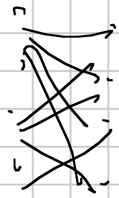
SENIOR 2012 — COMB. Advanced

Titolo nota 04/09/2012

Problema: Quanti archi può avere al massimo un grafo senza triangoli?

Esempio: grafo bipartito

n° vertici $= 2n$ $\qquad n+n \qquad K_{n,n}$



$\Downarrow$

m $\qquad \#$ archi $= n^2$

n° vertici $= 2n+1$ $\qquad (n+1)+n$

$\#$ archi $= n^2+n$

In ogni caso $\left[\frac{m^2}{4}\right]$

__Teorema__ $\quad$ N° ARCHI $\leq \frac{1}{4}m^2$

__Dim.__ Vertici $v_1, \dots, v_m$

$\downarrow$

pesi $x_1, \dots, x_m$ $\qquad x_i \geq 0$, $\quad \sum x_i = 1$.

Analizzo $S = \sum x_i x_j$

(somma fatta solo sulle coppie di vertici uniti da un arco)

Qual è il massimo di S?

v_k, v_l <u>non</u> uniti

a, b $\qquad a \geq b$

a, b: peso totale dei vertici collegati a v_k, v_l.

$$(x_k+\varepsilon)a + (x_l-\varepsilon)b = x_k a + x_l b + \varepsilon(a-b)$$

Posso spostare tutto il peso di v_l su v_k.

Sottografo completo $\rightarrow$ due vertici.

$$S = x_1 x_2 \leq 1/4$$

D'altra parte se $x_i = \frac{1}{m}$ $\forall i$.

$$S = \frac{1}{m^2}|E| \le \frac{1}{4} \qquad \square$$

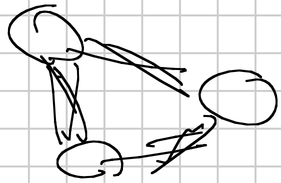
Generalizzazione: grafi che non contengono K^p (sottografi completi su p vertici).

$$m = t(p-1)+r \qquad 1 \le r \le p-1$$

Divido l'insieme dei vertici in $p-1$ parti pressoché uguali.

r parti con $t+1$ vertici

$p-1-r$ parti con t vertici.



Vengono fuori un n° di archi

$$M(m,p) = \frac{p-2}{2(p-1)}\, m^2 - \frac{r(p-1-r)}{2(p-1)}.$$

Per dimostrare che è ottimale, induzione su t.

$t=0 \qquad 1 \le m \le p-1 \qquad m=r$

$$M(m,p) = \binom{m}{2}.$$

$t>0 \qquad m \ge p.$

Consideriamo un grafo G con m vertici, nessun K^p e con n° di archi massimale.

Se aggiungo un arco, viene fuori un K^p

In particolare G contiene un $K^{p-1} \to H$

Neanche i restanti vertici $(m-p+1)$ contengono un sottografo K^p.

$$m-p+1 = (t-1)(p-1)+r$$

N° archi di $G \le M(m-p+1,p) + \binom{p-1}{2} + (\ldots\quad)$

Ognuno dei vertici a destra può essere collegato con al più $p-2$ vertici di H

$(\quad) \leq (n-p+1)(p-2)$

Sommando, viene $T(n,p)$.

——— ∘ ———

Problema: G ha n vertici ed e archi.

Dimostrare che G ha $\geq \frac{1}{3}\left(\frac{4e^2}{n} - en\right)$ triangoli.

Sol. $\alpha = (x,y)$ un arco.

$\deg(x) \quad \deg(y)$

n° dei triangoli con un lato $\alpha \geq \deg(x) + \deg(y) - n$.

x. $\quad A_x \to$ ins vertici collegati a x

y. $\quad A_y \to$ ins " " " y

$|A_x \cap A_y| = ?$

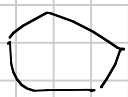
$$|A_x \cap A_y| + \underbrace{|A_x \cup A_y|}_{\leq n} = |A_x| + |A_y|$$

Sommo rispetto agli archi.

$$\underbrace{3T}_{\text{n° triangoli}} \geq \sum \deg(x)^2 - en \qquad \sum \deg(x) = 2e$$

$$\geq \left(\frac{2e}{n}\right)^2 n - en. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Girth}}$: minima lunghezza di un ciclo.



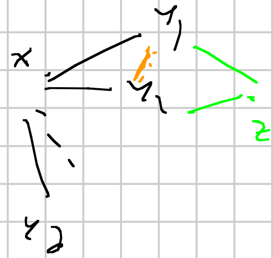
Teo. G con vertici ed e archi.

