SENIOR 2012 - COMBINATORIA AVANZATA

Titolo nota 04/09/2012

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{C}$

$$\operatorname{ogf}(a_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

$$\operatorname{egf}(a_n) = \operatorname{ogf}\left(\frac{a_n}{n!}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Sia $A(x) = \operatorname{egf}(a_n)$

$$D(A(x)) = A'(x) = ?$$

$$D\left(\operatorname{egf}(a_n)\right) = D\left(\operatorname{ogf}\left(\frac{a_n}{n!}\right)\right) = \operatorname{ogf}\left((n+1)\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \operatorname{ogf}\left(\frac{a_{n+1}}{n!}\right) = \operatorname{egf}(a_{n+1})$$

$$\int\left(\operatorname{ogf}(a_n)\right) = \operatorname{ogf}\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right) \qquad [x^0]\int \operatorname{ogf} = 0$$

<u>Esempio</u>

$$\operatorname{egf}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x = \operatorname{ogf}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$D(\exp(x)) = \exp(x)$$

$\exp(x) - 1$ ha termine noto $= 0$ e termine di 1° grado $\neq 0$

Chiamiamo $\log(1+x)$ la serie formale che verifica $\log(1 + (e^x - 1)) = e^{\log(1+x)} - 1 = x$

<u>FATTO</u> Se $A(x)$ e $B(x)$ sono due serie formali con $b_0 = 0$ possiamo calcolare $A(B(x))$

$$D(A(B(x))) = B'(x) \cdot A'(B(x))$$

Schema di dimostrazione

1) $A(x) = x^m$ $\quad B(x) = x^n$

2) $A(x) = x^m$ $\quad B(x)$ a piacere (induzione su m)

3) $A(x)$ a piacere e $B(x)$ a piacere

$$D(\exp(\log(1+x)) - 1) = 1$$

$F(x) = e^x - 1$

$G(x) = \log(1+x)$

$G'(x) = ?$ $\qquad F'(x) = e^x = F(x) + 1$

$$D\Big(F(G(x))\Big) = G'(x)\cdot F'\big(G(x)\big) =$$

$$= G'(x)\Big(F(G(x))+1\Big) =$$

$$= G'(x)\,(1+x) = 1$$

$$G'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1^{n})\, x^{n}$$

$$G(x) = \int \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n}}{n}$$

Nelle serie formali in 2 variabili x e y

$$e^{x}\cdot e^{y} = e^{x+y}$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n}}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{y^{n}}{n!}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x+y)^{n}}{n!}$$

$$[x^{a} y^{b}]\, LHS = \frac{1}{a!\cdot b!}$$

$$[x^{a} y^{b}]\, RHS = [x^{a} y^{b}]\, \frac{(x+y)^{a+b}}{(a+b)!} = \frac{\binom{a+b}{a}}{(a+b)!}$$

Corollario

$$\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$$

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di complessi
Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$

dimostrare che $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$

$A(x) = \text{egf}(a_n)$ $\qquad$ $B(x) = \text{egf}(b_n)$

$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} a_k$ $\qquad$ $\frac{b_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$

$B(x) = A(x) \cdot e^x$

$B(x) \cdot e^{-x} = A(x)$

$\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$ $\qquad$ $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$

Sia u_n il numero di permutazioni su n elementi di ordine 1 o 2.
Trovare $\text{egf}(u_n)$

$u_0 = 1$
$u_1 = 1$

Le permutazioni su $n+2$ el. di ordine 1 o 2 si dividono in 2 gruppi: quelle in cui $n+2$ è un punto fisso, e quelle in cui $n+2$ non è un punto fisso.

