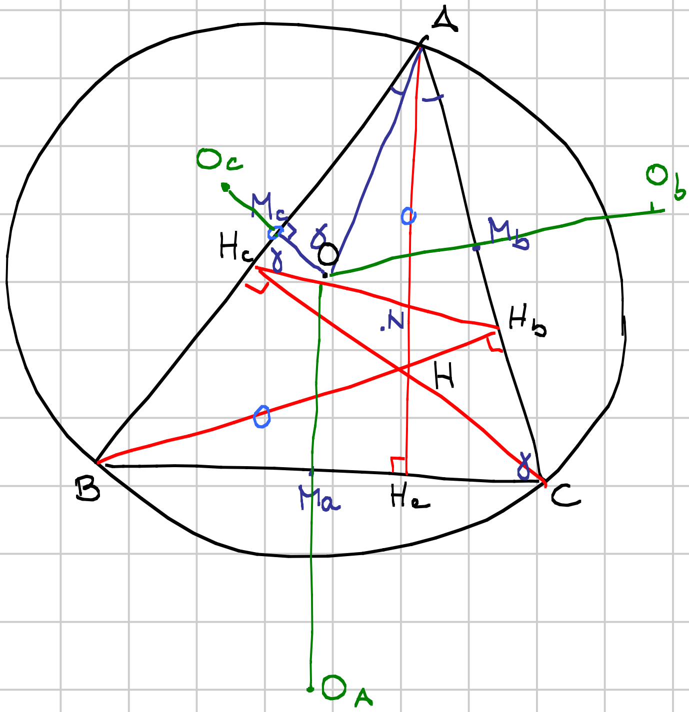
SENIOR 2011 - G3 MEDIUM

Titolo nota 08/09/2011



Circocentro e ortocentro

① AH_bH_aB è ciclico.

② AH_bHH_c è ciclico.

③ $B\hat{A}O = H\hat{A}C$

(sono entrambi: $90-\gamma$)

④ $A\hat{B}C$ è simile a $A\hat{H_c}H_b$

(da ①)

⑤ O è ortocentro di $M_aM_bM_c$

($M_aO \perp BC // M_bM_c$)

⑥ H è incentro di $H_aH_bH_c$

(angoli)

⑦ $OA \perp H_bH_c$

($H_c\hat{A}O = 90-\gamma$, $A\hat{H_c}H_b = \gamma$ ...)

(2° modo: omotetia di centro A + simm rispetto alla bisettr manda $ABC \to AH_bH_c$. Manda $AH_a \to AO$, che quindi è altezza del nuovo triangolo AH_bH_c).

⑧ A, B, C, H è sistema ortocentrico

⑨ $H_aH_bH_c$ e $M_aM_bM_c$ hanno la stessa circonf circoscr, il centro è il pto medio di OH.

⑩ Circonf circoscr a ABC, HBC, HAB, HAC sono congruenti.

(il simmetrico di H rispetto a AB sta su Γ_{ABC}.
$\Rightarrow \Gamma_{ABH}$ è la simmetrica di Γ_{ABC} rispetto ad AB)

⑪ I loro circocentri formano un sist ortocentrico congruente al primo.

(O_A, O_B, O_C, O si ottengono da ABCH facendo un'omot di centro G e rapporto ½ e poi un'omot di centro O e rapporto 2).

(2° modo $AB // M_aM_b // O_aO_b$. $AB = 2M_aM_b = O_aO_b$)

(12) AO_a, BO_b, CO_c concorrono nel centro della circ di Feuerbach di ABC

(A, B, C, H si ottiene da O_A, O_B, O_C, O mediante una simm centrale, perchè la composiz di omotetie è ancora un'omotetia di rapporto il prodotto dei precedenti. H deve andare in O quindi il centro è il pto medio di OH)

(13) H è centro radicale per ogni terna di circonferenze che hanno ciascuna un'altezza di ABC come corda.

(dobbiamo dimostrare

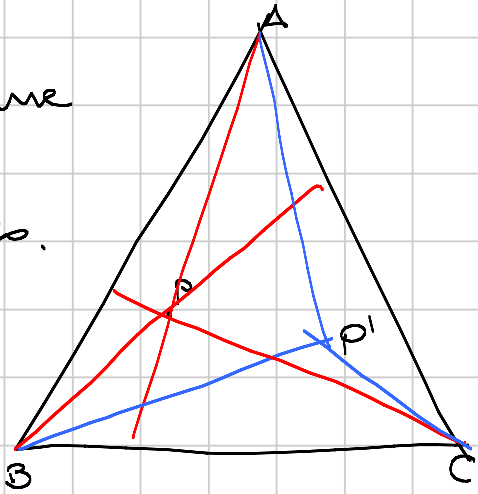
$$AH \cdot HH_a \overset{*}{=} BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c .$$

(*) segue dalla ciclicità di AH_aH_bB)

(2ª dim di (12): la circonf di Feuerbach di ABH è la stessa di ABC.
O_c, N, C sono circoc, centro di Feuerbach, ortoc di HAB. Quindi sono allineati e si bisecano.
Quindi O_c si ottiene da C mediante simm centr di centro N)

Coniugato isogonale

Dato P in ABC, simmetrizzo le ceviane rispetto alle bisettrici.
Concorrono in P' per Ceva Trigonometrico.
P' è detto coniugato isogonale di P.



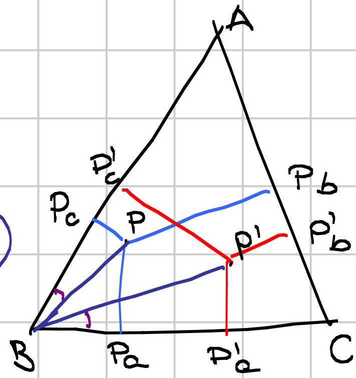
Teorema: P' coniug isog di P $\Rightarrow$
le proiez sui lati di P e P' sono concicliche.

