JANOS - ADVANCED

Titolo nota 03/09/2012

Problema di ieri

$a_1 \quad a_2 \ldots$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$\left.\begin{array}{l} S_{10} = 100 \\ S_{100} = 10 \end{array}\right\}$ Per forza

$b_i = a_i + 1$

$\Downarrow$

$S'_{10} = S'_{100}$

Problema dei benzinai

Scrivere il programma per capirlo

Input $(b_1, d_1) \ldots (b_n, d_n)$ (benzina distanza)

Output k:

1) __Ricorsione__ Trovo i: $b_i \geq d_i$ e trasformo in

$b_1 \quad b_2 \ldots \quad (b_{i-1} + b_i, d_{i-1} + d_i)\ (b_{i+1}, d_{i+1}) \ldots (b_n, d_n)$

$\Theta(n^2)$

2) Invece la soluzione $O(n)$ si basa sull'idea di Lovasz.

$X = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4X}}$

$\uparrow$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$\Downarrow$

$$(x^2+3)^2 = 16(-3+4x)$$

Ma meglio $\quad f(x) = \sqrt{-3+4x}$

Io cerco $\quad x = f(f(x))$

Ma f è crescente $\rightarrow$ $x = f(f(x)) \Leftrightarrow x = f(x)$

$f(x) > x \rightarrow x < f(x) < f(f(x))$

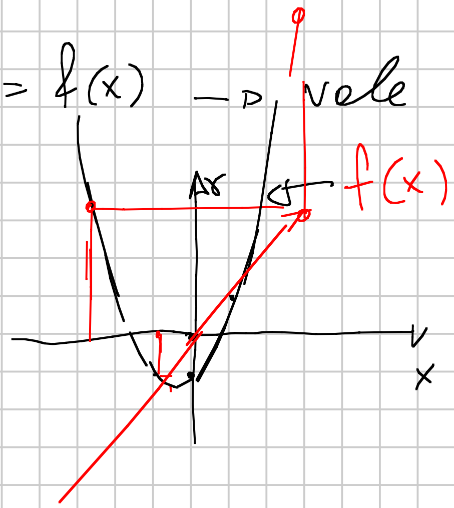
$f(x) < x \rightarrow f(f(x)) < f(x) < x$ NADA

$f(x) = x$ e ho usato solo la crescenza

E se $f(x) = 2x^2 - 1$

Se $x = f(x) \rightarrow$ vale (ottengo $x_1 = -\frac{1}{2}$)

$x_2 = 1$



Forse basta la convessità?

E invece NO!

$x = f(f(x))$ ma uso le soluzioni di $x = f(x)$

e scompongo $\quad f(f(x)) - x = (2x^2 - x - 1)(4x^2 + 2x - 1)$

In generale se $f(x) \in \mathbb{R}[x] \rightarrow f(x) - x \mid f(f(x)) - x$

(come polinomi)

Ma ho che $f(\cos(t)) = \cos(2t)$

$f(f(\cos t)) = \cos(4t)$

Cioè $x = f(f(x)) \rightarrow \cos(t) = \cos(4t)$

$x_1 = \cos(120°)$

$x_2 = \cos(0°)$

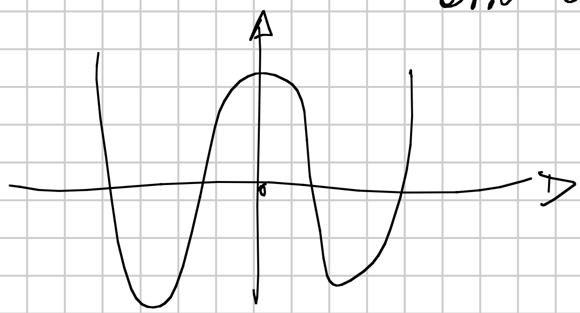
$x_3 = \cos(72°)$

$x_4 = \cos(144°)$

Quindi $x = f^n(x) \rightarrow \cos(t) = \cos(2^n t)$

Polinomi di Chebycheff

$f: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ ma ogni valore è assunto 2 volte $\rightarrow$ $f \circ f$ assumerà 4 volte



E allora $f^n(x)$ avrà 2^n "onde" $\rightarrow$ $f^n(x) - x = 0$ ha 2^n soluzioni