Le prime sono u_{n+1}

Le seconde sono $(n+1)\, u_n$

$$\forall n \geq 1 \qquad u_{n+1} = u_n + n \cdot u_{n-1}$$

$$\operatorname{egf}(u_{n+1}) = \operatorname{egf}(u_n) + \operatorname{egf}(n\, u_{n-1})$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & & & \| \\ U'(x) & = & U(x) & + & x\,U(x) \end{array}$$

$$\frac{U'(x)}{U(x)} = (1+x)$$

$$\|$$

$$D\Big(\log\big(1+(U(x)-1)\big)\Big) = (1+x)$$

$$\log\big(1+(U(x)-1)\big) = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right) \cancel{-1} = U(x) \cancel{-1}$$

Roots of unity Filter

Sia $A(x) = ogf(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Dato $k \geq 2$, vorremmo scrivere in qualche modo $\sum_{\substack{n=0 \\ k|n}}^{\infty} a_n x^n$

Siano $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = 1$ le radici k-esime dell'unità

$$A(\omega_1 x) + A(\omega_2 x) + \dots + A(\omega_k x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A(\omega_i x)}_{= B(x)}$$

Se $k | n$

$$[x^n] B(x) = \sum_{i=1}^{k} [x^n] A(\omega_i x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_n \omega_i^n = k \cdot a_n$$

Se $k \nmid n$ Sia $d < k$ il m.c.d (k, n) $n = \alpha \cdot d$, $k = \beta \cdot d$

$$[x^n] = a_n \sum_{i=1}^{k} \omega_i^n = a_n \sum_{i=1}^{k} (\omega_i^d)^\alpha = a_n \cdot d \cdot \sum_{i=1}^{\beta} (\varepsilon_i)^\alpha = *$$

ω_i è radice k-esima $\Leftarrow$ ω_i^d è radice β-esima

ε_i sono le radici β-esime dell'unità

$(\alpha, \beta) = 1$ elevare alla α è una permutazione delle radici β-esime

$$\cancel{x} = \sigma_n \cdot d \cdot \sum_{i=1}^{\beta} \varepsilon_i = 0$$

$$\left[x^{\beta-1}\right]\left(x^{\beta} - 1\right) = 0$$

Ciò che cerchiamo è allora $\frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{K} A(w_i\, x)\right)$

<u>Es.</u> Calcolare $\sum_{k=0}^{503} \binom{2012}{4k}$

$$(1+x)^{2012} = \sum_{k=0}^{2012} \binom{2012}{k} x^k = P(x)$$

$$\frac{P(x) + P(ix) + P(-x) + P(-ix)}{4} = \sum_{k=0}^{503} \binom{2012}{4k} x^{4k}$$

dobbiamo calcolare

$$\frac{(1+1)^{2012} + (1+i)^{2012} + \cancel{(1-1)^{2012}} + (1-i)^{2012}}{4} =$$

$$= 2^{2010} + \frac{1}{2}(-4)^{503} = 2^{2010} - 2^{1005}$$

Infatti

$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

x CASA IMO 6 1995

SNAKE OIL METHOD

Calcolare $\sum_{i=0}^{n} \text{mostro}(n,i) = a_n$

$$\text{ogf}(a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \text{mostro}(n,i) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 0\le i\le n}} \text{mostro}(n,i)\, x^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{n=i}^{\infty} \text{mostro}(n,i)\, x^n$$

$$\|$$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \sum_{n=0}^{\infty} \text{mostro}(n+i, i)\, x^n$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$

Quanto vale $f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+k-i-1}{k-i}$?

$$\text{ogf}(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^k \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\le k}} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge i}} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} x^k =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{h\in\mathbb{N}} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+h-1}{h} x^{h+i} \right) =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left((-x)^i \binom{n}{i} \cdot \underline{\sum_{h\in\mathbb{N}} \binom{n+h-1}{h} x^h} \right) =$$

$$\left(\sum_{h\in\mathbb{N}} \binom{n+h-1}{n-1} x^h \right) \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i \binom{n}{i} x^i \right) =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^n} \quad (1-x)^n = 1$$

ESERCIZIO $\quad \forall k \geq 1 \ \exists \, p_k(n)$ polinomio

$$\text{t.c. } \sum_{i=0}^{n} i^k = p_k(n)$$

$$\frac{1}{1-x} \sum_{i\in\mathbb{N}} i^k x^i = xD \left(\Sigma \, i^{k-1} x^i \right) = (xD)^k \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot (xD)^k \left(\frac{1}{1-x} \right) \text{ è della forma } \frac{q(x)}{(1-x)^M} =$$

$$= q(x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{M+i-1}{M-1} x^i \quad \text{da qui concludere.}$$

LINGUAGGI

Sia Σ un insieme finito di simboli, caratteri, che chiamiamo alfabeto.

