A2 - BASIC : disuguaglianze

Titolo nota 06/09/2012

§1 Medie
§2 Cauchy-Schwartz
§3 Riarrangiamento
§4 Convessità

§1 Medie

$A((x_i))$ $(x_i) = (x_1, \dots, x_n)$

× rapidità

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) / n$$

media aritmetica

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \qquad x_i \geq 0$$

media geometrica

$$Q(x_1 \dots x_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$ media quadratica

$$M_p(x_1 \dots x_n) = \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{n}}$$ media p-ima

$x_i \geq 0$

$$H(x_1,\dots,x_n) = A\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}$$

media armonica

Disuguaglianze fondamentali tra medie:

$$M_{-1} = H((x_i)) \leq G((x_i)) \leq \overset{M_1}{A((x_i))} \leq Q((x_i))$$

(CS)

$\leq$ ovvie

"$M_0(x_i)$" (R)

$\underline{\min_i (x_i)}$ $M_{-\infty}(x_i)$

$$\boxed{p \geq 1} \quad L \leq M_p((x_i)) \leq M_q((x_i)) \quad p<q$$

$\boxed{M_p \leq M_q \quad p \leq q}$

(C)

(M) ovvie

$\max_i (x_i)$ $M_{+\infty}(x_i)$

Vale l'$=$ in ~~una~~ qualsiasi di queste $\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$(x_i \geq 0)$

1) ottimalità, caratterizzazione di $=$

2) universalità ($\rightarrow$ omogeneità)

ex G, A, M_p sono tutte omogenee

$G(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda G(x_1,\dots,x_n)$ di grado 1

idem per $A, Q, M_p \rightarrow$ omogenee di grado 1

Si cerca $\underbrace{f((x_i))}_{\substack{\text{omog.} \\ \text{di grado } d}} \le \underbrace{g((x_i))}_{\substack{\text{omog.} \\ \text{di grado } d'}}$

<u>universale</u> $\Rightarrow d = d'$

<u>ex</u> $\quad ab + bc + ca \le a^3 + b^3 + c^3$

omog. di grado 2 ↗ è una dis. $\forall a,b,c$ ↑ di grado 3

Se fosse vera $\forall a,b,c$ e a_0, b_0, c_0 è sol.

$\rightarrow \lambda a_0, \lambda b_0, \lambda c_0$ è sol $\forall \lambda$

$$\lambda^2 (a_0 b_0 + b_0 c_0 + a_0 c_0) \le \lambda^3 (a_0^3 + b_0^3 + c_0^3) \quad \forall \lambda$$

$$\lambda \ge \frac{a_0 b_0 + b_0 c_0 + a_0 c_0}{a_0^3 + b_0^3 + c_0^3} \qquad (a_0, b_0, c_0) \text{ fissato}$$

$\lambda \to 0$ <u>assurdo</u>

3) disuguaglianze con parametro

$$A((\underline{x}_i)) \le M_p((\underline{x}_i))$$

Come si comporta variando p?

EX 1.1. Far vedere che, fissati $x, y > 0$:

(i) $$\sqrt[p]{\frac{x^p + y^p}{2}} = M_p(x,y) \xrightarrow[\text{p molto grande}]{} \max\{x,y\}$$

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}} = \max\{x,y\}$$

Cosa significa? posso rendere $\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}$ vicino quanto mi pare al $\max\{x,y\}$ pur di scegliere p molto grande

Come si fa?

z fissato >0

$$\begin{cases} z^p \xrightarrow[\text{p molto grande}]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } z>1 \\ 0 & 0<z<1 \end{cases} \\ \sqrt[p]{z} \xrightarrow[\text{p molto grande}]{} 1 \quad \forall z>0 \end{cases}$$

Sia ora $0 < x \leq y$ $\quad y = \max\{x,y\}$ fissati.

$$\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}} = \underset{\text{fissato}}{y}\ \sqrt[p]{\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^p + 1}{2}} \longrightarrow y$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^p \to 0$

$\sim \frac{1}{2}$

p molto grande $\to 1$

(ii) $x_1, \dots, x_n \geq 0 \Rightarrow M_p(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[p \to -\infty]{} \min_i \{x_i\}$

(iii) [solo per chi conosce le derivate e l'Hopital]

$$\underbrace{G(x_1, \dots, x_n)}_{\text{"}M_0(x_1 \dots x_n)\text{"}} = \lim_{p \to 0} M_p(x_1, \dots, x_n)$$

