SENIOR 2012 – Advanced – Algebra (Analisi)

Titolo nota 04/09/2012

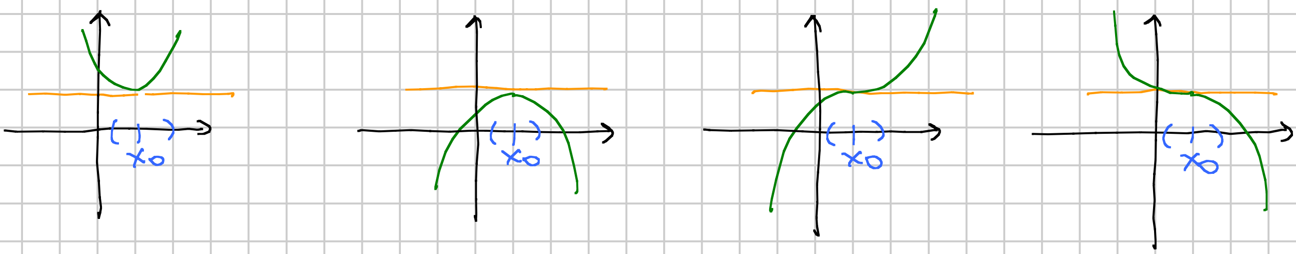
Cose da NON scrivere di analisi

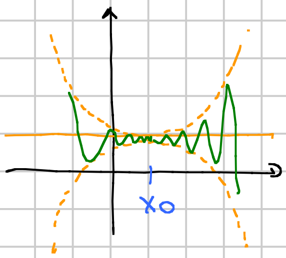
Data una funzione convessa, se c'è un p.to stazionario, quello è il minimo assoluto (in 1 variabile)

VERO! ($\boxed{\text{Non può essere un massimo quindi è un minimo}}$ locale, ma se è locale è globale)

x_0 P.to stazionario $\iff f'(x_0) = 0$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

In un p.to stazionario ci sono 5 possibilità





$x_0 = 0$. Se $|f(x)| \le x^2$

gratis: $f(x)$ è continua e derivabile in $x=0$ e

$f(0) = f'(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$\boxed{-\frac{h^2}{\cancel{h}}} \le \frac{f(h)}{h} \le \boxed{\frac{h^2}{\cancel{h}}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

se $h > 0$

(se $h < 0$ devo invertire i versi)

Fatto generale: se
$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) \le f(x) \le g_2(x) \\ g_1(x_0) = g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, f'(x_0) = g_1'(x_0) = g_2'(x_0)$$

[Ex]

Comportamento 5 in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ se $x = 0$ (fatto con rapporto incrementale)

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

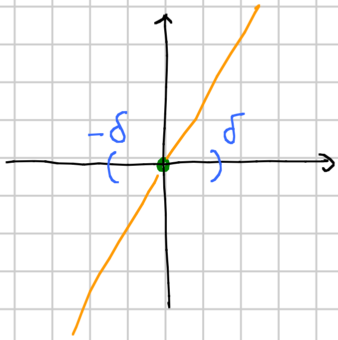
f' non è continua in $x = 0$.

Se prendo $x^4 \sin\frac{1}{x}$ ho la derivata continua in $x = 0$.

— o — o —

STRANEZZA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(0) = 2012$ $\qquad f(0) = 0$



$$\boxed{\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > 0 \ \forall x \in (0, \delta], \quad f(x) < 0 \ \forall x \in [-\delta, 0)}$$

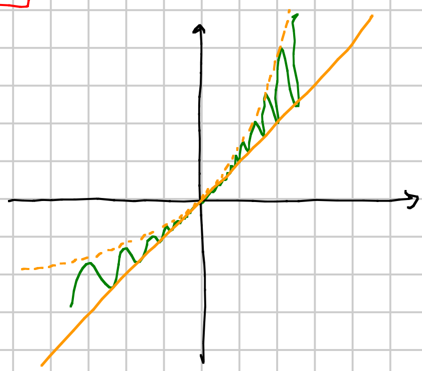
VERO

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2012$$

Quindi $\frac{f(h)}{h} > 0$ per h "vicini a 0"

$$\boxed{\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \text{ è monotona in } [-\delta, \delta]}$$

FALSA !!!



$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} + 2012x$$

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + 2012}_{>0 \text{ per } x \text{ vicini a } 0}$$

$f(x) = 3000\, x^2 \sin\frac{1}{x} + 2012x$ va bene.

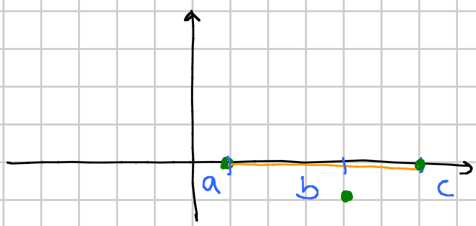
$f'(x)$ non ha segno costante in $(-\delta, \delta)$ per ogni $\delta > 0$.

— o — o —

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa $\qquad f(x) = 0$ quante soluzioni può avere?

→ 0
→ 1
→ 2

} se è strett. convessa non ci sono altre possibilità



Se è convessa ma non strettamente, allora le soluzioni possono essere ∞.
Se a, b, c sono soluzioni, allora tutto $[a, b]$ è soluzione.

— o — o —

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa $\quad f(x) = ax+b \quad$ quante soluzioni ?

Come prima $\quad \underbrace{f(x) - ax - b}_{\text{convessa}} = 0$

$f(x) = g(x)$ con f e g convesse può avere ∞ soluzioni anche se la convessità è stretta e non ci sono tratti in comune.

