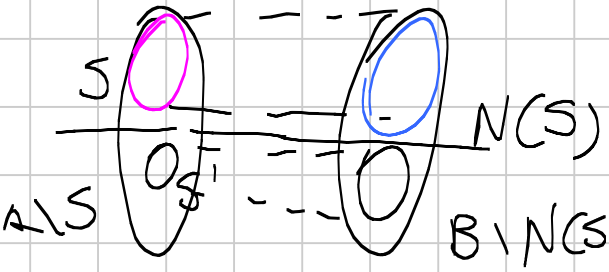
per assurdo $S' \subseteq A \setminus \{x\}$

$|N(S') \setminus \{y\}| < |S'|$: avrei

$|N(S')| \leq |S'| \to$ NO $(|N(S')| \geq |S'|)$ per ipotesi

$- \exists S \subsetneq A \quad |N(S)| = |S|$

usare ipotesi induttiva!



grafo indotto da S, $N(S)$ $(|S| < |A|)$ soddisfa $(*)$ $\to$ per hp induttiva posso sposare S con $N(S)$.

Riesco a dimostrare $(*)$ per $A \setminus S$, $B \setminus N(S)$?

SI:

$S' \subseteq A \setminus S$ per assurdo $|N(S') \cap (B \setminus N(S))| < |S'|$;

$$|N(S' \cup S)| < |S'| + |N(S)| = |S'| + |S| = |S' \cup S|$$

non può essere! (contraddice $(*)$)

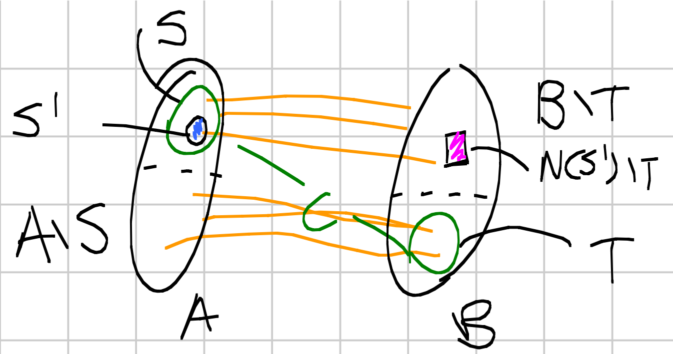
VIETNAM TST 2010

$1 < m < n$ $\quad$ mn bambini, n nazioni

m bambini per nazione;

n classi, in ogni classe m bambini, bambini della stessa nazionalità NON nella stessa classe.

Voglio scegliere n bambini senza che ci siano 2 della stessa classe né della stessa nazionalità.



dimostro che $\exists$ matching di S in $B \setminus T$ e T in $A \setminus S$

Devo verificare (*).

Prendo $S' \subseteq S$ $\quad |N(S') \cap (B \setminus T)| < |S'|$ per assurdo.

sostituisco $\boxed{N(S') \setminus T}$ a S' in C, ottengo C'

È ancora un cover!

$|C'| < |C| = \beta$: assurdo!

POSETS

"poset" = partially ordered set

X , $\leq$ ← rel d'ordine parziale

↑ insieme

- $x \leq x$
- $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

ESEMPI $\quad (\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}^2, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

(partizioni di X , "finezza")

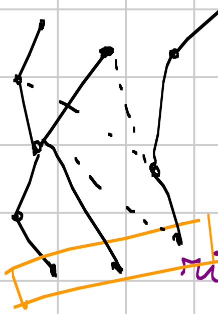
catena $\quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$

antocatena $\quad$ insieme di elementi 2 a 2 NON confrontabili

(poset finiti)

← "larghezza" del poset

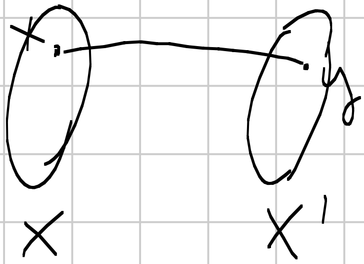
[Teorema di Dilworth] # max anticatena = # minimo ricoprimento del poset come unione di catene.