§2 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

dati $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$

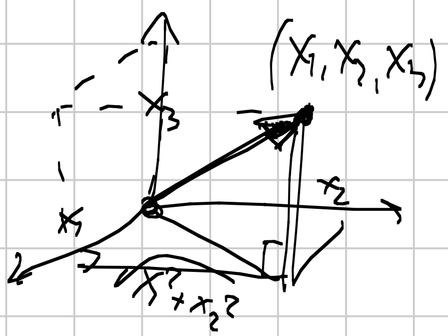
$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\left(\sum_i x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

$n = 2, 3$

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$

$|\vec{X}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ norma o lunghezza del vettore $\vec{X}$



$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$$

prodotto scalare

Nota $|\vec{X}| = \sqrt{\underbrace{\vec{X}}_{(x_1, \dots, x_n)} \cdot \underbrace{\vec{X}}_{(x_1 \dots x_n)}}$

Riformulazione di Cauchy-Schwarz con queste notazioni

$$|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \leq |\vec{X}| \, |\vec{Y}|$$

Vale l'$=$ $\iff$ $\vec{X} = \lambda \vec{Y}$ $\exists \lambda$

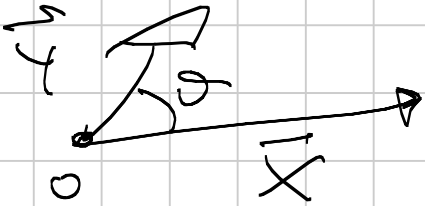
cioè

$\exists \lambda$ $x_i = \lambda y_i$ $\forall i$

(o viceversa)

Significato geometrico di Cauchy-Schwarz:

ex 2.1 dati $\vec X, \vec Y$ vettori in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$



θ l'angolo tra i due

$0 \le \theta \le \pi$

$$\cos\theta = \frac{\vec X \cdot \vec Y}{|\vec X|\,|\vec Y|} \qquad (\vec X, \vec Y \neq 0)$$

$\Downarrow$

C.S. $\quad |\underbrace{\vec X \cdot \vec Y}_{\text{numero}}| \le \underbrace{\|\vec X\|}_{\text{norma}}\|\vec Y\|$

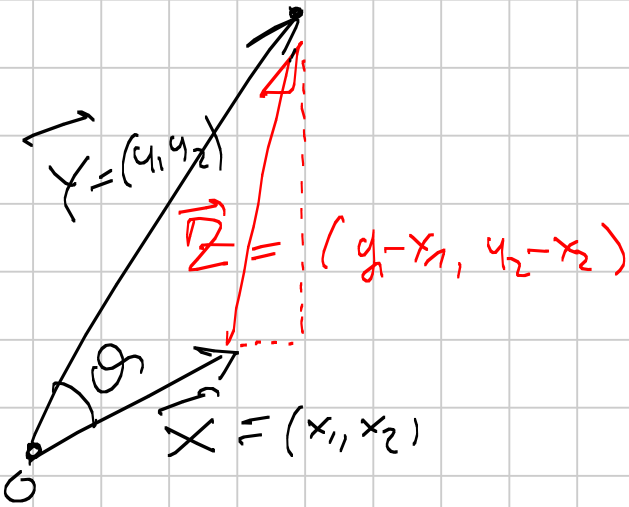
$$|\cos\theta| = \frac{|\vec X \cdot \vec Y|}{\|\vec X\|\,\|\vec Y\|} \le 1$$ banalità geometrica

quand'è che vale $=1$?

quando $|\cos\theta| = 1 \to \theta = 0, \pi$

i.e. $\exists \lambda : \vec X = \lambda \vec Y$

Suggerimento per l'ex 2.1



teor. del coseno: $\underbrace{|\vec Z|^2}_{\text{(calcolo)}} = \cancel{|\vec X|^2} + \cancel{|\vec Y|^2} - 2\cos\theta\,|\vec X||\vec Y|$

$(\vec Z)^2 = \vec Z \cdot \vec Z = \cancel{|X|^2} + \cancel{|Y|^2} - 2\,\vec X \cdot \vec Y \quad \Downarrow$

$\cos\theta = \dots$

$\square$

questa dà una dimostrazione geometrica di C-S per $n = 2, 3$

per n qualsiasi?

