ADVANCED N - Autogestito

Titolo nota 07/09/2012

Dato $p \in \mathbb{P}$ dispari dimostrare che

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (p-1)x^{p-2}$$

e' iniettivo su $\mathbb{Z}_p$.

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$$

$$Q'(x) = P(x)$$

$$Q(x) = \frac{1 - x^p}{1 - x}$$

$$P(x) = D\left(\frac{1 - x^p}{1 - x}\right) = \frac{p x^{p-1}(x-1) - x^p + 1}{(x-1)^2}$$

$$P(x) \equiv (1 - x^p)((x-1)^2)^{-1} \quad \text{se } x \not\equiv 1 \ (p)$$

$$P(1) \equiv 0 \quad (p)$$

$$P(x) \equiv \cancel{(1-x)}((x-1)^{\cancel{2}})^{-1}$$

$$\equiv -(x-1)^{-1} \quad \text{iniettivo mod } p$$

94/3 94/6 92/6 84/6

Dimostrare che $2^{2^n} + a$ al variare di n e' divisibile per infiniti primi.

Sia $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione, la definisco buona $\iff$ $|\{p\in\mathbb{P} \mid \exists n : p \mid a_n\}| < \infty$.

Dato $k\in\mathbb{Z}$. Se a_n è buona $\{a_n+k\}$ non è buona.

— o — o —

$\forall k \geq 2$

$$v_2\left[\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}\right] = 3k$$

— o —

Dato $t\in\mathbb{N}$ $\exists n>1$ t.c. $(n,t)=1$ e

$n+t,\ n^2+t,\ n^3+t, \dots$ non sono potenze perfette

$\boxed{t+1 \text{ non è una potenza}}$

p primo t.c. $p^e \| t+1$

$n\equiv 1 \ (p^{\text{tanto}})$ $\quad n\equiv 1 \ (t)$

$n^a+t \equiv t+1 \equiv 0 \ (p^e)$ $\implies v_p(n^a+t)=v_p(t+1)$

$n^a+t \equiv t+1 \ (p^{e+1})$

$\not\equiv$

0

$n^a+t \equiv a^q \qquad q \mid e \qquad q$

$\boxed{q \qquad t+1 \neq x^q \ (q)}$

$n \equiv 1 \quad (9) \qquad \forall g \mid e$

$n^e + t \equiv t+1 \quad (9)$

$\cancel{11}$ $\times g$

$n^e + t$ non e' una potenza $\underline{\forall e}$

92/6

$S(n) \leq n^2 - 14$

$1, 4, 9$

$n^2 = \square + \square + \ldots + \square$

$\underbrace{1 + \boxed{1} + \ldots \boxed{1} \ldots + 1}_{n^2 - 13}$

$\boxed{+\,3} \qquad \boxed{+\,8}$

$n^2 - 13$

13

$13 = 8a + 3b$

$S(n_0) = n_0^2 - 14$

$\cancel{\boxed{n_0 = 8}}$

---

c) $\quad n \to 2n \quad$ funziona $(\ )$

$n = a^2 + b^2$

$4n^2 = (2a)^2 + (2b)^2$

$4n^2 = \quad n^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Somma di $4 \leq k \leq n^2 - 56$ quadrati faccio così?

$4n^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$

$1 \ldots n^2 - 14$ quadrati

$S(2n) \geq 4n^2 - 56 \rightarrow S(2n) = 4n^2 - 14$

Per k: $n^2 - 56 \leq k \leq n^2 - 14$ posso scrivere n^2 come somma di k quadrati.

IMO 94/3

a) $\forall m > 0 \ \exists k \quad f(k) = m$

$0 \leq f(k+1) - f(k) < 2$

A_{k+1} $\qquad$ A_k

$2k+2$ $\qquad$ $k+1$

$2k+1$

$f(k+1) = f(k)(+1)$

b) $m \quad f(k) = m$

A_k $\qquad$ A_{k+1} $\qquad$ A_{k+2}

$\underline{2k+1}$ $\qquad$ $\underline{2k+3}$

$2k+3 = 2k+1 + (10)_2$

$1000 \ldots 11 = 2k+1$

$100 \ldots 101 = 2k+3$

$k = 100 \ldots 1 = 2^a + 1$

$k = 2^a + 2$

10 11

10 100

E ORA SIAMO FATTI

(WE ARE DONE) $\blacksquare$