SENIOR 2011 – PRELIMINARI (medium)

Titolo nota 04/09/2011

PIGEONHOLE

Esempio 1 (Approssimazione diofantea)

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Allora esiste una successione di frazioni $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Oss. In certo senso è falso se $\alpha \in \mathbb{Q}$ perché la differenza o è uguale a 0, oppure è dello stesso ordine di $\frac{1}{q_n}$

Se fosse $\alpha = \frac{p}{q}$

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p q_n - p_n q}{q\, q_n} \right| \geq \underbrace{\boxed{\frac{1}{q}}}_{\text{Fisso}} \cdot \frac{1}{q_n}$$

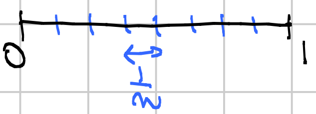
Lemma Dato α e dato n, esiste p/q t.c.

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq} \qquad e \qquad q \leq n$$

Dim. Consideriamo $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \dots, \{n \cdot \alpha\}$

dove $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ = parte frazionaria.

Ho quindi $(n+1)$ numeri che stanno in $[0, 1]$. Quindi ce ne sono almeno 2 la cui distanza è $\leq \frac{1}{n}$



Quindi

$$\left| \{k_1 \cdot \alpha\} - \{k_2 \cdot \alpha\} \right| \leq \frac{1}{n}$$

$$= \left| k_1\alpha - \ell_1 - (k_2\alpha - \ell_2) \right| \leq \frac{1}{n} \iff \left| (k_1 - k_2)\alpha - (\ell_1 - \ell_2) \right| \leq \frac{1}{n}$$

Divido per $k_1 - k_2$:

$$\left| \alpha - \underbrace{\boxed{\frac{\ell_1 - \ell_2}{k_1 - k_2}}}_{\frac{p}{q}} \right| \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{n \cdot (k_1 - k_2)}}}_{\frac{1}{nq}}$$

Il denominatore k_1-k_2, che wlog posso supporre >0, è $\le n$ perché diff. di 2 numeri $\le n$.

— o — o —

<u>Dim. di approx. diofantea dato il Lemma.</u>

Fisso $n=12$

Intanto trovo $\frac{p_1}{q_1}$ t.c. $\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right| \le \frac{1}{12\,q_1} \le \frac{1}{q_1^2}$

perché $12 \ge q_1$

Ora utilizzo nuovamente il lemma con un valore di n t.c.

$$\frac{1}{n} < \left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|$$

perché $q_2 \le n$

Trovo $\frac{p_2}{q_2}$ t.c. $\left|\alpha-\frac{p_2}{q_2}\right| \le \frac{1}{n\cdot q_2} \le \frac{1}{q_2^2}$

$\le \frac{1}{n} < \left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|$

Questo assicura che $\frac{p_2}{q_2} \ne \frac{p_1}{q_1}$

E così via per induzione.

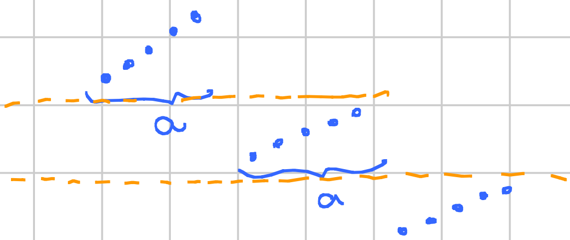
— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\boxed{\text{Lemma } ab+1}$ Supponiamo di avere una successione di $ab+1$ numeri reali. Allora esistono

- o una sottosucc. di $a+1$ termini debolmente crescente
- o una sottosucc. di $b+1$ termini debolmente decrescente.

<u>Oss. 1</u> Se gli $ab+1$ numeri sono tutti distinti, allora sono strettamente monotone.

<u>Oss 2</u> Se i numeri sono solo ab, allora non è detto che esistano



Facciamo b scalini di questo tipo.

Dim 1 Supponiamo che non esistano sottosuccessioni con $b+1$ elementi decrescenti. Voglio trovare una di $a+1$ termini crescente.

Per ogni elemento degli $ab+1$ dati, considero la più lunga s.succ. decrescente di cui fa parte (potrebbe essere fatta da 1 solo elemento, se sono più di una ne scelgo una a caso). Considero la posizione che questo elemento occupa nella sottosuccessione: può essere un intero da 1 a b.

<u>Pigeonhole</u>: ci saranno almeno $a+1$ termini che occupano la stessa posizione. Voglio dimostrare che questi formano una s. succ. crescente.

