JANOS - STAGE SENIOR 2012 - ADVANCED

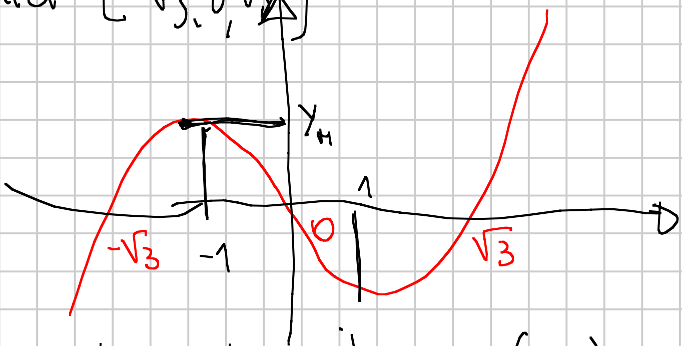
Titolo nota 05/09/2012

$x^3-3x-1=0$ (*) Supponiamo $x_1<x_2<x_3$ le radici

Tesi: $x_3^2-x_2^2=x_3-x_1$

Oss. (*) ha veramente 3 radici reali

Infatti se considero $f(x)=x^3-3x$, questa funzione ha 3 radici $[-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}]$



È facile notare che il max (y_M) è maggiore di uno, quindi $f(x)-1$ che è la traslata in basso di un'unità, continua ad avere 3 radici

$x_1<x_2<0$ e $\sqrt{3}<x_3$

Sol. Sia $p(x)=x^3-3x-1$ e $q(x)=x^3-3x+1$

Oss. 1 $q(x)=-p(-x)$ $\longrightarrow$ Le radici di $q(x)$ sono le stesse di $p(x)$ ma col segno cambiato

Oss. 2 $q\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^3}\,q(x)$

$\longrightarrow$ Da queste otteniamo che la sostituzione $x\longrightarrow 1-\frac{1}{x}$ manda le radici di $q(x)$ nelle radici di $q(x)$ sempre.

$$\{-x_1,-x_2,-x_3\}\longrightarrow\left\{1+\frac{1}{x_1},1+\frac{1}{x_2},1+\frac{1}{x_3}\right\}$$
$$||$$
$$\{-x_1,-x_2,-x_3\}$$

Come sono ordinate $1+\frac{1}{x_1}$, $1+\frac{1}{x_2}$, $1+\frac{1}{x_3}$?

Si ha $x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow 1+\frac{1}{x_2} < 1+\frac{1}{x_1}$

Si ha $x_1 < 0 < x_3 \Rightarrow \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_3} \Rightarrow 1+\frac{1}{x_1} < 1+\frac{1}{x_3}$

Quindi $\boxed{1+\frac{1}{x_2} < 1+\frac{1}{x_1} < 1+\frac{1}{x_3}}$

Ma avendosi $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > -x_3$ si ha che

$$-x_1 = 1+\frac{1}{x_3}$$
$$-x_2 = 1+\frac{1}{x_1}$$
$$-x_3 = 1+\frac{1}{x_1}$$

Dalla seconda si ha $-x_2 = 1+\frac{1}{x_1} = 1+\frac{1}{-1-\frac{1}{x_3}} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{x_3}} - 1$

Quindi $x_3^2 - x_2^2 = \boxed{x_3^2 - \left(\frac{x_3}{x_3+1} - 1\right)^2 \overset{?}{=} x_3 + 1 + \frac{1}{x_3}}$

Basta verificare questa uguaglianza con alcuni calcoli

Sol. alternativa

Tesi $\Leftrightarrow$ $x_2 x_3 (x_3^2 - x_2^2) = x_2 x_3 (x_3 - x_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2 x_3^3 - x_2^3 x_3 = x_2 x_3^2 - \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2(3x_3+1) - (3x_2+1)x_3 = x_2 - x_3 = x_2 x_3^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2(1-x_3^2) = x_3 - 1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{1+x_3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + x_2 + x_2 x_3 = 0$

A questo punto basta mostrare $\boxed{S = 1 + x_2 + x_2 x_3 = 0}$

Noto che $S x_1 = x_1 + x_1 x_2 + \overbrace{x_1 x_2 x_3}^{1} = x_1 + x_1 x_2 + 1$

$S x_1 x_3 = x_1 x_3 + \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{1} + x_3 = x_1 x_3 + x_3 + 1$

$S = 1 + x_2 + x_2 x_3$

Sommando in colonna si ha $S(1+x_1+x_1x_3) = 3 + \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{0} + \underbrace{(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}_{-3} =$
$= 0$.