Una parola o stringa è un elemento di

$$\{\varepsilon\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Sigma^n = \Sigma^*$$

ove ε è la stringa vuota

Un linguaggio è un sottoinsieme $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$

AUTOMA A STATI FINITI (DETERMINISTICO) Un automa è formalmente una quintupla di questo tipo

$$(Q, q_0, \delta, F, \Sigma)$$

Q è un insieme finito di elementi detti stati

$q_0 \in Q$ è uno stato detto iniziale

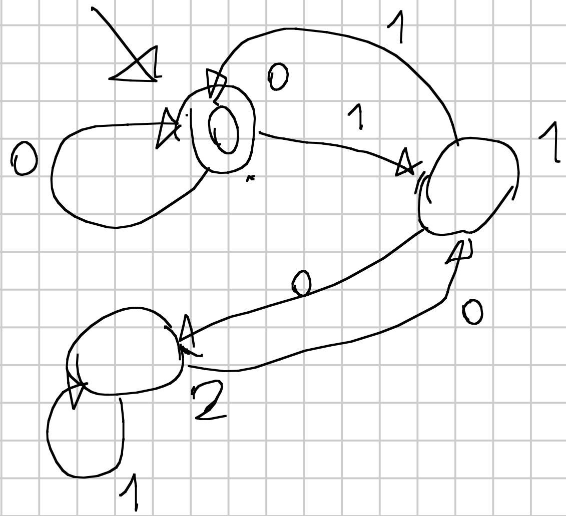
Σ è un alfabeto

$F \subseteq Q$ è un sottoinsieme di Q di alcuni stati detti finali

$\delta : (Q \times \Sigma) \to Q$ è una funzione detta mappa di transizione

$\Sigma = \{0, 1\}$ $\quad q_0 = 0 \quad$ $F = \{0\}$

$Q = \{0, 1, 2\}$



0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0

0 0 1 2 1 2 2 2 1 0 1 2

Un linguaggio regolare è un linguaggio per il quale esiste un automa che riconosca tutte e sole le parole del linguaggio.

Sia $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0, 1\}^*$

esiste un automa che riconosce $\mathcal{L}$? NO

PUMPING LEMMA

Se un linguaggio $\mathcal{L}$ è regolare, allora esiste un $K \in \mathbb{N}$ tale che ogni stringa S di lunghezza $\geq K$ si possa scomporre come xyz con

$|xy| \leq K$, $|y| > 0$ e $\forall h \in \mathbb{N}$

anche $xy^h z \in L$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo un automa che riconosca L.

Sia $K = |Q|$. Allora se una stringa ha lunghezza $l > K$, la sequenza degli stati visitati dall'automa $q_0, q_1, \dots, q_{l-1}$ deve avere almeno una ripetizione nei primi $K+1$ elem. della sequenza

Supponiamo che $q_b = q_c$ con $b < c \leq K$

Sia x la stringa per andare da q_0 a q_b, y per andare da q_b a $q_c = q_b$ e z da q_c a q_{l-1}

$|xy| = c \leq K$ $\qquad |y| = c - b > 0$

e $xy^h z$ è riconosciuta dall'automa

Se $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ fosse regolare, esisterebbe K con la proprietà del pumping lemma.

$0^{K+1} 1^{K+1} = \underbrace{x y}_{\text{sono tutti } 0} z$ $\qquad xy^h z$ dovrebbe contenere tanti 0 quanti 1 $\forall h \in \mathbb{N}$ assurdo perché $|y| > 0$

ESPRESSIONI REGOLARI

Diamo una definizione ricorsiva di cosa è un'espressione regolare.

