SENIOR 2012 - COMBINATORIA AVANZATA 2

Titolo nota 06/09/2012

MINIMIZZAZIONE DI UN AUTOMA

Sia L un linguaggio regolare e A un automa deterministico per A

$$A = (Q, q_0, \delta, F, \Sigma)$$

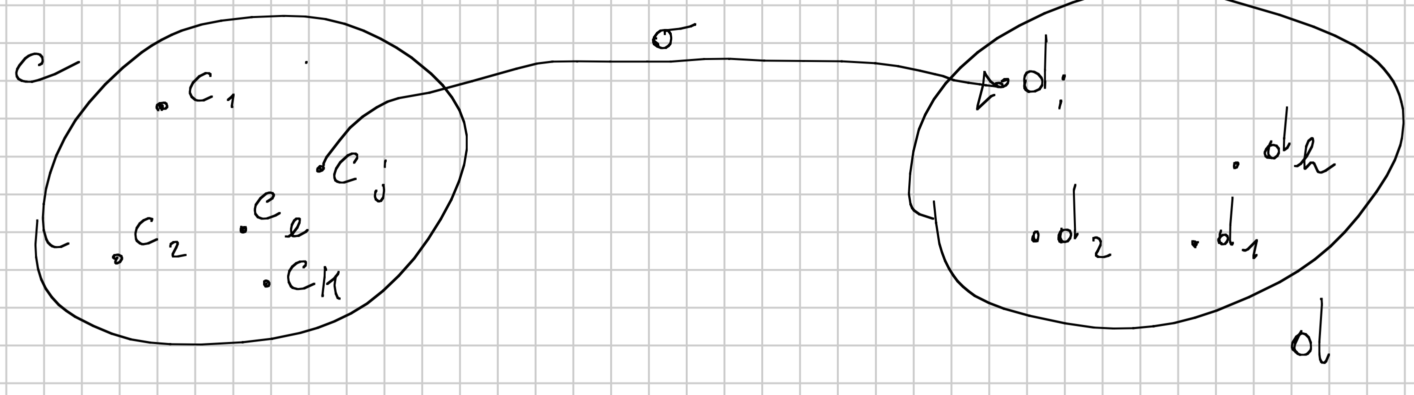
Dimentichiamo per un attimo qual è lo stato iniziale

Definiamo una relazione di equivalenza su Q

Dati $p, q \in Q$ diciamo che $p \sim q$ se e solo se le stringhe accettate dall'automa scegliendo p come stato iniziale sono tutte e sole quelle accettate se q è lo stato iniziale.

Allora possiamo quozientare Q rispetto a $\sim$.

Siano C e D due classi di equivalenza



$|C| = k$

$|D| = h$

Prendiamo due stati $c_j \in C$ e $d_i \in D$ per cui esiste una transizione da c_j a d_i mediante la lettera $\sigma \in \Sigma$

Allora $\forall c_e \in C \quad \delta(c_e, \sigma) \in d$.

Infatti $c_e \sim c_j$

se per assurdo $\delta(c_e, \sigma) \not\sim \delta(c_j, \sigma)$

allora esiste una stringa s che viene accettata da uno tra $\delta(c_e, \sigma)$ e $\delta(c_j, \sigma)$ e non dall'altro

Allora σs è accettato a partire da uno tra c_e e c_j e non a partire dall'altro.

Esiste allora una funzione $\hat{\delta}$ che ad ogni classe accoppiata con un simbolo associa un'altra classe, costruita canonicamente a partire da δ.

Cerchiamo di creare un automa A' sulle classi di equivalenza.

$$Q' = \{ [q]_\sim \mid q \in Q \}$$

$$q_0' = [q_0]_\sim$$

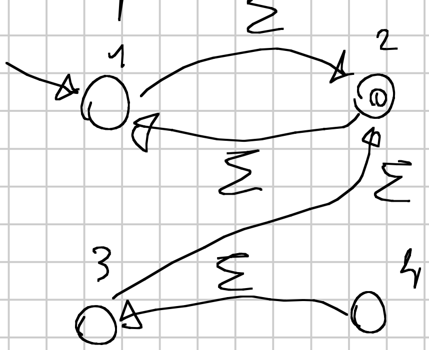
$$\delta' = \hat{\delta} \quad \text{come già definita}$$

$$F' = \{ [f]_\sim \mid f \in F \}$$

OSS. Se $f \sim q$ con $f \in F$ allora dato che a partire da f l'automa accetta ε, anche a partire da q l'automa accetta ε, da cui $q \in F$

I due automi sono equivalenti: se una stringa s è accettata da A, allora con s, a partire da q_0, l'automa giunge in uno stato finale F; analogamente in A' a partire da $[q_0]_\sim$ si giunge in $[F]_\sim$. Viceversa se partendo da q_0' si arriva in F', nell'automa originale si arriva in qualche $F \in F'$.

Esempio



In questo automa lo stato 4 è inutile

Non si può fare di meglio, se non eliminando fin da subito stati irraggiungibili.