---

$x^3 - 3x + 1 = 0$

$f(0) = -1$

$f(1) = -1$

$f(-2) =$

E si trova il # delle soluzioni studiando la derivata

Ci sono 3 soluzioni

e $x_1 < x_2 < x_3$ soluzioni $\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3$

$x_1^3 \quad x_2^3 \quad x_3^3 \quad\quad x_1x_2x_3 = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\cancel{x_1^3 + x_2^3 + x}$

$x_1^3x_2^3x_3^3 = (x_1x_2x_3)^3 = -1$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3 + \cancel{(x_1 + x_2 + x_3)} \dots$

-3

$x^3 + 3x^2 - 1$

$3x + 1 = x^3$

Siamo andati avanti!

Cerco il polinomio le cui radici siano i cubi delle radici di $x^3 - 3x - 1 = 0$

$\prod (x + (3x_1 + 1))$

Somme $3S + 3$

Prodotto

$$\underbrace{S'}_{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} = 3S + 3 \; ; \; \underbrace{a'}_{x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3} = 6S^2 - 3a + 3 \; ; \; \underbrace{p'}_{x_1^3x_2^3x_3^3} = p^3$$

(sfrutto il fatto che per le 3 radici x_1, x_2, x_3 vale $x_i^3 = 3x_i + 1 \;\forall i$)

Se cerco invece il polinomio le cui radici siano uguali alle radici cubiche delle radici di $x^3 - 3x - 1 = 0$ sfrutto il fatto che $x = 3\sqrt[3]{x'} + 1 \Rightarrow (x-1)^3 = (3\sqrt[3]{x'})^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 24x - 1 = 0$

PROBLEMA

Dette x_1, x_2, x_3 le radici di $x^3 - 3x - 1 = 0$ con $x_1 < x_2 < x_3$, provare che $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$

*) $\sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[3]{x^5-2x}$ risolvere in $\mathbb{R}$

Sol: cerco x t.c. LHS = RHS = 0

$$LHS = 0 \Rightarrow x^3+2x=0 \Rightarrow x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0$$
$$RHS = 0 \Rightarrow x^5-2x=0 \Rightarrow x(x^4-2)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt[4]{2}$$
} è accettabile solo $x=0$

Inoltre ho che:

$LHS > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $LHS < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$RHS > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[4]{2}, 0) \cup (\sqrt[4]{2}, +\infty)$; $RHS < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt[4]{2}) \cup (0, \sqrt[4]{2})$

LHS e RHS sono concordi per

$$x \in (-\infty, -\sqrt[4]{2}) \cup (\sqrt[4]{2}, +\infty)$$

Hope: $x^5-2x > x^3+2x$ per $x \in (\sqrt[4]{2}, +\infty)$ ... ma non sembra funzionare molto (vicino a $\sqrt[4]{2}$)

Cambiamo strada: mi tolgo le radici!

$(x^5-2x)^5 = (x^3+2x)^3$; $x^5(x^4-2)^5 = x^3(x^2+2)^3$; $x^2(x^4-2)^5 = (x^2+2)^3$;

ci sono solo le x con esponenti pari $\Rightarrow$ pongo $x^2 = t$

$t(t^2-2)^5 = (t+2)^3$ si annulla per $t=2$ $\boxed{|x| = \sqrt{2}}$

Hope(s): $t > 2 \Rightarrow LHS >> RHS$; $\sqrt{2} < t < 2 \Rightarrow LHS < RHS$ (così avrei controllato tutto $(\sqrt[4]{2}, +\infty)$ e $(-\infty, -\sqrt[4]{2})$)

$\hookrightarrow$ È VERO!!! $\Rightarrow$ fine ...

Approccio alternativo ...

Consideriamo le due curve $\begin{cases} y = \sqrt[5]{x^3+2x} \\ y = \sqrt[3]{x^5-2x} \end{cases}$ le metto a sistema

$$\begin{cases} y^5 = x^3+2x \\ y^3 = x^5-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} y^5-x^3 = 2x \\ x^5-y^3 = 2x \end{cases} \Rightarrow y^5+y^3 = x^5+x^3$$