Dunque $S=0 \vee 1+x_1+x_1x_3=0$

La seconda è falsa perché si avrebbe $x_1 = -\frac{1}{x_3+1}$

laddove $x_3 > \sqrt{3}$ e quindi $x_1 > -\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

mentre $x_1 < -1 < -\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

Oss. $p(x) \cdot p(-x) = (x^3-3x-1)(-x^3+3x-1) =$
$= -x^6+6x^4-9x^2+1 =$
$= (2-x^2)^3 - 3(2-x^2) - 1 = p(2-x^2)$

$x \to 2-x^2$ manda le radici in radici

Risolviamo $x^3+px+q=0$ con Cardano!

Oss. $(a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3+b^3) = 0$

Allora basta trovare (a,b) tali che

$$\begin{cases} p = -3ab \\ q = -(a^3+b^3) \end{cases}$$

E quindi $a+b$ sarà soluzione della nostra equazione.
Si ha $\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = a^3b^3$ e $-q = a^3+b^3$, quindi

$$\begin{cases} \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = a^3b^3 \\ -q = a^3+b^3 \end{cases}$$

È un sistema di secondo grado in a^3 e b^3 che si risolve con l'equazione associata $x^2+qx+\left(-\frac{p}{3}\right)^3=0$

Ovvero $\underset{\substack{\shortparallel \\ a^3}}{x_1} = \frac{-\frac{q}{2}+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}$ $\quad \underset{\substack{\shortparallel \\ b^3}}{x_2} = \frac{-\frac{q}{2}-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}$

Quindi $a+b$ è radice, ovvero $\sqrt[3]{\frac{-\frac{q}{2}+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-\frac{q}{2}-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$

A questo punto $x^3-3x+1=0$ si può risolvere con questa soluzione

---

RISOLVIAMO CON VIÈTE

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \Rightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t - \cos 3t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^3 t - \frac{3}{4}\cos t - \frac{\cos 3t}{4} = 0 \qquad (*)$$

Voglio risolvere $x^3+px+q=0$ con questo "trucco"

Siccome p può essere diverso da $-3/4$ allora scelgo $x=ky$ e si ha $y^3+\frac{p}{k^2}y+\frac{q}{k^3}=0$. Basta scegliere $\frac{p}{k^2}=-\frac{3}{4} \rightarrow k^2=-\frac{4p}{3}$

N.B. Non funziona se $p>0$.

A questo punto sfruttando $(*)$ si deve avere

$$-\frac{1}{4}\cos 3t = \frac{q}{k^3} \rightarrow \cos 3t = -\frac{4q}{k^3}$$

Dopo aver risolto l'equazione precedente in t, allora grazie a Viète possiamo dire che $\cos t$ è soluzione!

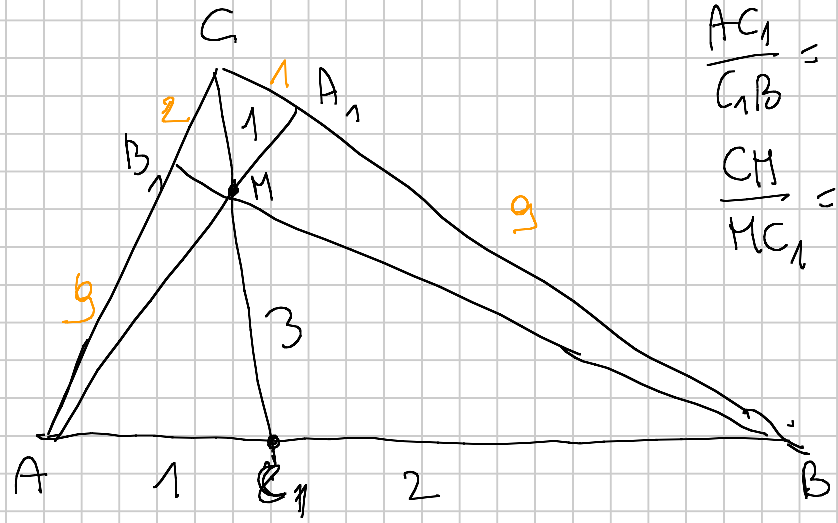
Es. Risolviamo $x^3-3x+1=0$

$p=-3$; $q=-1$; $k^2=\frac{-4\cdot(-3)}{3}=4 \rightarrow k=2$

Allora $\cos 3t = \frac{4}{8}=\frac{1}{2} \rightarrow 3t = 60+360k \rightarrow t=20+120k$

$\rightarrow 3t=300+360k \rightarrow \boxed{t=100+120k}$ (coseni sono uguali!)

