# Teoria dei Numeri 2 (medium)



"Vieta - jumping"

Per ogni $m > 0$ esistono infinite coppie $(x, y)$

tali che $x \cdot y \mid x^2 + y^2 + m$

$(x, y) = (1, 1)$ $(m+1, 1)$

$x \mid y^2 + m, \quad y \mid x^2 + m$

$$\frac{x^2 + y^2 + m}{xy} = m + 2$$

$$x^2 + y^2 + m - (m+2)xy = 0$$

$$\boxed{x^2 - x\left((m+2)y\right) + (y^2 + m) = 0}$$

Per $y = 1$ l'equazione ha la sol $x = 1$

somma radici $= (m+2)y$ $(x = m+1, y = 1)$

$(1, m+1)$

$$x^2 - x\left((m+2)(m+1)\right) + \left((m+1)^2 + m\right) = 0$$

Soluz. $x = 1$ che conosciamo

altra $= (m+2)(m+1) - 1$

$(m^2 + 3m + 1, m + 1)$

Idea: se ho una relaz. di 2° grado e conosco una soluzione ne ho subito un'altra

$$\frac{a^2+b^2}{1+ab} = k \implies k \text{ e' un quadrato perfetto}$$
$(a, b > 0)$

Fissiamo $k$ e supponiamo che $(a,b)$ sia una soluzione. $\quad a^2+b^2-k-kab=0$

$a \geq b \qquad (\bar{a}, b)$ con $a \cdot \bar{a} = b^2 - k$

$a + \bar{a} = kb$

$$\bar{a} = \frac{b^2-k}{a} \leq \frac{a^2-k}{a} < \frac{a^2}{a} = a$$

Può capitare che $\bar{a} \leq 0$ ?

Se $\bar{a} < 0 \longrightarrow k = \frac{\bar{a}^2+b^2}{1+\bar{a}b}$ $\overset{+}{\phantom{x}}$ $\overset{-}{\phantom{x}}$ $\implies k<0$ NO

Se $\bar{a} = 0 \implies \frac{b^2-k}{a} = 0 \implies \boxed{k=b^2}$

Supponiamo che $k$ si scriva $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$.

Esiste una soluzione minima $(a,b)$

Ma anche $\left(\frac{b^2-k}{a}, b\right)$ è soluzione e $\frac{b^2-k}{a} < a$. Se $b^2-k \neq 0$ ho costruito una soluzione + piccola della minima, assurdo.

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \Rightarrow a=b$$

$$(4a^2-1)^2 \equiv 0 \pmod{4ab-1}$$

$$(b, 4ab-1)=1$$

$$\underset{\underset{(4a^2b-b)^2}{\equiv}}{b^2(4a^2-1)^2} \equiv 0 \pmod{4ab-1}$$

$$0 \equiv (4a^2b^2-b^2)^2 \qquad \text{boh!}$$

$$4a \equiv 1/b \pmod{4ab-1}$$

$$0 \equiv (4a^2-1)^2 \equiv \left(\frac{a}{b}-1\right)^2 \pmod{4ab-1}$$

$$(*) \quad 0 \equiv (a-b)^2 \pmod{4ab-1}$$

$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k \text{ intero} \quad (\text{Tesi: } k=0)$$

Domanda: da $(*)$ non segue $a \equiv b \ (4ab-1)$?

$$4 \mid 6^2 \qquad 4 \nmid 6$$

$$(a-b)^2 - k\,(4ab-1) = 0$$

$$a^2 - a\,(2b + 4kb) + b^2 + k = 0$$

Prendo $(a,b)$ soluz. minima

$$(\bar{a}, b) \qquad 0 < \bar{a} = \frac{b^2+k}{a} \overset{?}{\leq} a$$

$$b^2 + k \leq a^2$$

$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k \leq a^2 - b^2 \iff (a-b)^2 \leq (a-b)(a+b)(4ab-1)$$

Se $a = b$ vale l'uguale

Se $a \neq b$ $(a-b>0)$ $\qquad a-b < (a+b)(4ab-1)$

VERA

La soluz. minima fissato $k$ deve avere $a=b$

$$\Rightarrow \quad k = 0 = \frac{(a-b)^2}{\cdots}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = k \implies k = 1 \text{ o } 3$$

$$x = y = z \rightsquigarrow \frac{3x^2}{x^3} = 3/x \quad \text{che dà } 1, 3$$

$$x^2+y^2+z^2 = 2xyz$$

Modulo la potenza giusta di 2

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 2$$

$x \equiv y \equiv z \equiv 0$, esattamente 2 dispari

$\Rightarrow$ c'è un pari

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 4$$

$\Rightarrow$ sono tutti pari

$x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$

$$\cancel{4}(a^2+b^2+c^2) = \overset{4}{\cancel{16}}\, abc$$

DISCESA INFINITA!