Abbiamo sempre un alfabeto Σ. • $\emptyset$ è un'espr. regolare

(• ϵ è un'espressione regolare)

• Se $s \in \Sigma$, s è un'espressione regolare

Ragioniamo con $\Sigma = \{a, b\}$

"a" e "b" sono espressioni regolari

• Se x e y sono espr. reg. anche

$(x)+(y)$ lo è   es. "$(a)+(b)$" è regolare

$(\sim)+(\sim)$

• Se $\sim$ è regolare anche $(\sim)$ lo è

• Se $\sim$ e $\sim\sim$ sono es. regolari

anche $(\sim)\cdot(\sim\sim)$ lo è

es. $((a)+(b))\cdot(a)$

• Se $\sim\sim$ è regolare, anche $(\sim\sim)^*$ lo è

Come tradurre un'espressione regolare in un linguaggio $\mathcal{L}$? Definiamo la mappa τ che a un'espr. regolare associa un linguaggio

$\emptyset \xmapsto{\tau} \emptyset$

$(\epsilon \xmapsto{\tau} \{\varepsilon\})$

"a" $\xmapsto{t} \{a\}$

$$(x) + (y) \xmapsto{\tau} \tau(x) \cup \tau(y)$$

$$(x) \cdot (y) \longmapsto \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in \tau(x),\ s_2 \in \tau(y)\}$$

es. $\tau(x) = \tau((x) \cdot \epsilon)$

$$\tau((x) \cdot (\emptyset)) = \emptyset$$

$$(x)^* \xmapsto{\tau} \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \tau(\underbrace{(x) \cdot (x) \cdot \ldots \cdot (x)}_{n \text{ volte}})$$

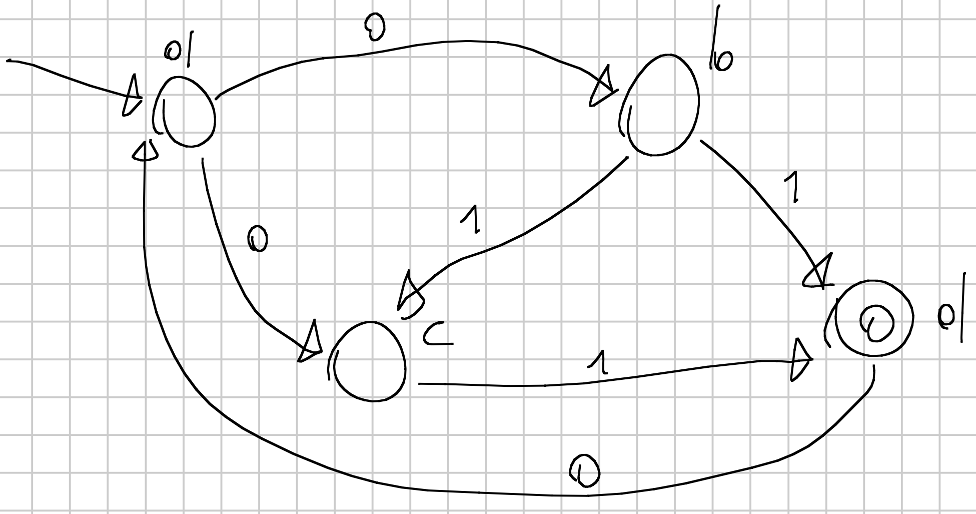
$$\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = (a)^*$$