Esempi di coniug isog: ① Circoc - ortoc
② Incentro resta in sè
③ Baric e pto di incontro delle simmed.

Dim

Mostriamo intanto che sono conciclici a 4 a 4: lo vediamo su $P_aP_a'P_cP_c'$.
E' suff dimostrare che (ciclicità "metrica")

$BP_c \cdot BP_c' = BP_a \cdot BP_a'$. (Ex: dimostrare e' equivalenza)



Calcoliamo

$BP_c = BP \cdot \cos A\hat{B}P$

$BP_c' = BP' \cdot \cos A\hat{B}P'$

$BP_a = BP \cdot \cos C\hat{B}P$

$BP_a' = BP' \cdot \cos C\hat{B}P'$.

Quindi

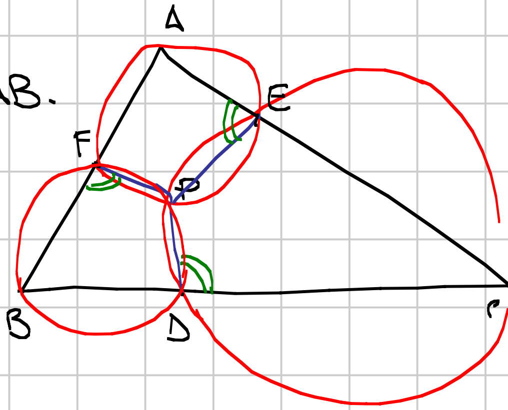
$$BP_c \cdot BP_c' = BP \cdot BP' \cdot \underbrace{\cos A\hat{B}P}_{= P'\hat{B}C} \cdot \underbrace{\cos A\hat{B}P'}_{= P\hat{B}C} = BP_a \cdot BP_a'.$$

Oss: il centro della circo è il pto medio di PP'
(incontro degli assi di P_aP_a' e P_cP_c')

Se due circonf coincidono, ok.
Se fossero tutte diverse, l'asse radicale di una coppia di queste circo sarebbe un lato del triangolo.
Ma gli assi radicali devono concorrere!!!

Teorema di Miquel

ABC Triangolo, D, E, F sui lati BC, CA, AB.
⇒ le circonf circoscr a BDF, CDE, AEF concorrono.



Dim:

$P = \Gamma_{BDF} \cap \Gamma_{CDE}$

Dobbiamo dim AFPE è ciclico.

$B\hat{F}P = P\hat{D}C = P\hat{E}A$.

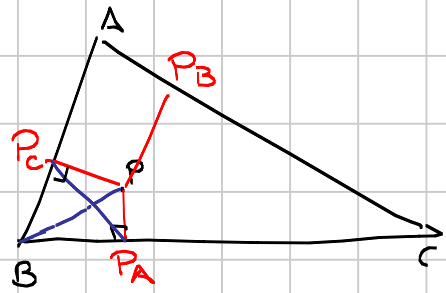
↑ BDFP cicl ↖ DCEP ciclico

Def: se ((è retto, il triangolo DEF si dice PEDALE

Teorema (Simson line)

ABC triangolo, P_a, P_b, P_c proiez di P sui lati. Allora

P_A, P_B, P_C sono allineati $\Leftrightarrow P \in \Gamma_{ABC}$.



Dim:

Calcoliamo la lungh dei lati del triangolo pedale

$P_AP_C = 2R_{\Gamma_{BP_AP_CP}} \cdot \sin\hat{B}$

↑ teo dei seni su BP_AP_C

$= BP \cdot \sin\hat{B}$

↑ BP è diametro

$= BP \dfrac{b}{2R}$

$P_A P_B P_C$ sono allineati $\Leftrightarrow$

$P_AP_B \pm P_AP_C \pm P_BP_C = 0$

$\Leftrightarrow CP \cdot c \pm BP \cdot b \pm AP \cdot a = 0$

Wlog $\quad + \quad -$.

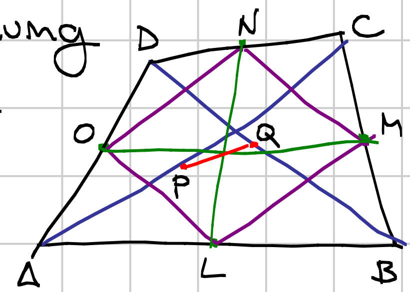
Per il teo di Tolomeo vale $\geq$ sempre, con $=$

↳ applicato a ABPC

se e solo se P, A, B, C conciclici.

Quadrilateri

Fatto 1: ABCD quadrilatero. I segmenti congiung punti med. di lati opposti e pti medi di diag concorrono e si bisecano.



Dim 1: vettori.

Fatto 2: come in figura, OLMN è un parallelogrammo.

Dim del fatto 2: Talete!

$LB = \frac{1}{2} AB$ $\quad BM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$ per Talete $LM \parallel AC$ e $LM = \frac{1}{2} AC$

Similm, per Talete $ON \parallel AC$ e $ON = \frac{1}{2} AC$.

Dim fatto 1 dato il 2:

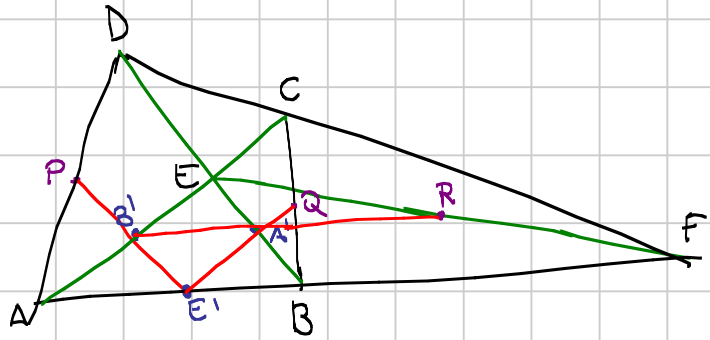
OM e LN si bisecano

Oss: il fatto 2 vale con quadrilateri intrecciati!