Ma $F(t)=t^3+t^5$ è iniettiva $\Rightarrow x=y \Rightarrow x^5=x^3+2x$

$x^5-x^3-2x=0$; $x(x^4-x^2-2)=0$; $x(x^2-2)(x^2+1)=0$; $x=0 \vee \pm\sqrt{2}$

SUPERENALOTTO: vengono estratti 6 numeri su 90

VERSIONE SEMPLIFICATA

1) A vince coi pari (dei 90) e B coi dispari $\Rightarrow$ è equo (1 estr.)
2) A vince se la somma dei due numeri è pari, B se è dispari (2 num. estratti) $\rightarrow$ non è equo! (B vince con prob. $= 45/89$)
3) A vince se la somma dei 3 numeri è pari, B se è dispari (3 num. estratti) $\Rightarrow$ è equo: divido le terne nei 4 tipi:

- 3 dispari (vince B) $\longleftrightarrow$ sono uguali $\longleftrightarrow$ - 3 pari (vince A)
- 2 dispari e 1 pari (vince A) $\longleftrightarrow$ sono uguali $\longleftrightarrow$ - 2 pari e 1 dispari (vince B)

2ª soluzione: se con la terna (a,b,c) vince A, con la terna $(91-a, 91-b, 91-c)$ vince B e viceversa. C'è una bigezione fra i due tipi di terne $\Rightarrow$ il gioco è equo

Quindi K dispari $\Rightarrow$ gioco equo ($K = \#$ di numeri estratti)

E per K pari?

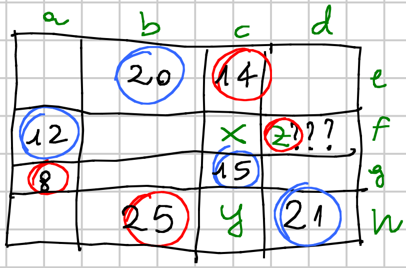
$K=90 \Rightarrow$ vince B $\qquad K=0 \Rightarrow$ vince A

$K=2 \Rightarrow$ vince B, $K=88 \Rightarrow$ vince A perché $\sum_{i=1}^{90} i \equiv 1 \pmod 2$

e per 2 vinceva B (sequenze complementari)

Congetture: $\left.\begin{array}{l} K\equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow \text{vince A} \\ K\equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow \text{vince B} \end{array}\right\}$ Verificatela!

Esercizio



I numeri in figura indicano le aree dei rettangolini. Trovare quella richiesta.

Metodo 1: $\frac{12}{8}=\frac{x}{15} \Rightarrow x=\frac{45}{2}$; $\frac{20}{14}=\frac{25}{y} \Rightarrow y=\frac{35}{2}$;

$\frac{x}{z}=\frac{y}{21} \Rightarrow z=\frac{21x}{y}=21\cdot\frac{45}{2}\cdot\frac{2}{35}=27$

Metodo 2: $\begin{array}{l} be=20 \\ ce=14 \end{array}$ ... fino a trovare $df=27$

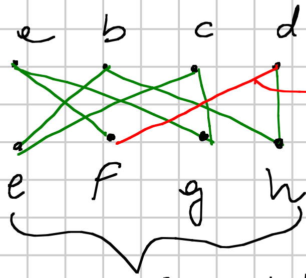
Metodo 3: si osserva che prodotto dei rossi = prodotto dei blu

funziona perché i 4 numeri sono su 4 righe e 4 colonne diverse: con la notazione del metodo (2) avrei che entrambi sono uguali ad $abcdefgh$.

$$x = 27 \Leftarrow 14 \cdot 8 \cdot 25 \cdot x = 20 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 21$$

OSS.: così conoscevo 7 numeri però. Con 6 anche si può? NO!
(Costruisco un grafo con i lati $\overline{xy}$ se conosco la quantità xy)

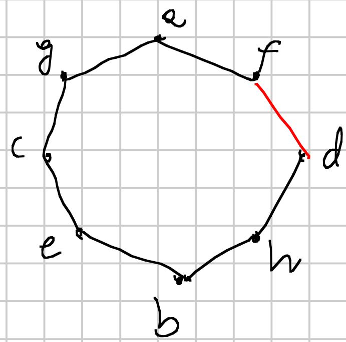
Grafo con le informazioni



→ quantità cercata

Grafo bipartito e albero (massimale senza cicli)

$\Longleftrightarrow$



$\Rightarrow$ si rivede l'idea del modo 3 con i percorsi

$\Downarrow$

la lunghezza del percorso è sempre pari (è la lunghezza di un ciclo in un grafo BIPARTITO)

GRAFO PESATO

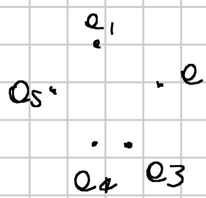
Il prodotto alterno dei lati è costante (a prescindere da quale lato parto) $\Leftarrow$ GRAFO PESATO

Generalizzazione: rettangolo con $m \times n$ caselle. Quante ne devo conoscere al minimo per poter determinare tutte le aree?