$$\tau(\epsilon) = \tau((\emptyset)^*)$$

AUTOMA NON DETERMINISTICO

Come prima abbiamo Q, q_0, Σ, F

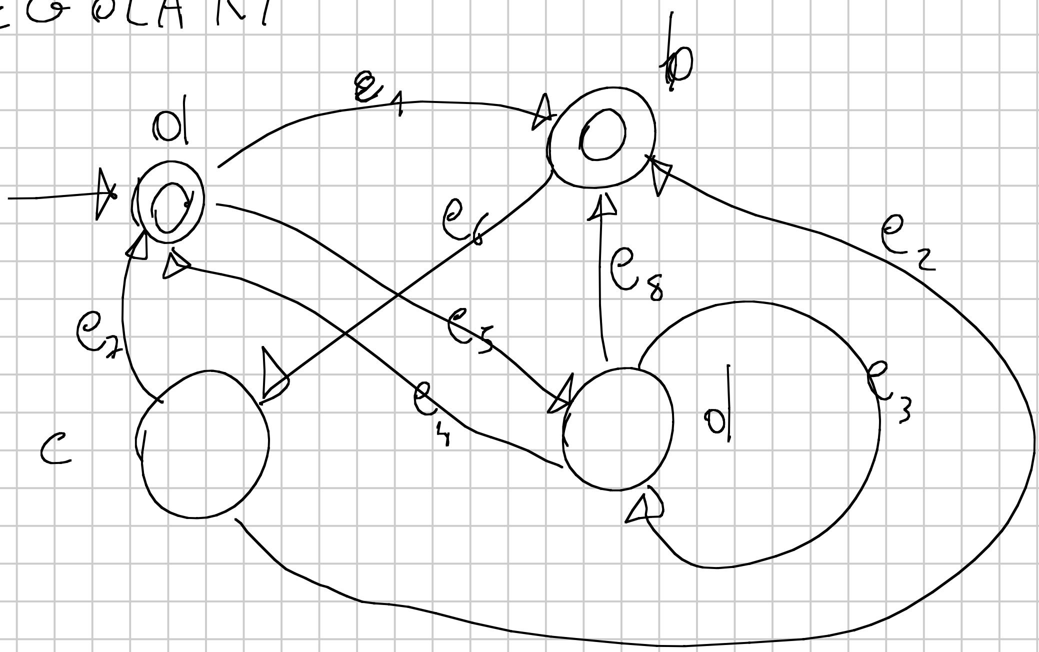
ma $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$



0 1 1 0 1

$$\{a\} \xrightarrow{0} \{b, c\} \xrightarrow{1} \{c, d\} \xrightarrow{0} \{a\} \xrightarrow{1} \emptyset$$

AUTOMA NON DETERMINISTICO CON TRANSIZIONI DATE DA ESPRESSIONI REGOLARI



Stavolta ho un po' di frecce che sono segnate con delle espressioni regolari.
Comunico all'automa una stringa s in Σ^*
e chiede se l'automa si trova in almeno uno stato finale.
L'automa procede in questo modo

1) Divide s in una sequenza di stringhe

$$s_1 \, s_2 \, \ldots \, s_k \quad \text{per qualche } k \geq 1$$

2) Usa le s_i come se fossero lettere, dunque

se a un certo punto si trova nello stato q e legge la sottostringa S_i, controlla se $S_i \in e_j$ per qualche arco segnato da e_j che esce da q e arriva all'altro capo dell'arco.
Ragiona così per ogni stato q in cui si trova

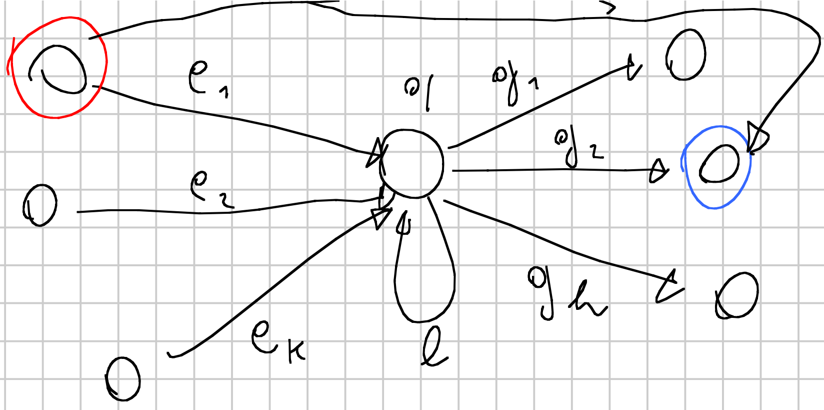
3) Se alla fine si trova in almeno uno stato finale, allora ne deduce che la suddivisione di S in $S_1 \ldots S_k$ è buona

4) Se S ammette una suddivisione buona, l'automa accetta S.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio riconosciuto da un automa siffatto.
Sia q_0 lo stato iniziale e F l'insieme di stati finali; se $\forall f \in F$ trovo un'espressione regolare e_f che funziona per l'automa modificato in cui l'unico stato finale sia f, ho vinto

$$\left(\cdots \left(\left(\left(e_{f_1} \right) + e_{f_2} \right) + e_{f_3} \right) + \cdots \right) + e_{f_{|F|}}$$

Posso supporre che ci sia un solo st. fin f.
Sia q uno stato con $q \neq q_0$ e f