- $x^2+y^2+z^2 = 2^k xyz$

- Controllare le valutaz. 2-adiche

$$x^2+y^2+z^2-kxyz=0 \qquad (\text{simmetrica})$$

$$x \geq y \geq z$$

Prendo $(x,y,z)$ soluz.

$(\bar{x}, y, z)$

$$x\bar{x} = y^2+z^2 > 0$$

$$\bar{x} = \frac{y^2+z^2}{x} \leq \frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$x+\bar{x} = kyz$$

$$x, \bar{x} = \frac{1}{2}\left[kyz \pm \sqrt{(kyz)^2-4(y^2+z^2)}\right]$$

Le cose ci vanno male se $x$ era la soluz. piccola, cioè se

$$y \leq x = \frac{1}{2}\left[kyz - \sqrt{\phantom{(kyz)^2}}\right]$$

$$\cancel{2y} + \sqrt{(kyz)^2-4(y^2+z^2)} \leq kyz - 2y$$

$$\cancel{(kyz)^2} - \cancel{4}(y^2+z^2) \leq \cancel{(kyz)^2} + \cancel{4}y^2 - \cancel{4}ky^2z$$

$$ky^2z - z^2 \leq 2y^2$$

$$y^2(kz-2) \leq z^2$$

$$kz-2 \leq \left(z/y\right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow kz \leq 3 \Rightarrow \boxed{k \leq 3}$$

$$\frac{x^2+y^2+1}{xy} = 3$$

---

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{1+abcd} = n \qquad (a, b, c, d > 0)$$

$n = 2$

$$a^2 + \underbrace{b^2 + c^2 + d^2 - n}\ \underbrace{-\ nabcd} = 0$$

Gli $n$ che si rappr. sono (ammesso che esistano) tra quelli che fanno andare male VJ

$$(\overline{a}, b, c, d) \qquad a \cdot \overline{a} = b^2 + c^2 + d^2 - n$$

$$\overline{a} < a\,?$$

$$b^2 + c^2 + d^2 - n < a^2 \quad (\text{ok})$$

Altrimenti $b^2 + c^2 + d^2 \geq a^2 + n$

$b, c, d$ sono "non troppo piccoli" rispetto ad $a$

$$bcd \geq a \qquad n = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{1+abcd} \leq \frac{4a^2}{1+a^2} < 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - k, \quad k \geq 2$$

$$bcd \geq \sqrt{b^2+c^2+d^2-2} \geq \sqrt{b^2+c^2+d^2-k} = a$$

$$b^2c^2d^2 \geq b^2+c^2+d^2-2$$

$$b^2(c^2d^2-1) \geq c^2+d^2-2$$

Se $c$ o $d \geq 2$ $\qquad c^2d^2-1 \geq 3$

$$3b^2+2 \geq c^2+d^2$$

Se $c=d=1$ $\qquad 0 \geq 0$ vera

$0 < \bar{a} < a \qquad \bar{a} = \dfrac{b^2+c^2+d^2-n}{a}$

$0 < \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{1+abcd} = n \qquad 0 < \dfrac{\bar{a}^2+b^2+c^2+d^2}{1+\bar{a}bcd}$