Quindi lo applichiamo a ACBD

PQ e OM si bisecano
Allora il pto medio di OM è anche pto medio di LN e di PQ. $\square$

<u>Teorema (linea di Gauss)</u>



ABCD quadrilatero, $E = AC \cap BD$
$F = AB \cap CD$,
P pto medio di AD
Q " " " BC
R " " " EF.
Allora P, Q, R sono allineati.

<u>Dim 1</u>: geometria analitica (magari dopo un'affinità)

<u>Dim 2</u>: chiamiamo
A' pto medio di EB
E' " " " AB
B' " " " AE

Abbiamo P, B', E' allineati etc.
Usiamo Menelao per mostrare allineamento (triangolo $A'\hat{B'}E'$, "retta" PQR)
Basta quindi dimostrare

$$\underbrace{\frac{EQ}{QA'} \cdot \frac{A'R}{RB'} \cdot \frac{B'P}{PE'}}_{LHS} \overset{?}{=} -1$$

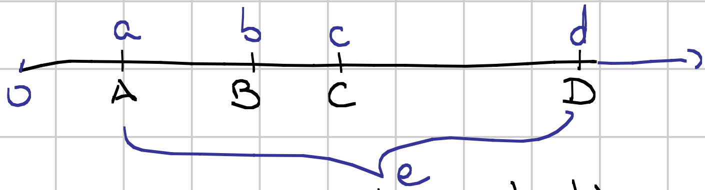
$$LHS = \frac{AC}{CE} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{ED}{DB} = -1$$

Talete $ABC \sim AE'Q$ ...   Menelao su $A\hat{E}B$, retta CFD.

Dim 3 Consideriamo il luogo dei pti Z t.c.
$$[ABZ] + [CDZ] = [ACZ] + [BDZ]$$
Si vede che $Z = P, Q, R$ verificano. [Ex].
La funzione $Z \to [ABZ]$ è lineare.
Allora $Z \to [ABZ] + [CDZ] - [ACZ] - [BDZ]$ è somma di funz lineari $\Rightarrow$ lineare.
Il luogo di zeri può essere un pto, una retta, il piano
$\Rightarrow$ il luogo è una retta per P, Q, R.   no ci sono P, Q, R   no A non c'è

Birapporto

$$(A,B;C,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$



Si considerano segmenti con segno; un punto potrebbe essere ∞.

Oss: quando $(A,B;C,D) = 1$? Se e solo se $C=D$ o $A=B$.

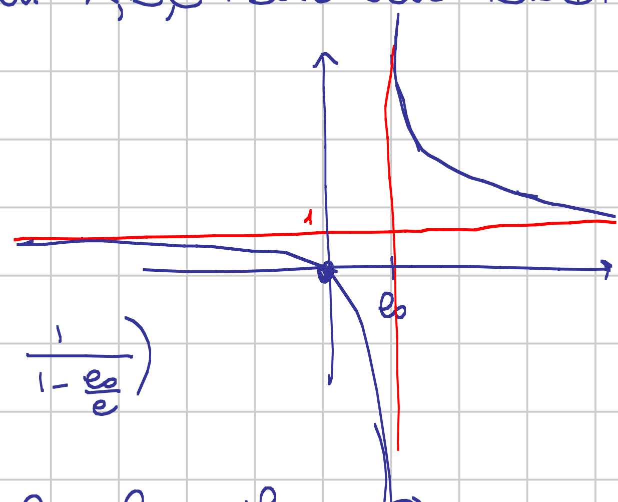
Dim:

(*) $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$. Pensiamo fissati A,B,C. Dove deve stare D?

Se $D=C$ ok.

(*) equivale a $\frac{AC}{BC} = \frac{e}{e-AB}$. ⊙

Disegnamo la funz $e \to \frac{e}{e-e_0}$

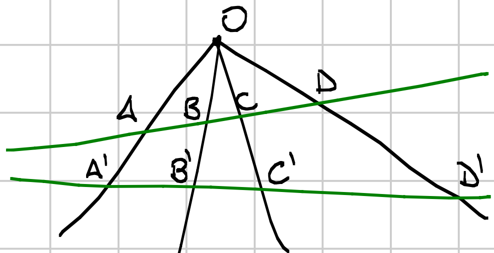


E' monotona (facendo la deriv $\frac{1}{1-\frac{e_0}{e}}$) in $(e_0,+\infty)$ e $(-\infty,e_0)$

Per $\frac{AC}{BC} \neq 1$, c'è esattam un e che verifica ⊙

Per $\frac{AC}{BC} = 1$, abbiamo $A=B$.

Prop: come in figura. Si ha che $(A,B;C,D) = (A',B';C',D')$



Dim:

Scriviamo $(A,B;C,D)$ in funz degli angoli in O.

$$(A,B;C,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Per il Teo dei seni su ACO

$$\frac{AC}{\sin A\hat{O}C} = \frac{AO}{\sin O\hat{C}A}$$

In modo simile

$$\frac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \frac{OB}{\sin ODB} \qquad \frac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \frac{AO}{\sin O\hat{D}A} \qquad \frac{BC}{\sin B\hat{O}C} = \frac{OB}{\sin O\hat{C}A}$$

$$(A,B;C,D) = \frac{\sin A\hat{O}C \cdot \cancel{AO}}{\cancel{\sin O\hat{C}A}} \cdot \frac{\sin B\hat{O}D \cdot \cancel{OB}}{\cancel{\sin ODB}} \cdot \frac{\cancel{\sin O\hat{D}A}}{\sin A\hat{O}D} \cdot \frac{1}{\cancel{OA}} \cdot \frac{\cancel{\sin O\hat{C}A}}{\sin B\hat{O}C} \cdot \frac{1}{\cancel{OB}}$$

E' indipendente dalla retta trasversale.

Conseguenza: posso def il birapp tra 4 rette concorrenti
(interseco con una secante a caso e calcolo il birapp delle intersezioni. Per la prop non dipende dalla secante)

Oss: cosa succede al birapp permutando i punti?