Supponiamo per assurdo che non sia così. Mettiamo che siano i "terzi" delle rispettive successioni

ora questo ha 3 elementi prima in ordine decrescente, quindi ho "allungato" la succ. di cui faceva parte. Assurdo.

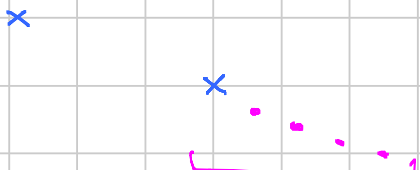
Dim.2 Supponiamo che non esista s.succ. di $b+1$ decrescente.

Prendo un el. qualunque, prendo la max decrescente (o una delle ...) e la elimino. Poi ripeto sui rimanenti, e così via. Ad ogni mossa elimino al max b elementi, quindi faccio almeno $a+1$ mosse.

Hope: i primi elementi delle varie s.succ. considerate ai vari passi siano in ordine crescente.

Se non lo fossero

Falso perché ce n'è ancora uno prima.



è la più lunga decrescente che contiene un certo suo elemento

eliminati insieme

Non funziona, perché magari il precedente era già stato eliminato in un passaggio precedente.

— o — o —

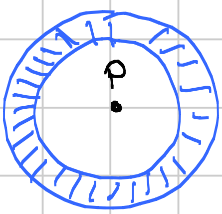
Esempio 3 Dati 28 p.ti in sfera di raggio 2, ne esistono almeno 2 con distanza ≤ 2.

Idea basic: dividere la sfera in 27 parti, tutte di diametro ≤ 2

Idea medium: per ogni p.to prendiamo la sfera con centro in lui e raggio 1. Se la tesi del problema fosse falsa, le sfere sarebbero tutte disgiunte.
Queste sferette possono uscire dalla sfera iniziale, ma comunque stanno nella sfera di raggio 3 e stesso centro di quella iniziale.
Ma 28 sfere di raggio 1 disgiunte non stanno in una sfera di raggio 3.

Esempio 4 Cerchio con $R = 16$ e 196 p.ti dentro.
Allora esiste una corona circolare di raggi 4 e 5 che ne contiene almeno 5.

Idea medium



Se voglio che P stia in una corona, il centro della corona dovrà stare in una corona con centro in P e raggi 4-5.

Conclusione ① per ognuno dei 196 p.ti considero la corona con centro in lui e raggi 4-5.
② ho 196 corone contenute in un cerchio di raggio 21
③ Conto: $196 \cdot \text{area corona} > 21^2 \pi \cdot 4$
④ Pigeonhole: esiste almeno un p.to che sta in 5 corone. La corona centrata in quel p.to contiene almeno 5 p.ti originari.

<u>Fatto generale</u> Se ho k figure $F_1, \dots, F_k$ contenute in G e

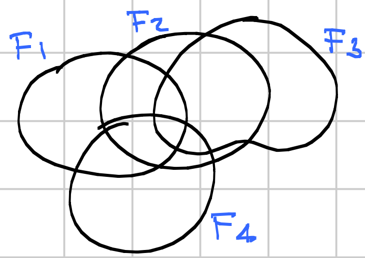
$$\text{Area}(F_1) + \dots + \text{Area}(F_k) > n \ \text{Area}(G)$$

Allora almeno un p.to di G è contenuto in almeno $(n+1)$ delle figure F_k.

<u>Specie di double counting.</u>

Suddivido G in "figure elementari": dato un sottoinsieme $A \subseteq \{1, \dots, k\}$, prendo

$$F_A = \left\{ x \in G : \begin{array}{ll} x \in F_k & \forall k \in A \\ x \notin F_k & \forall k \notin A \end{array} \right\}$$

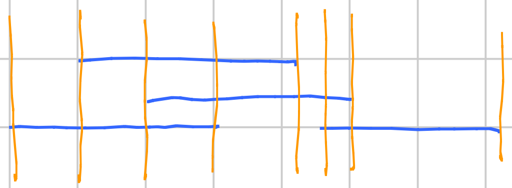


Somma Aree (F_k) = sommo aree elementari figura per figura

Altro modo di contare: ogni figura elementare conto quante volte viene considerata.