Le soluzioni sono quindi $\{2\cos 20, 2\cos 140, 2\cos 260\}$



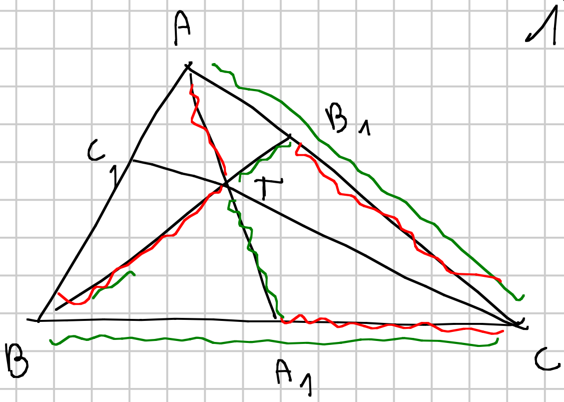
$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{1}{2}$ $\frac{BA_1}{A_1C}=?$

$\frac{CM}{MC_1}=\frac{1}{3}$ $\frac{CB_1}{B_1A}=?$

Sol. Con i vettori si ha $\vec{M} = \frac{3\vec{C}+\vec{C_1}}{4} = \frac{3\vec{C}+\left(\frac{2\vec{A}+\vec{B}}{3}\right)}{4} = \frac{2\vec{A}+\vec{B}+9\vec{C}}{12}$.

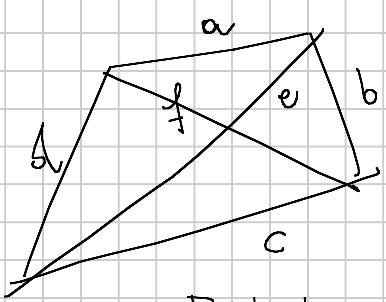
Quindi $\vec{A_1} = \frac{\vec{B}+9\vec{C}}{10}$ e $\vec{B_1} = \frac{2\vec{A}+9\vec{C}}{11}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{9} \wedge \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{2}{9}$

X



1) Proprietà: Si ha che $\prod \sim = \prod \sim$

Ovvero $BC \cdot AC \cdot TB_1 \cdot TA_1 =$
$= A_1C \cdot CB_1 \cdot TA \cdot TB$

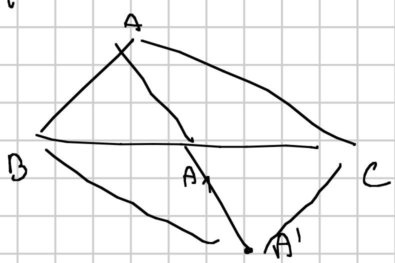


2) Proprietà:
Se in un quadrilatero come quello in figura si ha:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+f^2$$

allora è un parallelogramma

Forti di questo dimostriamo la formula della mediana



A' simmetrico di A rispetto ad A_1.

ABA'C parallelogramma, quindi

$AA'^2 + BC^2 = 2(AC^2+AB^2) \to$

$\to 4AA_1^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 \to$

$\to AA_1 = \sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}$

1^a sol.

Per dimostrare la proprietà 2) uso i vettori.

$$\sum_{cyc} \|A-B\|^2 = \|A-C\|^2+\|B-D\|^2 \iff \underbrace{\sum_{cyc} \|A\|^2 + \left(\sum_{cyc} -2\langle A,B\rangle\right) + 2(\langle A,C\rangle+\langle B,D\rangle)}_{=0} \iff$$

$$\iff \|A+C-B-D\|^2 = 0 \iff$$

$$\iff \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \iff A,B,C,D \text{ parallelogramma}$$

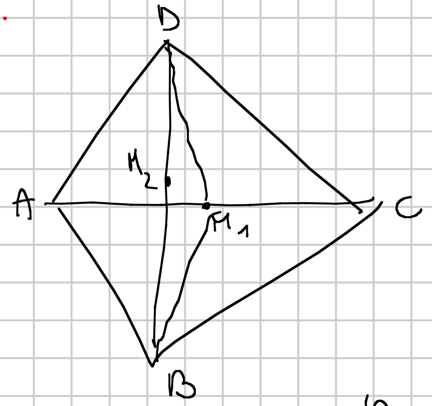
poiché i punti medi delle diagonali coincidono.