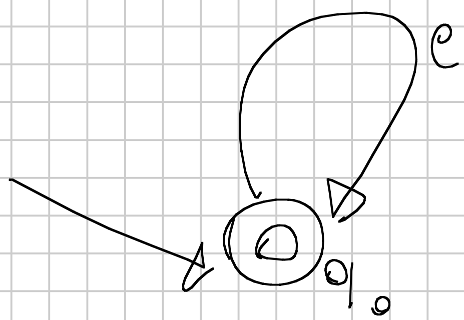
$(e_1)\cdot(l)^*(g_2)$

aggiungiamo nuove frecce e togliamo q

Rimangono 2 casi 1) $q_0 = F$ è l'unico stato

2) $q_0 \neq F$ sono gli unici due stati

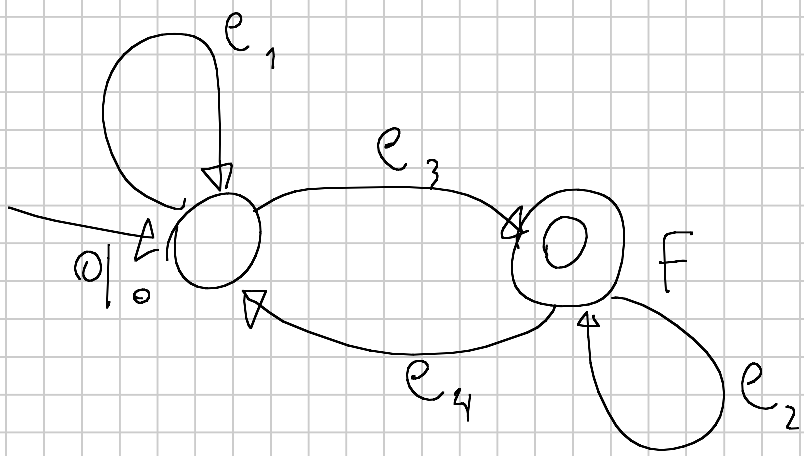
1)



l'automa accetta

$(e)^*$

2)



$$(e_1)^* \cdot (e_3) \cdot \left((e_2)^* \cdot (e_4) \cdot (e_1)^* \cdot (e_3) \right)^*$$

X CASA: DIMOSTRARE CHE OGNI ESPR. REGOLARE AMMETTE UN AUTOMA NON DETERMINISTICO (E QUINDI ANCHE UNO DETERMINISTICO

PROBLEMA

Sia L un linguaggio regolare di cui si conosce un'espressione regolare o un automa che lo riconosca.

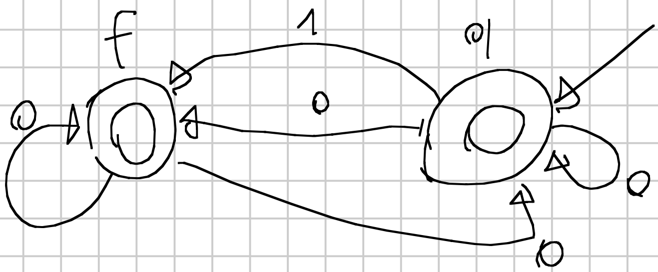
Quante stringhe di lunghezza n contiene L?

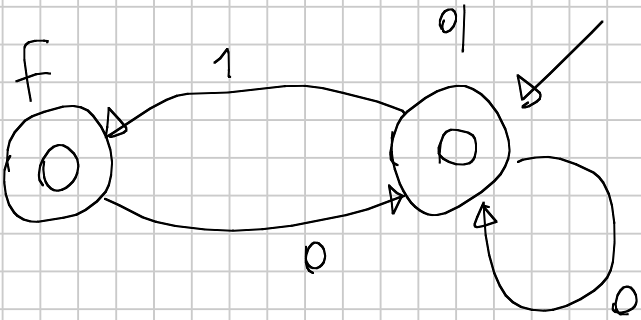
Sia l_n la risposta.

Che proprietà ha $L(x) = ogf(l_n)$?

<u>Esempio semplice</u> Fibonacci

$\Sigma = \{0,1\}$





Se F è l'unico finale $\qquad$ Se q è l'unico stato finale

$$\left(0^* 1 (0 0^* 1)^*\right) + \left(0^* (1 0 0^*)^*\right)$$