$f(x) = 30x^2$

$g(x) = 30x^2 + \sin x$

$g'(x) = 60x + \cos x$

$g''(x) = 60 - \sin x > 0$

—o—o—o—

$\boxed{\text{TI 2012 - n° 1}}$ Trovare + piccolo k t.c. $x^3 + y^5 + k \geq xy \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$

$x^3 + y^5 - xy \geq -k$

Basta prendere $-k = \min \{ \underbrace{x^3 + y^5 - xy}_{f(x,y)} : x \geq 0, y \geq 0 \}$

$f_x = 3x^2 - y = 0 \qquad y = 3x^2$

$f_y = 5y^4 - x = 0 \qquad 5 \cdot 3^4 x^8 - x = 0 \qquad x = 0 \rightsquigarrow y = 0$

$x^7 = \frac{1}{5 \cdot 3^4} \rightsquigarrow \begin{matrix} x = \dots \\ y = \dots \end{matrix}$

sostituisco

P.ti stazionari sono 2: $(0,0)$ e $(\underset{\text{pos.}}{\dots}, \underset{\text{pos.}}{\dots})$

Sostituisco in $f(x,y)$ e trovo il minimo.

—o—o—

$\boxed{\text{Ricettina per max / min}}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \{ f(x) : x \in A \}$

Teo. WEIERSTRASS $\boxed{\text{Se}}$ f è continua

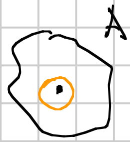
A è compatto (limitato (contenuto in palla gigante)

+ chiuso (contiene il bordo))

Allora max e min esistono.

Achtung! Possono esistere anche se mancano le ipotesi.

Dove si possono trovare i p.ti di max / min ?



→ p.ti $\underbrace{\text{stazionari}}$ interni ad A

↳ derivate (parziali) $= 0$

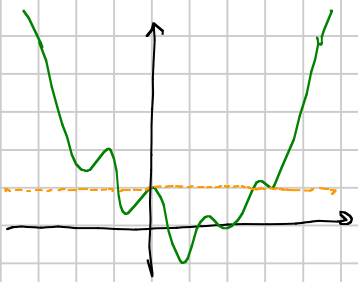
→ p.ti interni ad A dove qualche derivata parziale non esiste

→ bordo di A

Se $n=1$, $A=[a,b]$ il bordo sono $x=a$ e $x=b$.

Nell'esempio $A=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ non è compatto, perché manca la limitatezza.

WEIERSTRASS GENERALIZZATO $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\exists \min\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}$

"Dim" considero $\{x\in\mathbb{R} : f(x)\leq f(0)\}$

Questo insieme è compatto ed il minimo si gioca in questo insieme

$\boxed{\text{W. G.}}$ $\quad A\subseteq\mathbb{R}^n \quad f:A\to\mathbb{R}$ continua

$\exists M\in\mathbb{R}$ t.c. $\{x\in A : f(x)\leq M\}$ è compatto e $\neq\emptyset$.

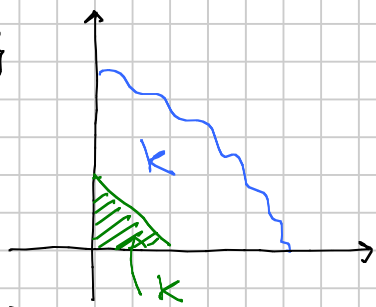
Allora esiste $\min\{f(x) : x\in A\}$.

Dim. La battaglia per il min si gioca qui

—o—o—

Nell'esempio $\quad \min\{x^3+y^5-xy : x\geq 0, y\geq 0\}$

Basta trovare un $K\subseteq A$ t.c. $f(x)>0 \ \forall x\in A\setminus K$



Federico: Se $x+y\geq 100$, allora $x^3+y^5-xy>0$

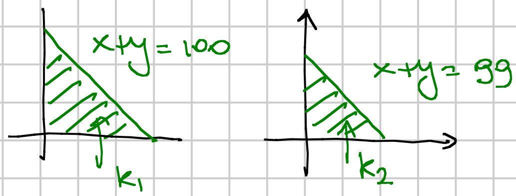
Se $x\geq y$, allora $x^3+\underbrace{y^5}_{\geq 0}-xy \geq x^3-x^2 = x^2(x-1)>0$

Se $y\geq x$ è simile

Trovato K → min esiste → interno staz → Fatto
" sing → $\emptyset$
" bordo → $\triangle$

I lati | e — si controllano mettendo $x=0$ oppure $y=0$

Il lato \ si può controllare ...



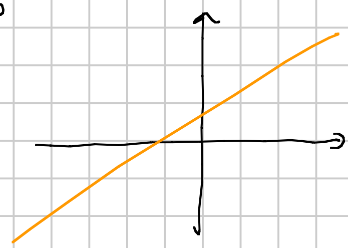
P.ti di min ci sono in K_1 e K_2, quindi non abbiamo bisogno di quelli con $x+y = 100$

— o — o —

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Per ogni retta, il limite di $f(x,y)$ dalle 2 parti è $+\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, ax+b) = +\infty$$

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(a, y) = +\infty$$



Possiamo concludere che $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, cioè che

$\forall M$ l'insieme $\{(x,y) : f(x,y) \leq M\}$ è limitato?

NO!!! $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2012\, x y^2$ verifica i limiti MA

$$f(t^2, t) = -2010\, t^4$$