Ex1: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 interi tali che tra le 10 somme distinte $a_i + a_j$ (a_i e a_j sono distinti) ce ne sono 7 multiple di 3.
Tesi: $3 \mid a_i \ \forall i \ (1 \le i \le 5)$

Ex2: $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ interi positivi tali che $a_1 + a_2 + \dots + a_{51} = 100$
Tesi: possiamo partizionare $A = \{a_1, \dots, a_{51}\}$ in due insiemi la cui somma degli elementi sia uguale a 50.

1) Soluzione 1: grafo di 5 vertici a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Collego a_i e a_j



se $a_i + a_j \equiv 0 \pmod 3$. Se il grafo non ha cicli dispari allora è bipartito ed ha al più 6 lati, ma non va bene. Quindi contiene un ciclo dispari $\Rightarrow$ 3 sono congrui a 0 (mod 3) $\Rightarrow$ lo sono tutti

Soluzione 2: ce ne sono a congrui a $0 \pmod 3$
b // // $1 \pmod 3$
c // // $2 \pmod 3$

th $\Rightarrow$ $\binom{a}{2}+bc \geq 7$; $\frac{a(a-1)}{2}+bc \geq 7 \xrightarrow{a=5-b-c} \frac{(5-b-c)(4-b-c)}{2}+bc \geq 7$;

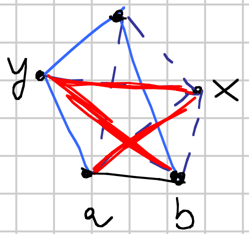
$$20-5b-5c-4b+b^2+bc-4c+bc+c^2+2bc \geq 14$$

$$b^2+c^2+4bc-9b-9c+6 \geq 0 \rightsquigarrow \text{VERA}$$

OSS.: la soluzione 1 si può ottenere anche se al posto di 3 ci fosse un generico dispari n. Ma quante somme devono essere $\equiv 0$ affinché siano tutti zeri? $\binom{n-1}{2}+1$? Ma non vale se $n=3$ o $n=4$. Per $n=5$? Sì! serve $n \geq 5$.

Altra soluzione dell'1 (ufficiale)

Claim: se 7 somme fanno $0 \pmod 3$, allora tutte e 10 fanno $0 \pmod 3$



Come prima studio il grafo. Al massimo mancano 3 spigoli rossi. 4 cammini disgiunti $\Rightarrow \exists$ un cammino rosso. $3 \mid (a+x), (x+y), (y+b)$

$$\Downarrow$$

$$3 \mid [(a+x)-(x+y)+(y+b)+(a+b)]$$

$$3 \mid (a+b) \quad \checkmark$$

2) Soluzione 1

Le somme:
$a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+\dots+a_{51}$ assumono 51 valori distinti compresi fra 1 e 100. Delle coppie:

$(1,51)$; $(2,52)$; ... ; $(49,99)$; $\cancel{(50,100)}$

Nessuna prende $(50,100)$ sennò ho finito $\Rightarrow$ rimangono 49 coppie, ma io ho 50 somme, quindi almeno una coppia verrà presa da 2 somme S_1 e S_2. Basta fare $|S_1-S_2|$ e ottengo 50 con una somma di a_i $\Rightarrow$ fine.

(IDEA presa da: dati n interi, ce ne sono alcuni la cui somma è divisibile per n $\Rightarrow$ IDEA RICICLATA)

2) Soluzione 2

LEMMA: $a_1+\ldots+a_n = 2n-2$ (a_i interi positivi) $\Rightarrow \exists$ un grafo (albero) di n vertici con gradi uguali a $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$n=51 \Rightarrow$ per il lemma $\exists$ un grafo (ALBERO) di vertici $x_1, \ldots, x_{51}$ con $\deg(x_i) = a_i \ \forall\, 1 \le i \le 51$. Ma un albero è un grafo bipartito, da cui segue la tesi.

— o —