Problemino:

Oss. $(a-b+c-d)^2 = \sum_{4c} a^2 \underbrace{-2ab-2bc-2cd-2da+2ac+2bd}_{\bullet}$

Alla scelta dei segni $(-,-,-,-,+,+)$ corrisponde un quadrato. Per quali scelte dei segni in $\bullet$ si può fare in modo che venga un quadrato?

2ª sol.



$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2$

Supponiamo dimostrato il teorema della mediana.

$AB^2+BC^2 = 2BM_1^2 + \frac{AC^2}{2}$

$CD^2+DA^2 = 2DM_1^2 + \frac{AC^2}{2}$

Quindi $LHS = 2(BM_1^2+DM_1^2) + AC^2$

Bisogna mostrare $2(BM_1^2+DM_1^2) = BD^2$ (*)

1) D'altra parte $2(BM_1^2+DM_1^2) \geq (BM_1+DM_1)^2 \geq BD^2$

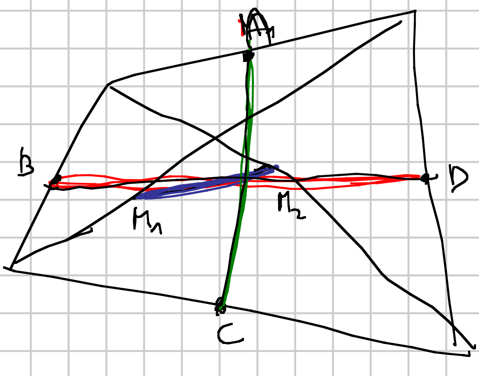
Ma siccome vale l'uguaglianza nel primo caso e nel secondo, si deve avere $BM_1 = DM_1$ e B, M_1, D allineati quindi A, B, C, D parallelogramma

2) $BM_1^2+DM_1^2 = 2M_1M_2^2 + \frac{BD^2}{2}$. Sostituendo in (*) si ha

$4M_1M_2^2 = 0 \Rightarrow M_1M_2^2 = 0$ ovvero $M_1 \equiv M_2$ e il quadrilatero è un parallelogramma

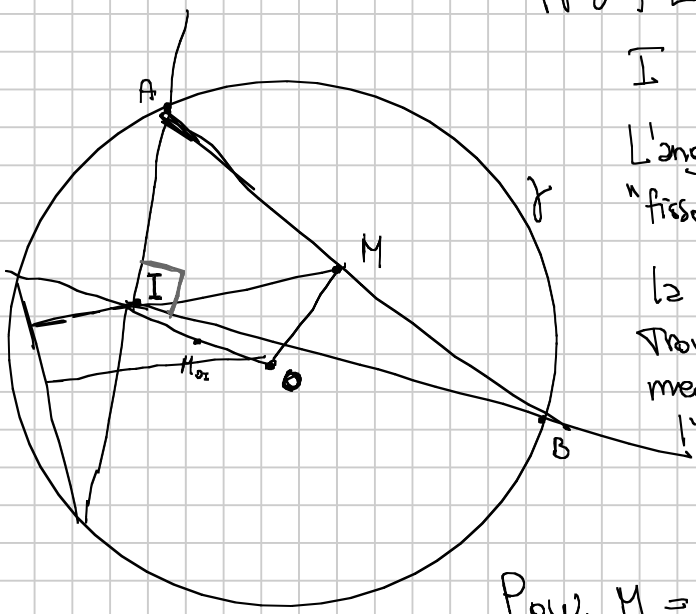
Cosa possiamo notare adesso? Rivedendo la dimostrazione di prima e la conclusione 2) si ottiene dato che per i calcoli fatti in realtà vale $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4M_1M_2^2$

Proprietà: M_1M_2, AC, BD concorrono; dove tutti quelli considerati sono i punti medi.



N.B. La tesi vale anche nello spazio

Problema



I punto interno γ.
L'angolo retto si muove mantenendosi "fisso" in I e ogni volta interseca la circonferenza in due punti.
Trovare la traiettoria del punto medio del segmento AB mentre l'angolo ruota.

$$Pow_\gamma M = -MA \cdot MB = -MA^2$$
$$Pow_I M = IM^2 = MA^2$$

Vale $Pow_\gamma M + Pow_I M = 0$. Tale luogo è una circonferenza (coordinate cartesiane) centrata in M_{OI}.