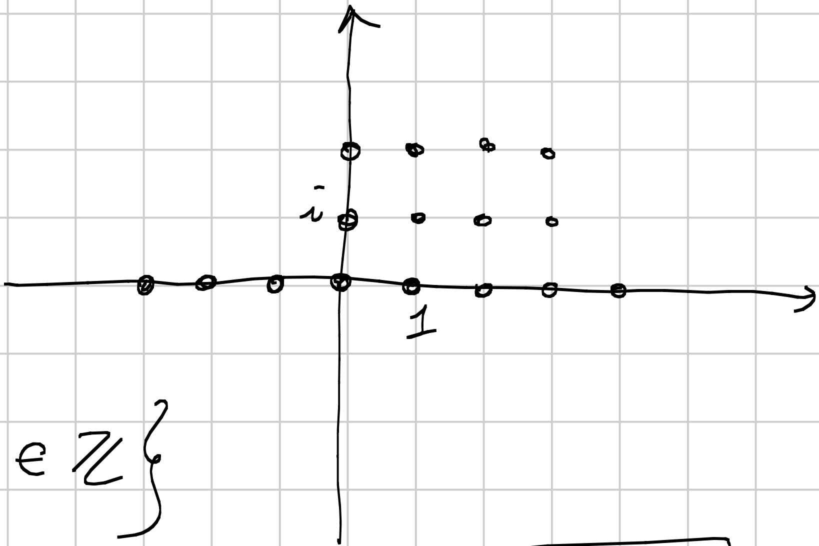
$\bar{a} \geq 0 \qquad \bar{a} = 0$ (succede per $n = b^2+c^2+d^2$)

Male:
- $n<4$
- $n = b^2+c^2+d^2$ $\quad (b,c,d>0)$

Questi si fanno!

# Interi di Gauss

$$i^2 = -1$$




$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Norma complessa: $N(a+bi) = \sqrt{a^2+b^2}$

Si lavora con la norma quadra

$$N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1)\, N(z_2)$$

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$$

In $\mathbb{Z}[i]$ valgono
- la divisione euclidea
- la fattoriz. unica

Dati $a$ e $b \neq 0$ $\exists\, q, r$ con $a = bq + r$

con $N(r) < N(b)$ (o $r = 0$)

Primi: $p = ab \Rightarrow a = p,\ b = 1$ o vicev.

(in realta' e' la def. di irriducibile)

Vera def. $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oppure $p \mid b$

(e $p \neq \pm 1$)

$$15 = (-3)(-5)$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{-i\,(1+i)^2}}{2} = (1+i)\cdot(1-i) = 1^2+1^2$$

Invertibili di $\mathbb{Z} = \{1, -1\}$

Invertibili di $\mathbb{Z}[i] = \{1, -1, i, -i\}$

$$(1+i)\,i = (i-1)$$

Sia $z$ un invertibile. Esiste $w$ con $zw=1$

$$\Rightarrow \quad \underset{\overset{\shortparallel}{N(z)\cdot N(w)}}{N(zw)} = 1 \qquad \Rightarrow \quad N(z) = 1$$

$$z = x+iy \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 1$$

$$5 = (2+i)(2-i)$$

Fatto: i primi di Gauss sono: $\quad (p = x+iy)$

$\longrightarrow$ i primi $p \in \mathbb{Z}$ con $p \equiv 3 \pmod 4$

$\longrightarrow$ $x^2+y^2$ e' un numero primo (di $\mathbb{Z}$)

IRRIDUC = PRIMI

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $p$ un primo. per assurdo $p = a\cdot b$

$\Rightarrow p \mid a$ oppure $p \mid b$, $a = Kp$

$$p = Kp\cdot b \Rightarrow 1 = K\cdot b$$

$$p = 1\cdot p = (-1)(-p) = (i)(-ip) = (-i)(ip)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $p$ un irriducibile, $p \mid a \cdot b$

Se $p \nmid a$ e $p \nmid b$, $(p, a) = 1$

$(p, b) = 1$

$1 = mp + ha, \quad 1 = np + kb$ (Bézout)

$1 = 1 \cdot 1 = (mp + ha)(np + kb)$

$= mnp^2 + hanp + mbkp + hkab$

$\Rightarrow p \mid 1$ ASSURDO

Prendiamo $p \equiv 3 \pmod 4$ $\quad (p \in \mathbb{N})$

$$0i + p = (a+bi)(c+di)$$

$$(0^2+p^2) = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $p^2$ | • fatt. falsa |
| $p$ | $p$ | non esiste |
| $p^2$ | $1$ | • fatt. falsa |

$p = a^2+b^2$ (No! Assurdo mod 4)

$p \equiv 1 \pmod 4$ non sono primi di Gauss

$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, esiste $x \in \mathbb{N}$ con $x^2 \equiv -1 \ (p)$