Se $e > \frac{1}{2} n \sqrt{n-1}$, allora girth$(G) \leq 4$.

<u>Dim.</u> (Assurdo) Supponiamo $\text{girth}(G) \geq 5$.

x vertice $\quad d = \deg(x)$

$y_1, \dots, y_d$ vertici collegati a x.



Non ci sono triangoli: gli y_i non sono collegati fra loro

Non ci sono quadrilateri: ogni vertice $v \neq x$ può essere collegato ad al più uno fra gli y_i.

$$(\deg(y_1) - 1) + \dots + (\deg(y_d) - 1) \leq n - d - 1.$$

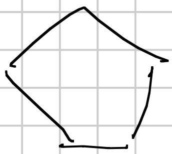
$$\sum_{i=1}^{d} \deg(y_i) \leq n - 1$$

$$\sum_{y \to x} \deg(y) \leq n - 1$$

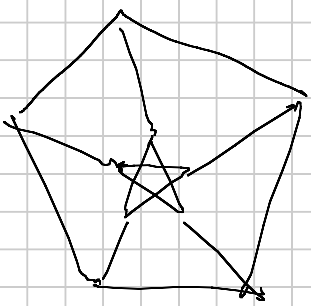
$$n(n-1) \geq \sum_x \sum_{y \to x} \deg(y) = \sum_y \sum_{x \to y} \deg(y)$$

$$= \sum_y (\deg(y))^2 \geq \frac{1}{n} (2e)^2$$

Esempi.



$n = 5$ $\quad e = 5$ $\qquad \frac{1}{2} n \sqrt{n-1} = 5.$



$n = 10$ $\quad e = 15$ $\qquad \frac{1}{2} n \sqrt{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15.$

$n = 50$? $\qquad n = 3250$?

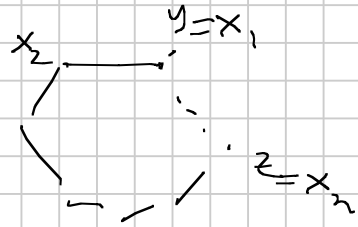
Se un grafo G con n vertici ha tutti i vertici di grado $\geq n/2$, allora contiene un ciclo hamiltoniano.

$m = \frac{n-1}{2}$: grafo bipartito $K_{m,m+1}$.

<u>DIM.</u> (Per assurdo). Supponiamo che G (con n vertici) soddisfi le ipotesi, non soddisfi la tesi, e abbia il maggior n° di archi possibile (Un arco in più crea un circuito hamiltoniano).

y, z vertici non adiacenti

$G + (yz)$ ha il ciclo ham.



C'è un cammino $x_1 x_2 \dots x_n$

$A = \{ i \mid y \text{ è adiacente a } x_{i+1} \} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$

$B = \{ i \mid z \text{ è adiacente a } x_i \} \subseteq \{2, \dots, n-1\}$

$A \cap B \neq \emptyset$ (per cardinalità)

$i_0 \in A \cap B$

Circuito hamiltoniano

$y = x_1, x_2, \dots, x_{i_0}, z = x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i_0+1}$

Ogni anticatena di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ ha al più $\binom{n}{[n/2]}$ elementi.

<u>Oss 1</u> Una catena massimale è fatta da $n+1$ insiemi. Ci sono esattamente $n!$ catene massimali.

<u>Oss 2</u> Sia $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ $|A| = k$

Le catene massimali in cui compare A sono esattamente

$k!\,(n-k)!$. Consideriamo $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ anticatena

$$\left\{ (A, C) \;\middle|\; A \in \mathcal{A},\ C \text{ catena massimale che contiene } A \right\} = X$$

$$x = |X|$$

<u>Oss. 3</u> Ogni catena massimale contiene al più un elemento di $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $x \leq n!$

Dividiamo gli elementi di $\mathcal{A}$ per cardinalità

α_k = n° di insiemi in $\mathcal{A}$ con cardinalità k.

<u>Oss. 4</u> $$x = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, k!\,(n-k)!$$

<u>3</u> + <u>4</u> $$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Per massimizzare la somma a sinistra mi conviene spostare tutti gli el. sul den. più alto possibile

$$= \binom{n}{[n/2]}$$

<u>Teorema di Menger</u>

(A) (Vertici) s, t vertici non adiacenti di G. Allora il minimo numero di vertici che separano s e t è uguale al massimo numero di cammini indipendenti da s a t.

(B) (Archi) s, t vertici distinti di G. Allora il minimo numero di archi che separano s e t è uguale al massimo numero di cammini edge-distinct da s a t.