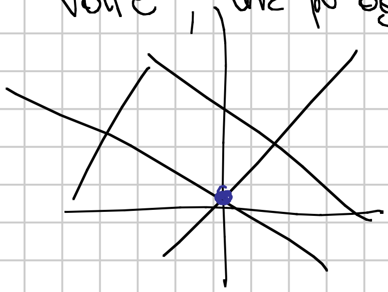
Problema 1: Ho 6 punti nel piano. Traccio i 15 assi dei 15 segmenti possibili. In quanti punti si intersecano al max?

Problema 2: Voglio coprire un 6×6 con 18 piastrelle 2×1, metà verticali, metà orizzontali.

Problema 3: Ho due dadi. Voglio manipolare i dadi in modo che lanciandoli, qualsiasi delle undici somme da 2 a 11 sia equiprobabile. Posso farlo?

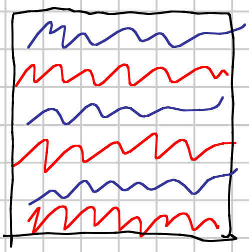
(1) Interseco le 15 rette in tutti i modi possibili: sono $\binom{15}{2}$

A questo punto, considero che nessuna delle quaterne di punti sta sulla stessa circonferenza. Allora ogni punto lo considero esattamente 3 volte, una per ogni coppia di essi di un triangolo.



Quindi in totale sono $\binom{15}{2} - 2 \cdot \binom{6}{3} = 65$

(2) Coloro



ORIZZONTALI $\longrightarrow$ 2 ROSSI o 2 BLU

VERTICALI $\longrightarrow$ 1 Rosso ~~e~~ 1 BLU

Quelli verticali sono 9 quindi coprono 9 rossi e 9 blu. Quelli orizzontali dovrebbero coprire 9 rossi e 9 blu, ma non possono farlo, perché ognuno copre un numero pari di rossi o un numero pari di blu, e la somma di numeri pari non può fare 9 che è dispari!

(3) $a_1, a_2, \dots, a_6$

$b_1, \dots, b_6$

Considero il polinomio

$$(a_1 + \dots + a_6 x^5)(b_1 x + \dots + b_6 x^5) =$$

$$= \frac{1}{11} x^0 + \dots + \frac{1}{11} x^{10} \quad \text{per ipotesi} =$$

$$= \frac{1}{11} \boxed{\frac{x^{11} - 1}{x - 1}}$$

Questo non è scomponibile nei reali per fatto noto (ciclotomici)

PROBLEMA Posso dividere 50 numeri $a_1, \dots, a_{50}$ con somma 100 in due gruppi con somma 50.

RISPOSTA: No! Considera $\{51, \underbrace{1, \dots, 1}_{49}\}$

Come si può salvare il problema? Basta aggiungere l'ipotesi che $a_i \le 50$.

S1 Considero $S_1 = a_1$

$\vdots$

$S_{48} = a_1 + \dots + a_{48}$

Considero $(1, 51)$

$\vdots$

$(48, 98)$

Supponiamo che non ci sia un cassetto con due somme, altrimenti abbiamo concluso, quindi $\forall$ cassetto c'è un S_i dentro.

Se gli a_i fossero tutti uguali avrei facilmente la tesi. Altrimenti $\exists k$ t.c. $a_k \neq a_{k+1}$. Scambio $a_k \to a_{k+1}$. Tutti gli S_i rimangono uguali tranne S_k. Se questo S_k andasse a finire in un altro cassetto avrei finito. Quindi deve rimanere nello stesso cassetto!

Ovvero $|S_k + 50 - S_k| =$

$(S_k \to S_k + 50)$

$= |\underbrace{a_1 + \dots a_{k-1} + a_{k+1}}_{a_1 + \dots + a_{k-1} + a_{k+1}} + \underbrace{a_1 + \dots + a_k}_{a_1 + \dots + a_k}| =$

$= |a_{k+1} - a_k| = 50$ il che è assurdo perché $\forall i$

$0 < a_i \le 50$

Con $a_1 + \dots + a_{34} = 100$ c'è il controesempio!

$(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{33}, 1)$

OSS. $a_1 + a_2 + \dots + a_{35} = 100$

Si può fare ancora la divisione in due gruppi a somma 50!