$\Rightarrow \quad p \mid x^2+1 = (x+i)(x-i)$

($3i$ e' primo = primo vero · unita')

Se $p$ e' primo di Gauss, $p \mid x+i$ (o $x-i$)

$p(a+bi) = x+i \qquad pb = 1$ <u>NO</u>

$\rightsquigarrow$ $p$ non e' irriducibile $\Rightarrow p = (a+bi)(c+di)$

$$p^2 = \underset{1,p,p^2}{\underset{\shortparallel}{(a^2+b^2)}}(c^2+d^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{p = a^2+b^2} \qquad p = (a+bi)(a-bi)$$

Prendiamo un generico $z = x+iy$ con $x^2+y^2 = $ primo (di $\mathbb{Z}$)

$z$ e' un primo di Gauss

$$z = z_1 \cdot z_2 \quad \Rightarrow \quad \underset{p}{\underset{\shortparallel}{N(z)}} = N(z_1) \cdot N(z_2)$$

$\Rightarrow N(z_1) = 1$, cioe' $z_1$ e' un'unita' e la fatt. e' falsa.

(Dimostra che $1+i$ e' un primo)

Sia $p = x+iy$ primo nel senso di Gauss.

$$\underset{\text{primo di Gauss}}{p} \mid x^2+y^2 = \underbrace{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}_{\text{primi di } \mathbb{Z}}$$

( Fattorizziamo $3+i$. $3^2+1^2=10$

$$10 = (3+i)(3-i) = 2 \cdot 5 = (2+i)(2-i)(1+i)(1-i)$$

$1+i$ divide $3+i$ ? $3+i = 2+(1+i)$

$$= (1+i)(1-i)+(1+i)$$
$$= (1+i)(2-i) \quad )$$

$$p \mid p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow p \mid p_1^{\alpha_1} \Rightarrow p \mid p_1$$

$$p_1 = p \cdot z$$

norme

$$p_1^2 = N(p) \cdot N(z)$$

$$\downarrow$$

$$p_1,\ p_1^2$$

p e' primo con norma prima

$p = p_1 \in \mathbb{Z}$ (a meno di unita')

$p \equiv 1 \ (4) \Rightarrow p = a^2 + b^2$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Se $n = 2^a p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ con $p_i \equiv 1 \pmod 4$
si rappresenta.

$p^2 + 0^2$. Anche $n = 2^a \underbrace{p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}}_{\equiv 1 (4)} \underbrace{q_1^{2b_1} \cdots q_k^{2b_k}}_{\equiv 3 (4)}$

Supponiamo $n = a^2 + b^2$ e sia $p \mid n$, $p \equiv 3 \ (4)$

$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$ $\nearrow$ $p \mid a, \ p \mid b$

$\searrow$ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \equiv -1 \pmod p$

$\Downarrow$

$\mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) = 4 \mid p-1$

ASSURDO

$a = pa_1, \ b = pb_1$ $\qquad$ $\left(\frac{n}{p^2}\right) = a_1^2 + b_1^2$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\overset{\shortparallel}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$\text{mcd}(x+iy,\ x-iy)$$
$$\shortparallel$$
$$\text{mcd}(2x,\ x+iy) = 1$$

Se $p \mid 2x$ e $p \mid x+iy$ $\nearrow p \mid 2$, $\searrow p \mid x \Rightarrow p \mid y$

$$x = p(a+bi) \Rightarrow x = \overline{x} = \overline{p}\ \overline{(a+bi)}$$

$$\overline{a+bi} = a - bi$$

Otteniamo $\overline{p} \mid x$ $\qquad \underbrace{p\overline{p}}^{\in \mathbb{Z}} \mid x,\quad p\overline{p} \mid y$

$$1+i \mid x+iy \Rightarrow 1+i \mid (x+iy) - y(1+i)$$
$$= x - y$$

$$1+i \mid x-y \Rightarrow 1-i \mid x-y \Rightarrow 2 \mid x-y$$

ATTENZIONE

$x, y$ entrambi dispari (assurdo mod 4)