$\lambda = (A,B;C,D) \Rightarrow (B,A;C,D) = ? = \dfrac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} = \dfrac{1}{\lambda}$

Permutando A, B, C, D i birapporti che posso ottenere sono 6:

$$\left\{ \lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1} \right\}$$

Esempio: $(A,B;C,D) + (A,C;B,D) = 1$

$$\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} + \frac{(b-a)(d-c)}{(d-a)(b-c)} \overset{?}{=} 1$$

Li guardo come polinomi in a,b,c,d. Riscrivo

$(c-a)(d-b) - (b-a)(d-c) \overset{?}{=} (d-a)(c-b)$

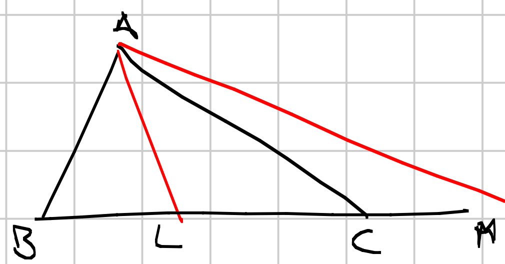
$d-a \mid LHS$ (metto $a=d$, si annulla)

$c-b \mid LHS$ (" $c=b$, " ")

LHS è di 2° grado, quindi LHS e RHS differiscono al più di un fattore numerico.

Ma il coeff di cd è 1. (Oppure $a=\cancel{15}\,5$ $b=\cancel{47}\,2$ $c=1$ $d=0$)

Def: A, B, C, D allineati. Se $(A,B;C,D) = -1$ allora si chiama <u>quaterna armonica</u>.



<u>Esempio 1</u>: vertici e piedi delle bisettrici

$(B,C;L,M) = -1$

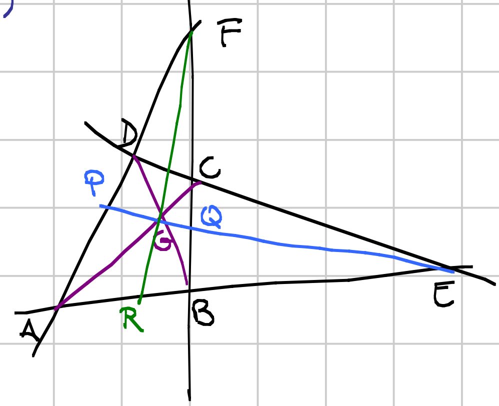
(usare il teo della bis due volte)

<u>Esempio 2</u>: ABCD quadrilatero

$E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$

$G = AC \cap BD$

Allora $(E,G,P,Q) = -1$.



Corollario: $(E,R;A,B) = -1$

Dim coroll: proiettiamo da F la retta PGQE sulla retta ARBE, usiamo la prop.

Dim esempio 2:

$$(E,G;P,Q) = (D,A;P,F)$$

proiett con centro C sulla retta FD

$$= (G,E;P,Q)$$

proietto da B su EQ

Da ⊙, $= (E,G;P,Q)^{-1}$

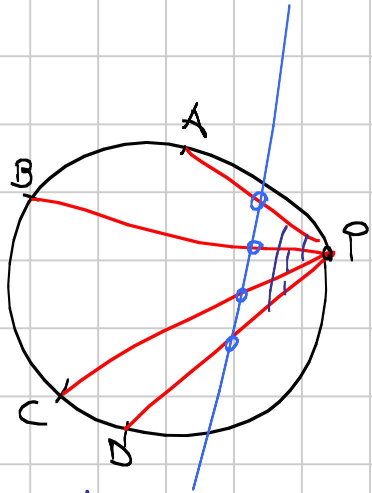
Quindi

$$(E,G;P,Q) = \begin{cases} 1 \\ \text{oppure} \\ -1 \end{cases}$$

⇝ no perché i pti sono distinti

Altra dim:
Menelao su ABF con retta CDE + Ceva.
[Ex].

Binapporti e circonferenze (coniche)

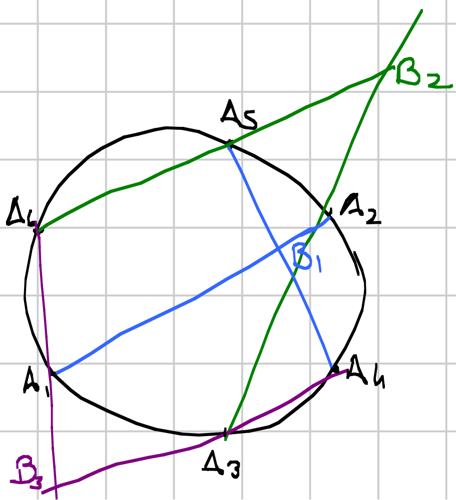


Def: dati 4 pti A,B,C,D su Γ circonf, $P\in\Gamma$
$(A,B;C,D)_P$ = binapporto tra PA, PB, PC, PD.

Oss: non dipende da P
Dim: abbiamo scritto il binapp in funzione dei soli angoli.

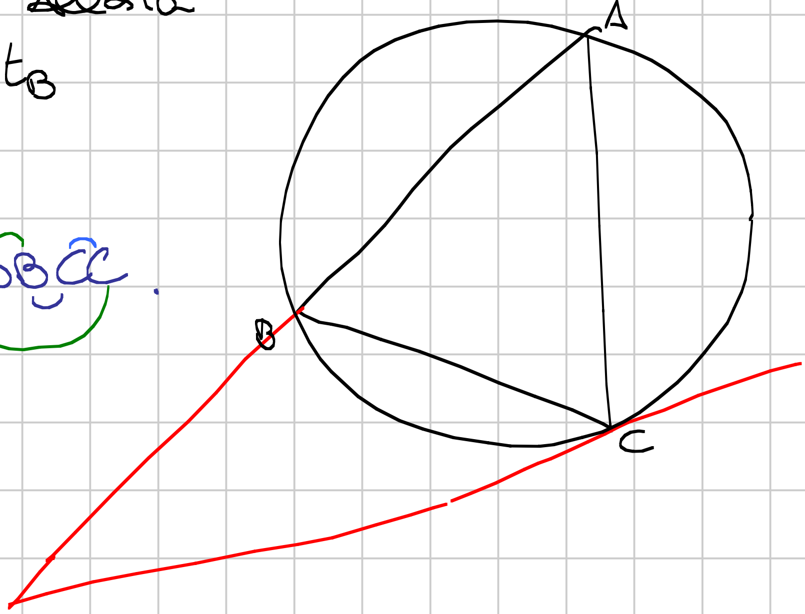
Teorema di Pascal

$A_1, \ldots, A_6$ su una (conica) circonf
$B_i = A_iA_{i+1} \cap A_{i+3}A_{i+4}$ con $i=1,\ldots,3$
Allora B_1, B_2, B_3 sono allineati.