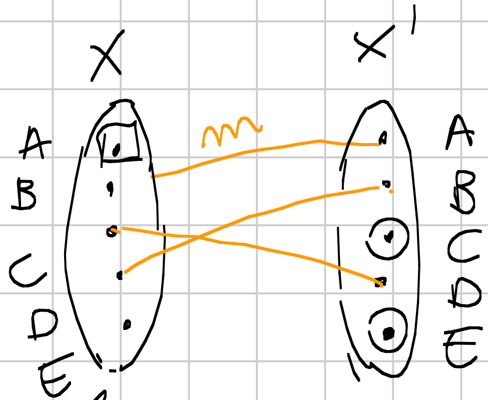
ricoprimento in 3 catene

dimostrazione!

interpreto poset come grafo bipartito



arco se $x \leq y$



di m archi

matching ⟷ copertura in catene

← n−m catene

$C < D < B < A$
E
} 2 catene

ho un m-matching

$\Rightarrow$ ho copertura in catene da $n-m$

ho un covering C' di m elementi; minimale

ho $\geq n-m$ elementi di X che non hanno copie in C. Sono un'anticatena.

Quindi min # cop in anticatene $\leq$ # max anticatena

$\geq$ ovvio (ogni el dell'anticatena deve stare in catena diversa).

insieme $X \subseteq \mathbb{N}$

ROM TST 2005 n^2+1 naturali positivi | $\forall$ sottoinsieme da $n+1$ ha 2 el- $a, b \in S$ tc. $a \mid b$.

Allora $\exists\, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in S$ tc

$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots \mid x_{n+1}$$

$(X, \mid)$ é un poset!

\# max anticatena $\leq n$

$\Rightarrow \exists$ un ricoprimento di X in n catene $\Rightarrow$ per pigeonhole $\exists$ catena lunga $n+1$. $\square$

[Duale di Dilworth] \# max catena = \# min ric in anticatene.

$\leq$ é ovvio.

$f(x)$ = \# più lunga catena di cui x é l'elemento massimo.

$$f(X) \subseteq \{1 \dots n\}$$

\# max catena

$f^{-1}(i)$ é un'anticatena!

$x < y \Rightarrow f(y) \geq f(x) + 1$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(i)$$ ricoprimento in anticatene.

[Erdős-Szekeres] successione di $ab+1$ reali $\Longrightarrow$ $\exists$ sottosucc. di $a+1$ $\nearrow$ o di $b+1$ $\searrow$.

POSET: $\{x_1 \dots x_{ab+1}\}$ $\leq$?

$x_i < x_j \iff i<j,\ x_i \leq x_j$

CATENE = sottosuccessioni crescenti

ANTICATENE = successioni decrescenti

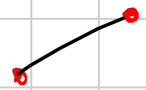
se non c'è catena di lungh. $a+1$ posso coprire con a anticatene $\Rightarrow$ (pigeonhole) ho un'anticatena di $\# \geq b+1$.

[Lemma di Sperner] in $\mathcal{P}(\{1 \dots n\})$ la max anticatena ha $\#$

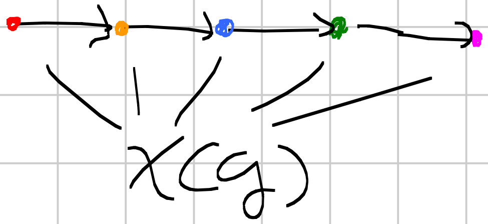
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

problema. $\forall G$ $\chi(G)$-partito: esiste un "cammino arcobaleno" cioè

[notazione: $\chi(G)$ = min n° di colori con cui posso colorare nodi in modo che non ci sia



]

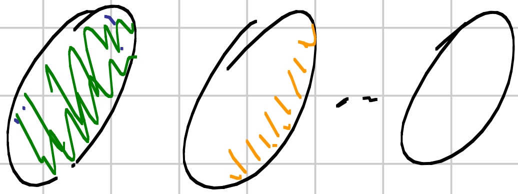


$1 < 2 < \dots$ rendiamo G un grafo diretto dico che $x < y$ se $\exists$ cammino orientato da x a y.

c'è una catena lunga $\chi(G)$?

Hope: la colorazione è una partizione in anticatene ...? VERO!

NON ci può essere una partizione in meno di $\chi(G)$ anticatene



$\chi(G) - 1$ anticatene