$$x+iy = (m+in)^2 = (m^2-n^2) + i\,(2mn)$$

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2+n^2$$

Abbiamo perso $x+iy = (m+in)^2 \cdot$ le unità non banali

$$\begin{cases} y^3 - 11^x = 4 \\ x \text{ pari} \end{cases}$$

mod 5 $\quad y^3 - 1 \equiv 4 \ (5)$

$\Rightarrow y^3 \equiv 0 \ (5) \Rightarrow 5 \mid y$

$5^3 - 4 = 121 \qquad (x = 2,\ y = 5)$

Mod 25? $\qquad -11^x \equiv 4 \pmod{25}$

$$11^x \equiv 11^2 \pmod{25}$$

$$11^{x-2} \equiv 1 \pmod{25}$$

$11,\ 11^2 \equiv -4,\ 11^3 \equiv -44 \equiv 6,\ 11^4 \equiv 16 \qquad 11^5 \equiv 1 \pmod{25}$

$$y^3 - 11^{2z} = 4$$

$$y^3 = 11^{2z} + 4 = (11^z + 2i)(11^z - 2i)$$

$$\text{mcd}(11^z + 2i,\ 11^z - 2i) = \text{mcd}(2 \cdot 11^z,\ 11^z + 2i)$$

$$= \text{mcd}\left((1+i)(1-i)\,11^z,\ 11^z + 2i\right)$$

$$= \text{mcd}\left((1+i)(1-i),\ 11^z + 2i\right) =$$

$$= \text{mcd}(2,\ 11^z) = 1$$

$(11^z + 2i) = (a + bi)^3 \Rightarrow \qquad 2i = 3a^2 bi - b^3 i$

$2 = b(3a^2 - b^2) \qquad b \mid 2$

$i = (-i)^3, \quad (-1) = (-1)^3, \quad (-i) = i^3$

"Stime"

$$\frac{p(n)}{q(n)} \in \mathbb{Z} \quad \text{per infiniti valori di } n$$

$$\Rightarrow \quad q(x) \mid p(x) \quad \text{come polinomi}$$

$$p(x) = q(x)\, r(x) + s(x), \qquad \deg s(x) < \deg q(x)$$

oppure $s(x) = 0$

$$r(x),\ s(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{Z}}}{r(n)} + \frac{s(n)}{q(n)} \in \mathbb{Z} \quad \text{infinite volte}$$

Per $n$ molto grande $\left| \dfrac{s(n)}{q(n)} \right| < 1$

$$s(x) = x^k + \dots \qquad q(x) = x^h + \dots \qquad h > k$$

$$\frac{s(n)}{q(n)} = \frac{x^k + \dots}{\underbrace{x^{h-k}}_{\text{va a } +\infty}\,(x^k + \dots)}$$

limitata

Perciò $s(n)/q(n) = 0$ infinite volte $\Rightarrow s \equiv 0$

$p(n)$ è divisibile per infiniti primi

$$p(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

Caso facile: $a_0 = 1$, supponiamo solo finiti primi $q_1, \dots, q_k$

$$p(h\, q_1 \cdots q_k) \equiv 1 \; (q_i)$$

Può capitare sia proprio $= 1$, ma al variare di $h$ non sarà sempre $= 1$.

Caso $a_0$ generico $\quad p(a_0 X) =$

$$= a_0 \left( a_0^{n-1} X^n \cdot a_n + \dots + a_1 X + 1 \right)$$

$q_1, \dots, q_k$. Fissiamo $M$.

Tra i numeri $\leq M$ quanti si fattorizzano solo con i $q_j$?

$$q_1^{a_1} \cdots q_k^{a_k} \leq M$$

$$a_1 \leq \log_{q_1} M \leq \log_2 M$$

Sono al più $(1 + \log_2 M)^k$

Quanti sono i valori assunti dal polin. e $\leq M$?

$$p(x) = a_n x^n + \dots$$

$$x = 0, \dots, \ell \qquad a_n \ell^n < M \qquad \ell \sim \sqrt[n]{M/a_n}$$

$$\ell \geq c \cdot M^{1/n}$$

$$c \cdot M^{1/n} < (1 + \log_2 M)^k \quad \forall M$$

$$M = 2^{t \cdot n} \qquad c \cdot 2^t < (1 + nt)^k \qquad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

(CONFRONTARE AMMISSIONE SNS)

---

Dato $m$,

Esistono $m$ interi consecutivi non della forma

$$a^5 + b^7 + c^{11}$$

Fisso $M$. I numeri $\leq M$ quanti sono?

$$a \leq M^{1/5} \qquad b \leq M^{1/7} \qquad c \leq M^{1/11}$$

Non sono di più di $M^{1/5} \cdot M^{1/7} \cdot M^{1/11}$.