Dim: (coi binapporti)

Esempio: ABC Triangolo. Allora
$AB \cap t_C$, $BC \cap t_A$, $AC \cap t_B$
sono allineati.



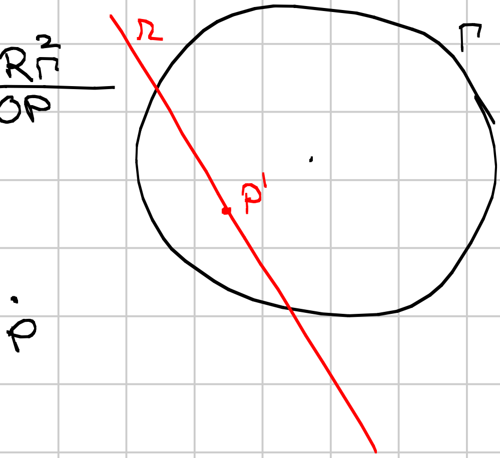
Dim: Pascal su $AABBCC$.

Polarità

Γ circonferenza.

Definiamo la mappa di Dualità

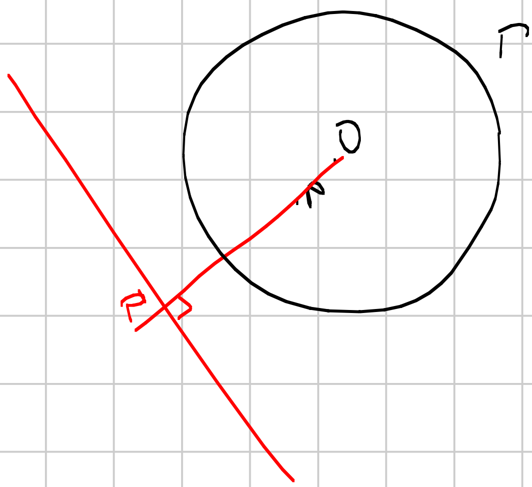
$$\{\text{punti del piano}\} \longrightarrow \{\text{rette del piano}\}$$
$$P \longrightarrow r \text{ t.c.}$$
$$r \perp OP$$
$$\mathrm{dist}(r,O) = \frac{R_\Gamma^2}{OP}$$



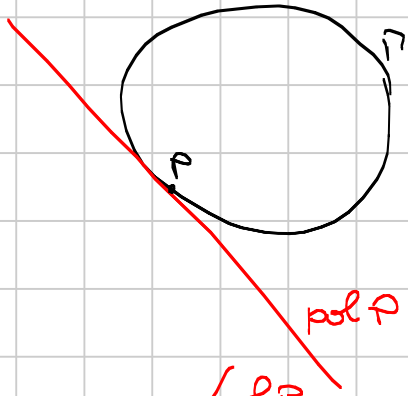
r si indica con $pol_\Gamma(P)$

Questa mappa è invertibile

$$\{\text{rette}\} \longrightarrow \{\text{pti}\}$$
$$r \longrightarrow P$$
$$pol_\Gamma^{-1}(r)$$



Proprietà



① $P \in \Gamma \iff P \in \mathrm{pol}_\Gamma P$

② La polarità rovescia le inclusioni:

$\boxed{P \in r \iff \mathrm{pol}\, P \ni \mathrm{pol}\, r}$

(chiamo $P' = \mathrm{pol}\, P \cap OP$

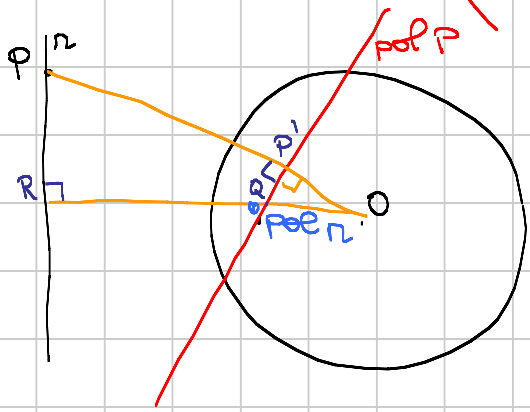
$Q = \mathrm{pol}\, P \cap OR$

E' suff dim che

$OQ \cdot OR \overset{?}{=} r_\Gamma^2$

$OQ \cdot OR = OP' \cdot OP = r_\Gamma^2$

↑ $PRQP'$ è ciclico

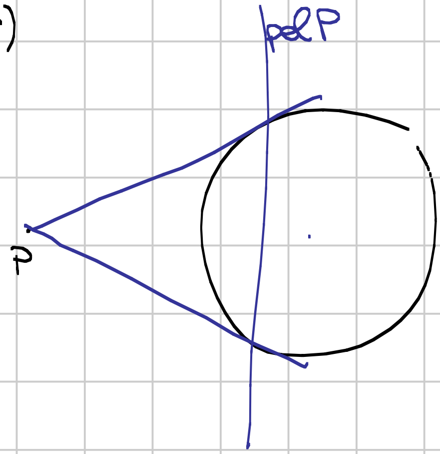


③ $\mathrm{pol}(P) \cap \mathrm{pol}(Q) = \mathrm{pol}(PQ)$

(usiamo ②. $P \in PQ \Rightarrow \mathrm{pol}\, PQ \in \mathrm{pol}\, P$
$Q \in PQ \Rightarrow \mathrm{pol}\, PQ \in \mathrm{pol}\, Q$ $\Rightarrow$ sta su $\mathrm{pol}\, P \cap \mathrm{pol}\, Q$)