Sia A' come definito sopra e supponiamo per assurdo che esista un automa A'' che riconosce $\mathcal{L}$, con

$$|Q''| < |Q'|$$

Se A' e A'' riconoscono $\mathcal{L}$, nella loro "unione"

q_0' e q_0'' sono equivalenti.

Sia q_i' uno stato di A' e sia s_i una stringa tale che $\bar{\delta}(q_0', s_i) = q_i'$ ove $\bar{\delta}$ è - - - -

$$\bar{\delta}(q_0'', s_i) \in Q''$$

$$\sim q_i' = \bar{\delta}(q_0', s_i)$$

Quindi ogni q_i' è equivalente a qualche $q_j'' \in Q''$

Per pigeonhole esistono q_i' e $q_j' \in Q'$ con

$q_i' \sim q_j'$, assurdo perché sono classi di equivalenza disgiunte.

PROBLEMA

Dato un linguaggio regolare $\mathcal{L}$ riconosciuto da un automa det. A (wlog minimo)

Quanto vale l_n = n° di parole in $\mathcal{L}$ di lunghezza n?

Una espressione regolare (e più in generale una grammatica, cioè una costruzione di un linguaggio attraverso operazione elementari) si dice ambigua se esiste una stringa s ottenibile in almeno due modi sostanzialmente diversi

Usiamo sempre $\Sigma = \{a, b\}$

Es. 1 $\mathcal{L} = \{(a)\}$ per $\mathcal{L}$ abbiamo varie esp. regolari

- (a) non è ambigua
- $(a) \cdot (\varepsilon)$ non è ambigua

Es. 2 $\mathcal{L} = \Sigma^*$ l'insieme di tutte le stringhe

- $((a)+(b))^*$ non è ambigua
- $((a)+(b))^* \cdot ((a)+(b))^*$ è ambigua

In generale le esp. regolari non ambigue si costruiscono ricorsivamente con

- $\emptyset$ non è ambigua
- ε non è ambigua
- $\forall \sigma \in \Sigma$, (σ) non è ambigua

Date e_1 e e_2 esp. regolari non ambigue

- $(e_1)+(e_2)$ non è ambigua se $\tau(e_1) \cap \tau(e_2) = \emptyset$
- $(e_1)\cdot(e_2)$ non è ambigua se nessuna stringa S si può ottenere in due modi diversi come $S_1 S_2$ con $S_1 \in \tau(e_1)$ e $S_2 \in \tau(e_2)$
- $(e_1)^*$ non è ambigua se nessuna // S // // // come concatenazione

di stringhe di e_1

<u>OSS.</u> Se $(e_1)^*$ non è ambigua, allora $\varepsilon \notin \tau(e_1)$

Passiamo alle ogf. Sia $L(x) = \text{ogf}(\ell_n)$.
Vogliamo trovare $L(x)$.

Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia rappresentato dall'esp. reg. non ambigua e. Tale espressione si ottiene in qualche modo, attraverso le operazioni $+$, $\cdot$, $*$ e se volete $(\ )$, a partire dalle esp. reg. non amb. atomiche $\emptyset$, ϵ, $(\sigma) \in \Sigma$, coinvolgendo di volta in volta esp. reg. non ambigue.
Allo stesso modo $L(x)$ si ottiene dalle ogf di $\emptyset$, ϵ, $(\sigma) \in \Sigma$ attraverso operazioni algebriche.

Sia $L_e(x)$ l'ogf relativa al linguaggio generato da e

- $L_\emptyset(x) = 0$
- $L_\epsilon(x) = 1$
- $L_\sigma(x) = x$
- $L_{(e)}(x) = L_e(x)$
- $L_{(e_1)+(e_2)}(x) = L_{e_1}(x) + L_{e_2}(x)$ (se $(e_1)+(e_2)$ non è ambigua come stiamo sempre supponendo)

- $L_{(e_1)\cdot(e_2)} = L_{e_1}(x) \cdot L_{e_2}(x)$

- $L_{(e_1)^*}(x) = 1 + L_{(e_1)}(x) + L_{(e_1)\cdot(e_1)}(x) + \ldots =$

$$= \frac{1}{1 - L_{e_1}(x)}$$

DIM. CHE OGNI LINGUAGGIO REGOLARE $\mathcal{L}$ AMMETTE UN'ESP. REG. NON AMBIGUA.

Prendiamo A automa determ. che riconosce $\mathcal{L}$

Sia $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ l'insieme di stati con q_1 stato iniziale e $F \subseteq Q$ insieme di stati fin.

Sia $\mathcal{L}_{i,j}^{r}$ l'insieme di stringhe che portano l'automa dallo stato q_i allo stato q_j passando, nei passaggi intermedi, solo per gli stati $q_1, \ldots, q_r$.