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{m} \quad \underbrace{\qquad\quad}_{m} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad M}_{m}$$

Cassetti $= M/m$

$$M^{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}} \geq \frac{M}{m} \quad \forall M$$

$\alpha < 1$

$$m \geq M^{1-\alpha} \quad \forall M$$ per $M$ grande è falsa!

Esistono $m$ interi cons. non potenze perfette

Fissiamo $M$. Le potenze perfette quante sono?

$$\leq \sqrt{M} + M^{1/3} + \dots + M^{1/K}$$

$$2^K > M \qquad K = \log_2 M$$

$$\leq \underbrace{(\log_2 M)}_{\text{n° termini}} \cdot \underbrace{M^{1/2}}_{\text{ogni termine}}$$

Se la tesi fosse falsa, $M/m \leq M^{1/2} \log_2 M$, che però diventa falsa DEFINITIVAMENTE

$n \equiv p \pmod{p^2}$ $\qquad\qquad$ $p_1, \dots, p_m$

$$\begin{cases} n \equiv p_1 \pmod{p_1^2} \\ 1+n \equiv p_2 \pmod{p_2^2} \\ \vdots \\ n+m-1 \equiv p_m \pmod{p_m^2} \end{cases} \overset{TCR}{\Rightarrow} \exists\, n \text{ soluz}$$

Sia $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c. per ogni coppia $a, b$ di interi $a f(a) + 2ab + b f(b)$ e' un quadr. perf. $\Rightarrow f(n) = n \quad \forall n$

- $a = p$ primo, $b = 0$ $\quad p f(p) = \square$

$$f(p) = p \cdot g(p)^2 \qquad p \mid f(p)$$

- $$p f(p) + 2p + f(1) = m^2$$
$$p f(p) + 4p + 2 f(2) = n^2$$

Supponiamo $f(p) \neq p \Rightarrow f(p) \geq 2p \Rightarrow m, n \geq \sqrt{2}\, p$

$$2p + \left(2f(2) - f(1)\right) = n^2 - m^2 \geq (m+1)^2 - m^2$$
$$= 2m+1 \geq 2\sqrt{2}\, p + 1$$

Questo e' falso per $p$ abbast. grande.

$\Rightarrow f(p) = p$ per tutti i $p$ grandi

- Per ogni $a$, $p >> 1$ $\quad a^2 + 2ap + p^2 = \square$

$$a f(a) + 2ap + \underset{p \cdot f(p)}{\underbrace{p^2}} = \square$$

$$a\left(\underset{\text{costante risp. } p}{\underbrace{a - f(a)}}\right) = \text{differenza di } \square$$

Da qui assurdo per $p \to \infty$, perché

$\square - \square$ va a $+\infty$, ma è costante.

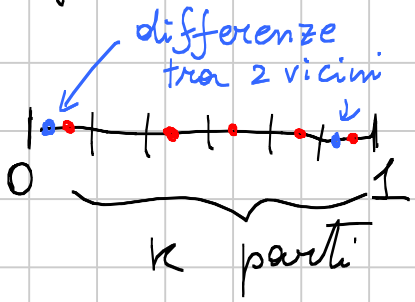
Esiste una potenza di 2 che, in base 10, contiene le cifre 1372546 (per dire)

$$2^n = 137\ldots = 1{,}37\ldots \cdot 10^m$$

$$n \log_{10} 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{intero}}}{m} + \log_{10} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 < \cdot < 1}}{(1{,}37\ldots)}$$

Ci interessa $\{n \cdot \log_{10} 2\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quasi uguale}}}{=} \underbrace{\log_{10}(1{,}37\ldots)}$

Con la successione $\{n \cdot \log_{10} 2\}$ approssimo bene ogni numero reale.




$\{n \log_{10} 2\}$ per $k+1$ valori distinti di $n$

Diciamo che $n_0$ fa sì che $\{n_0 \log 2\} < 1/k$

$\{2n_0 \log 2\}$, $\{3n_0 \log 2\}$