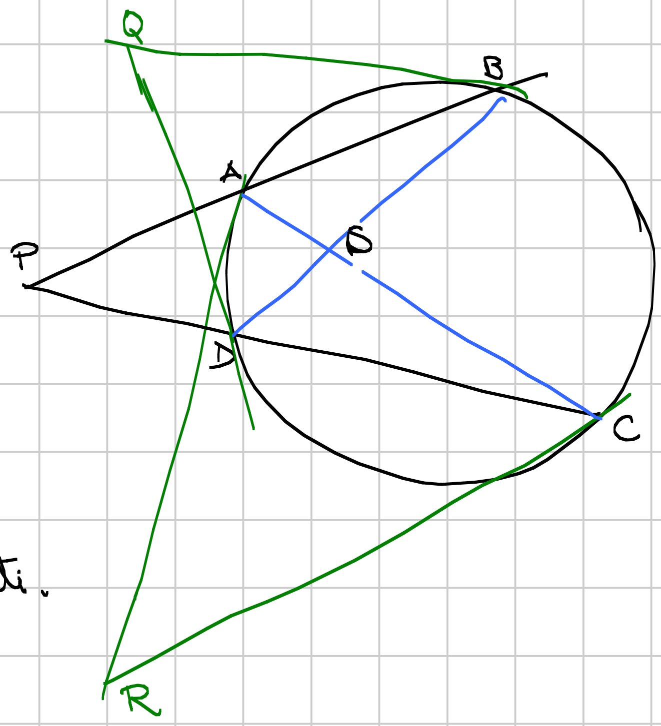
④ $\mathrm{pol}(r \cap s)$ = retta per $\mathrm{pol}(r)$ e $\mathrm{pol}(s)$
(ex)

⑤ la polare di P è la congiungente delle due tangenti a Γ
(ex)



Lemma della polare !

ABCD ciclico, $P = AB \cap CD$.
$S = AC \cap BD$.
Allora $S \in \mathrm{pol}\, P$



Dim:
Pascal su AABCCD
R P $BC \cap DA$ sono allineati.

Pascal su BBADDC
Q P $BC \cap DA$ sono all.

In verità $\underset{\text{pol } AC}{\underset{\shortparallel}{R}}, P, \underset{\text{pol } BD}{\underset{\shortparallel}{Q}}, BC\cap DA$ sono allineati.

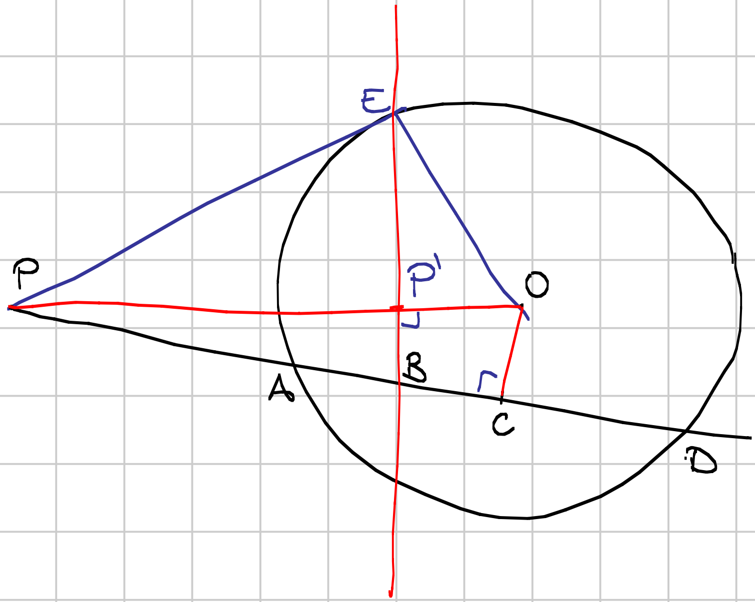
$P \in$ retta per pol AC e pol BD $\underset{\text{uso (5)}}{=}$ pol $AC\cap BD$ = pol S

Poi uso (2).

Lemma delle polare 2

C = pto medio di AD

$B = PA \cap$ pol P



Allora si ha che

(1) $PA\cdot PD = PB\cdot PC$

(2) $(A,D;P,B) = -1$

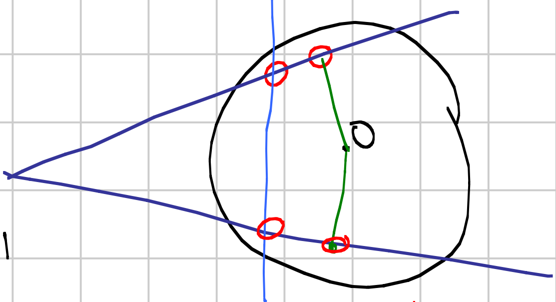
Dim

(1) Chiamo E, P'.

$$PA\cdot PD \underset{\text{potenza di } P \text{ rispetto a } \Gamma}{=} PE^2 \overset{\text{teorema di Euclide}}{=} PP'\cdot PO \underset{OP'CB \text{ è ciclico}}{=} PB\cdot PC$$

Corollario:

i pti rossi sono conciclici



Date due rette passanti per P, le intersez con pol P e i pti medi delle corde sono conciclici

Dim: "ciclicità metrica"