$\mathcal{L}_{i,j}^{r}$ è definito $\forall\, 0 \leq r \leq n$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Dimostriamo che $\mathcal{L}_{i,j}^{r}$ è un linguaggio regolare e che ammette un'espr. reg. non ambigua per induzione su r

PASSO BASE
$r = 0$

$\mathcal{L}_{i,j}^{0}$ è l'insieme dei caratteri σ in Σ t.c. $\delta(q_i, \sigma) = q_j$ più eventualmente ε se $i = j$

PASSO INDUTTIVO $r-1 \to r$

$\mathcal{L}_{ij}^{r} = \mathcal{L}_{ij}^{r-1}$ + le stringhe che passano almeno una volta per q_r

$$= \mathcal{L}_{ij}^{r-1} + \mathcal{L}_{ir}^{r-1} \cdot \left(\mathcal{L}_{rr}^{r-1}\right)^{*} \cdot \mathcal{L}_{rj}^{r-1}$$

$\mathcal{L}_{ij}^{r}$ ha un'espressione regolare non ambigua

---

$\forall i, j \leq n$ $\quad \mathcal{L}_{i,j}^{n}$ ha un esp. reg. non ambigua

$$\mathcal{L} = \sum_{F \in F} \mathcal{L}_{1,F}^{n}$$

se q_1 è lo stato iniziale e F è l'insieme di stati finali

Come trovare l_n senza passare per l'espr. reg non ambigua?

$A = (Q, q_0, \delta, F, \Sigma)$ automa (deterministico ?)

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$

Definiamo n successioni $(q_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ $\quad \forall i \leq n-1$

per ricorrenza

$q_{00} = 1 \qquad q_{i0} = 0 \quad \forall i \geq 1$

$$q_{i(k+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} q_{jk} \cdot \underbrace{\left| \delta^{-1}(q_i) \cap \{q_j\} \times \Sigma \right|}_{b_{ij}}$$

$$a_i(k+1) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} \cdot a_{jk}$$

$$e_k = \sum_{q_i \in F} a_{ik}$$

$$\begin{pmatrix} a_0(k+1) \\ \\ \\ a_{n-1}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & & b_{0(n-1)} \\ b_{10} & & & \\ & & & \\ b_{(n-1)0} & & & b_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(k) \\ \\ \\ a_{n-1}(k) \end{pmatrix}$$

$$A_{k+1} = M \cdot A_k$$

$$A_k = M^k \cdot A_0$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che M sia della forma $\begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$

$$M^k = \begin{pmatrix} \lambda_0^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

Sia $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{B} = \{ \vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n \}$

è detta "base canonica" di $\mathbb{R}^n$

Se F è un applicazione lineare, per calcolare $F(\vec{v})$

1) Scrivete $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + c_n \cdot \vec{e}_n$.

2) Allora $F(\vec{v}) = c_1 \cdot F(\vec{e}_1) + c_2 \cdot F(\vec{e}_2) + \ldots + c_n F(\vec{e}_n)$

Se M è diagonale siamo felicissimi.

Se M non è diagonale ma esiste B invertibile tale che BMB^{-1} sia diagonale, allora

anche BM^kB^{-1} è diagonale $= BM\cancel{B^{-1}}\,\cancel{B}M\cancel{B^{-1}} \cdot \ldots \cdot \cancel{B}MB^{-1}$

Purtroppo non sempre esiste B che diagonalizza

Ma esiste sempre B t.c. BMB^{-1} sia di questa forma, detta di Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 0 & & \\ & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ è in forma di Jordan

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

F è un'applicazione lineare.

$\vec{v}$ è autovettore per F se $\exists \lambda \in$ al campo su cui lavoriamo (qui $\mathbb{R}$)

$$F(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v} \neq 0$$

λ si dice autovalore (anche $\lambda = 0$ va bene)

Se $\exists \vec{v}$ t.c. $F(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ allora

$$(F - \lambda \cdot Id)(\vec{v}) = 0$$

questa appl. lin. ha nucleo non banale

dunque non è invertibile

dunque se M è la matrice di F ed $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Fissata M

$\det(M - \lambda I)$ è un polinomio in λ

detto "polinomio caratteristico" di M (e di F)

Fibonacci $\quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

si considera $x^2 - x - 1$, si cercano le radici...

$$a_n = F_n \qquad a_{n+1} = b_n$$
$$b_n = F_{n+1} \qquad b_{n+1} = a_n + b_n$$

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)\lambda - 1 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 1$$

le radici sono $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Prendiamo $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

allo stesso modo $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$ è autovettore rel a $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

cerchiamo di scrivere $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ come comb. lin. degli autovettori

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} c - \frac{\sqrt{5}+1}{2} d = 0 \end{cases} \qquad c - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 d = 0$$

$$d\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + 1\right) = 1$$

$$d = \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$c = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \vec{v}_1 + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \vec{v}_2 =$$

$$= c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} + d \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile. Infatti l'unico autovalore è 1 che ha molteplicità algebrica 2 (è rad. doppia di $(1-\lambda)^2$)

Tuttavia $\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha un nucleo di dimensione 1. $\ker(M-I) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad \lambda = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$$\lambda^n + \bar{\lambda}^n = \rho^n \cdot \left(e^{i\vartheta n} + e^{-i\vartheta n}\right) = \rho^n \left(2\cos n\vartheta\right)$$

$$\alpha = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$\alpha\lambda^n + \bar{\alpha}\bar{\lambda}^n = r\rho^n \left(2\cos(n\vartheta + \varphi)\right)$$