Se ogni p.to del piano sta in al + n figure, allora ogni figura elementare conta al massimo n volte, quindi

$$\text{Somma Aree}(F_k) \leq n \cdot \text{somma Aree}\underbrace{(\text{fig. elem.})}_{\text{sono disgiunte.}}$$
$$\leq n \cdot \text{Area } G$$



Esempio 1 Convergenza di serie

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} = S_{a,n}$$

Per quali valori di a esiste una costante M t.c.

$$S_{a,n} \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risposta: se e solo se $a > 1$

Abbastanza facile: per $a = 1$ non è limitata, dunque non lo è nemmeno per $a \leq 1$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{\dots}$$

$\boxed{a=2}$ Dico che $\quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2$

Per induzione così non funziona. Provo a dim. una cosa più difficile

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Provo per induzione: $n=1$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{Hp induttiva}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{spero}}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$$

Speranza $\iff \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

$$\iff \frac{1+n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} \iff (n+2)n \leq (n+1)^2$$

Ok, fortuna!

Cosa succede per $a \in (1,2)$? Provo per induzione a dim. che

$$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\dots+\frac{1}{n^a} \le A-\frac{B}{n^{a-1}}$$

$\boxed{n=1}$ Basta $A-B \ge 1$

$\boxed{\text{P.I.}}$ $$1+\dots+\frac{1}{n^a}+\frac{1}{(n+1)^a} \le \cancel{A}-\frac{B}{n^{a-1}}+\frac{1}{(n+1)^a} \overset{\text{Hope}}{\le} \cancel{A}-\frac{B}{(n+1)^{a-1}}$$

Speranza $\iff$ $$B\left(\frac{1}{n^{a-1}}-\frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right) \ge \frac{1}{(n+1)^a}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^{a-1}}{n^{a-1}}-1\right) \ge \frac{1}{n+1}\frac{1}{B}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a-1}-1 \ge \frac{1}{B}\frac{1}{n+1}$$

$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \ge 1+\frac{a-1}{n} \ge 1+\frac{a-1}{n+1}$$

Quindi OK pur di prendere $B=\frac{1}{a-1}$ e A di conseguenza.

— o — o —

$\boxed{\text{IMO 1991 - 6}}$ Sia $a>1$. Mostrare che esiste una successione $x_0, x_1, x_2, \dots$ limitata tale che

$$|x_i-x_j| \ge \frac{1}{|i-j|^a} \quad \text{per ogni } i \ne j.$$

Prendo x_1 dove mi pare. Quali vincoli ho?

Gli altri $|x_i-x_1| \ge \frac{1}{|i-1|^a}$

Prendo x_2 fuori dall'intervallo. Quali vincoli ho?

Supponiamo di aver scelto $x_1, \dots, x_k$. Dove non posso prendere x_{k+1}? Non può stare:

* a distanza 1 da x_k
* a distanza $\frac{1}{2^a}$ da x_{k-1}
* a distanza $\frac{1}{3^a}$ da x_{k-2}

⋮

L'unione degli intervalli esclusi ha area

$$2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{k^a} \right)$$

Costruzione: prendo un intervallone di area > 2. somma serie

Ad ogni passaggio, la somma delle aree escluse è minore dell'area dell'intervallo, quindi c'è sempre almeno 1 p.to buono.

— o — o —

<u>Esempio 3</u> Frazioni egizie: $\frac{1}{n}$ (numeratore = 1)

Problema classico: ogni razionale > 0 è somma di frazioni egizie (in modo non unico) distinte.

Non solo: se ho iniziato una scrittura di un certo $q \in \mathbb{Q}$, e sono ancora sotto, posso completarla.

Idea: mettere ad ogni passaggio la frazione più grande che ci sta. Quello che succede è che ad ogni passaggio il numeratore SCENDE!

Supponiamo che rimanga da fare $\frac{p}{q}$. Voglio usare un certo $\frac{1}{m}$. Chi sarà il resto nuovo?

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{m} = \frac{mp - q}{mq}$$

Voglio $mp - q \geq 0$ $\quad m \geq \frac{q}{p}$

Voglio $mp - q < p \iff (m-1)p < q \iff m < \frac{q}{p} + 1$

Quindi prendo $m = \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$

Devo verificare che questa procedura produce n nuovi di volta in volta.

$\boxed{\text{RMM 2009 - 4}}$

$X \subseteq \mathbb{N}$ t.c. $\sum_{x \in X} \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \exists\, Y \supseteq X$, $Y \subseteq \mathbb{N}$ t.c.

$$\sum_{y \in Y} \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$$

— o — o —

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{12} + \dots$