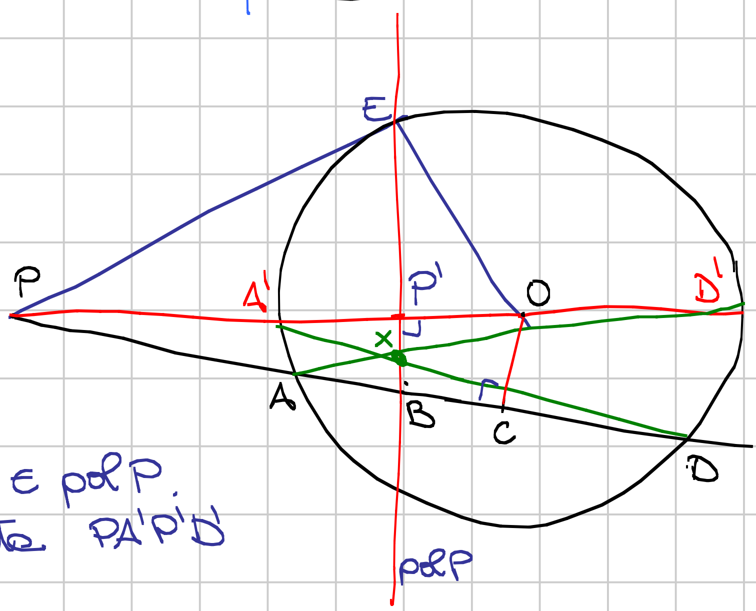
(2) Basta mostrarlo quando AD è un diametro.

Infatti

$$(A,D;P,B) \underset{\text{per l'altro lemma}}{=} (D',A';P,P')$$

$\overset{X}{\shortparallel}$ $AD'\cap A'D \in$ pol P.

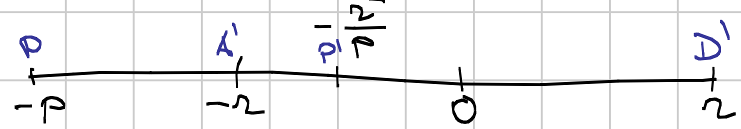
proiettando da X sulla retta $PA'P'D'$



Ora devo mostrarlo per pti sul diametro

$$\frac{D'P \cdot A'P'}{D'P' \cdot A'P} = \frac{(r+p)\left(\cancel{r}-\frac{r^{\cancel{2}}}{p}\right)}{\left(\cancel{r}+\frac{r^{\cancel{2}}}{p}\right)\cdot(p-r)}$$

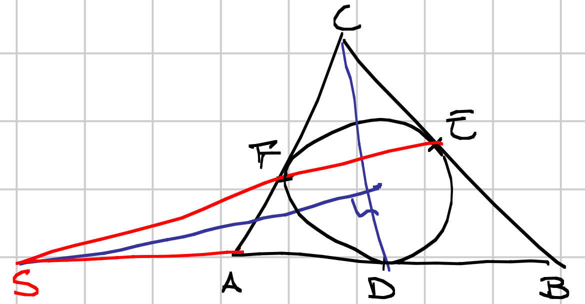
$$= -1 .$$



Esempio:

ABC triangolo, I incentro, D, E, F punti di tangenza. $S = EF \cap BA$

Allora $SI \perp CD$.



Mostriamo che $CD \overset{?}{=} \text{pol}\, S$.

$S \in \text{pol}\, C = EF$

$S \in \text{pol}\, D = AB$

La polarità rovescia le inclusioni

$C \in \text{pol}\, S$

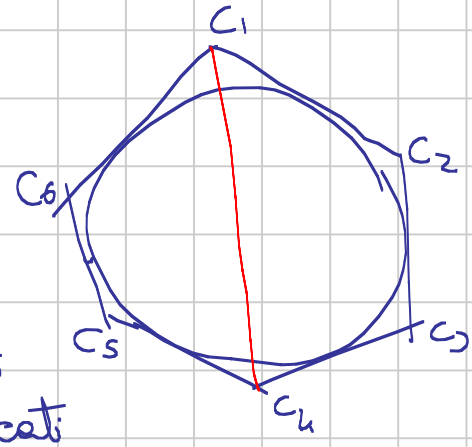
$D \in \text{pol}\, S$

Allora $\text{pol}\, S = CD$.

Teorema di Brianchon

$C_1, \dots, C_6$ esagono circoscr a una circo.

Allora $C_1 C_4$, $C_2 C_5$, $C_3 C_6$ concorrono

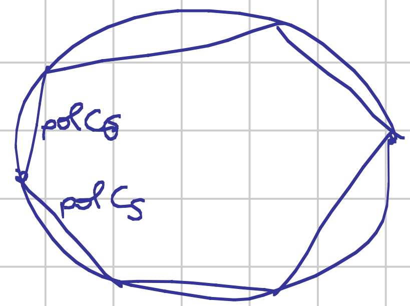


Dim:

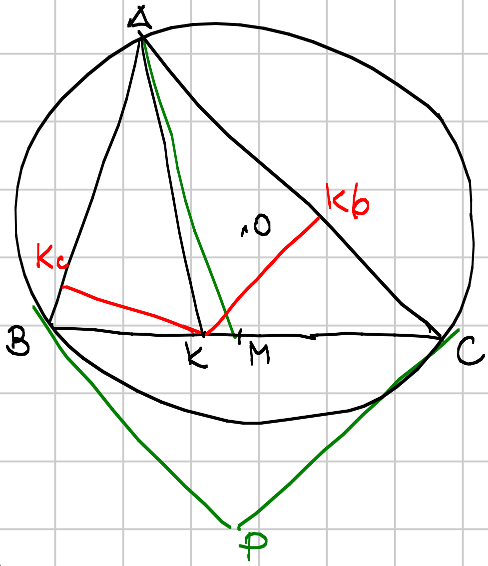
E' il duale di Pascal.

Tesi duale: $\text{pol}\, C_1 \cap \text{pol}\, C_4$, $\text{pol}\, C_2 \cap \text{pol}\, C_5$

$\text{pol}\, C_3 \cap \text{pol}\, C_6$ sono allineati



Lemma della simmediana



ABC triangolo, AK ceviana,
$P = BB \cap CC$, M pto medio di BC

Sono equivalenti

1) $B\hat{A}K = M\hat{A}C$

2) $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

3) A, K, P allineati

4) Dette K_c, K_b le proiez di K su AB e AC
$$\frac{K_cK}{KK_b} = \frac{AB}{AC}$$

Se AK verifica una delle proprietà sopra, si chiama SIMMEDIANA.

Dim:

Tutti individuano esattamente un pto, quindi per dim $1 \Leftrightarrow 2$ basta dim $1 \Rightarrow 2$.

$1 \Rightarrow 2$ Per il teo dei seni su ABK

$$\frac{BK}{\sin B\hat{A}K} = \frac{AB}{\sin B\hat{K}A}$$

$$\frac{KC}{\sin K\hat{A}C} = \frac{BC}{\sin A\hat{K}C}$$

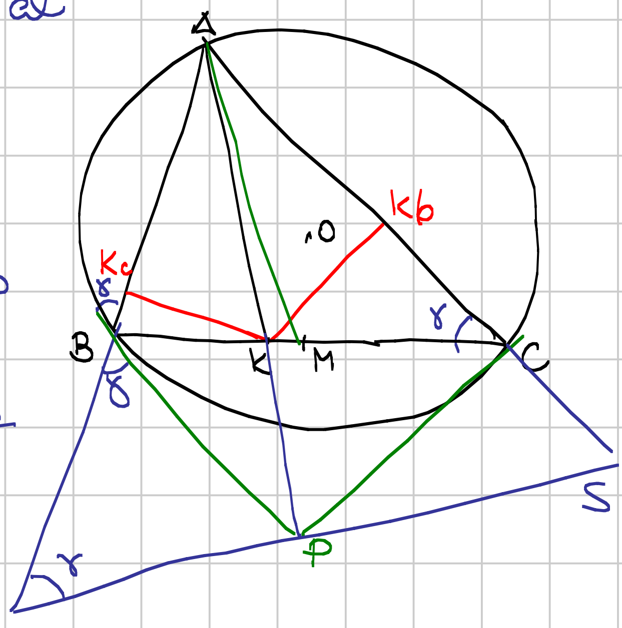
Quindi

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\sin B\hat{A}K}{\sin K\hat{A}C} \cdot \frac{AB}{AC} \overset{\text{uso } 1}{=} \frac{\sin M\hat{A}C}{\sin M\hat{A}B} \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$= \frac{AB^2}{AC^2}$$

teo seni su BAM e MAC

③ $\Rightarrow$ ① Traccio l'antiparall al lato BC che passa per P ovvero t.c $B\hat{R}P = \gamma$.



Basta dim che P è pto medio di RS (poi con omotetia di centro A + simm rispetto alla bisettrice di $\hat{A}$ mando $R \to C$ $S \to B$ $P \to M$ e quindi $R\hat{A}P \to C\hat{A}M$, ok)

$R\hat{P}B$ è isoscele $\Rightarrow RP = BP = PC = PS$

stesso ragionamento su PCS

② $\Rightarrow$ ④ $\quad \dfrac{K_cK}{KK_b} = \dfrac{BK \cdot \sin\hat{B}}{KC \cdot \sin\hat{C}} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \cdot \dfrac{AC}{AB}$

uso ② e teo seni su ABC.

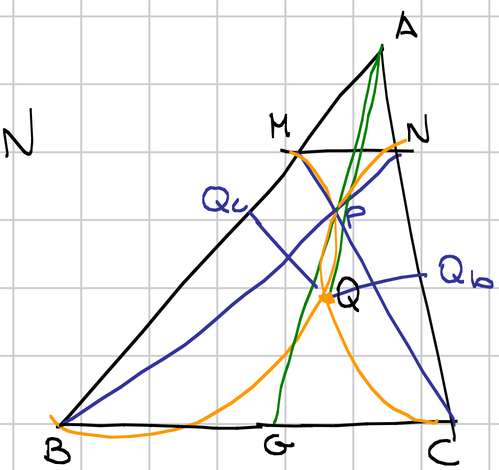
<u>Esercizio:</u> BMO 09 - 2

$\triangle ABC$ triangolo, $MN \parallel BC$. $P = MC \cap BN$

I circocerchi di BMP e CNP si incontrano in P e Q

Dim che

$$B\hat{A}Q = C\hat{A}P.$$



Oss 1: $AP \cap BC$ è il pto medio di BC

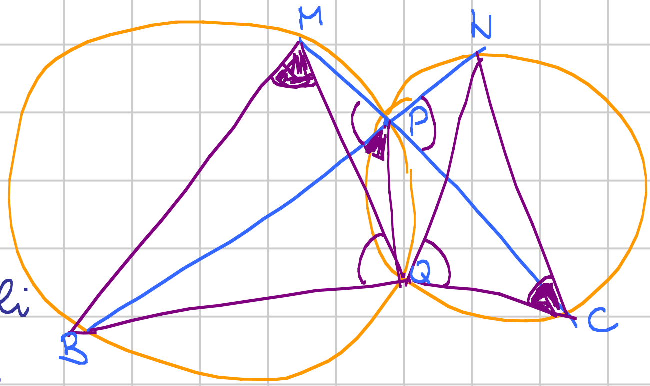
(Ceva su ABC con punto P

$$\frac{BG}{GC} \cdot \underbrace{\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB}}_{=1 \text{ per Talete.}} = 1$$

Resta da dimostrare che AQ è la simmediana.

Basta dim $\dfrac{Q_cQ}{QQ_b} \overset{?}{=} \dfrac{AB}{AC}$.

Q è centro di una omotetia + rotazione che manda $Q \to Q$ $B \to N$ $M \to C$.



Basta dim che
$B\widehat{Q}M = N\widehat{Q}C$
e $B\widehat{M}Q = N\widehat{C}Q$
(poi sono i due triangoli viola sono simili con centro Q)

$$\frac{QcQ}{QQ_b} = \frac{BM}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

per rotoomotetia. per Talete

$\square$