* dim C-S per n qualsiasi:

$$\left|\sum_{i}^{n} x_i y_i\right|^2 \overset{?}{\leq} \left(\cancel{\sqrt{\sum_i x_i^2}}\right)\left(\cancel{\sqrt{\sum_i y_i^2}}\right)$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)}_{\sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}_{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)}_{\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i x_j y_j}} \overset{?}{\geq} 0$$

$$\cancel{\sum_{i=j=1}^{n} x_i^2 y_i^2} + \underbrace{\sum_{i\neq j} x_i^2 y_j^2} - \cancel{\sum_{i=j=1}^{n} x_i^2 y_i^2} - \underbrace{\sum_{i\neq j} x_i x_j y_i y_j} \overset{?}{\geq} 0$$

$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$

$$\sum_{i<j}\left(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2\right) - \sum_{i<j} 2 x_i y_i x_j y_j$$

$$\sum_{i<j}\left(x_i y_j - y_i x_j\right)^2 \geq 0 \quad \text{ok!}$$

quando $= 0$?

$$\boxed{x_i y_j = y_i x_j} \quad \forall i,j \Rightarrow \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j} \overset{\exists}{=} \lambda \quad \forall i,j$$

$$\forall i \quad \boxed{\exists \lambda \quad x_i = \lambda y_i}$$

oppure $(y_i = \lambda x_i)$

Esempi di applicazione di C-S.

ex 2.2 $A(x_1 \dots x_n) \leq Q(x_1 \dots x_n)$

$$\frac{1}{n} \underbrace{\sum_i x_i \cdot 1}_{\vec{X} \cdot \underbrace{(1,1,\dots,1)}_{\mathbb{1}}} \overset{?}{\leq} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} \underbrace{\sqrt{\sum x_i^2}}_{|\vec{X}|}$$

$\vec{X} = (x_1 \dots x_n)$

$$\frac{\vec{X} \cdot \mathbb{1}}{n} \leq \frac{\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{n}} \quad \sqrt{n}$$

Ok! vale = $\exists \lambda$ t.c. $x_i = \lambda \ \forall i$

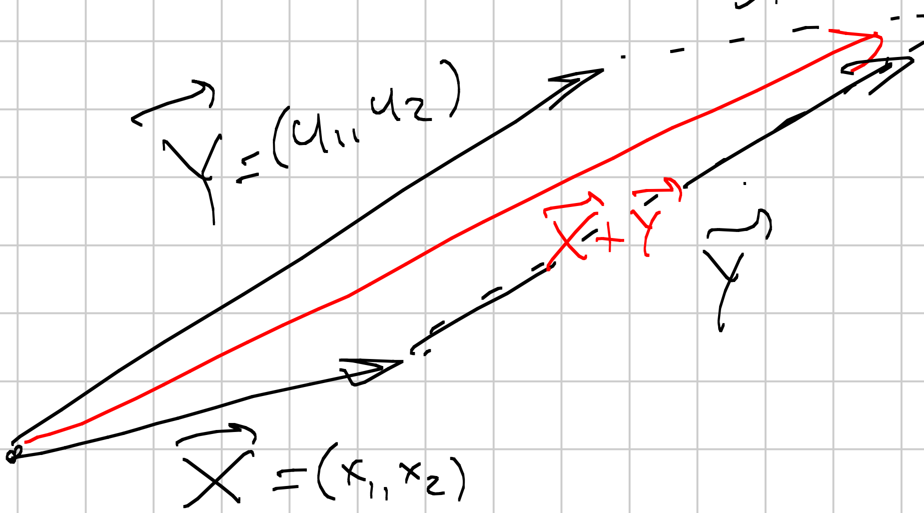
ex 2.3 Dis di Minkowsky o Triangolare

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \quad (p=2)$$

e vale $=$ sse $\exists \lambda \ge 0$

t.c. $x_i = \lambda y_i \;\forall i$

interpretazione per $n=2,3$



$$\vec{X}+\vec{Y} = (x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$

Mink in termini di vettori :

$$|\vec{X}+\vec{Y}| \le |\vec{X}| + |\vec{Y}|$$

(dis. triangolare)

uguaglianza

Dh. $\underbrace{|\vec{X}+\vec{Y}|^2}_{(\vec{X}+\vec{Y})\cdot(\vec{X}+\vec{Y})} \overset{?}{\le} \underbrace{(|\vec{X}|+|\vec{Y}|)^2}_{\cancel{|\vec{X}|^2+|\vec{Y}|^2} + 2|\vec{X}||\vec{Y}|}$

$$\cancel{|\vec{X}|^2} + \cancel{|\vec{Y}|^2} + 2\,\vec{X}\cdot\vec{Y}$$

vale = sse vale $\boxed{\vec{X}\cdot\vec{Y} = |\vec{X}|\,|\vec{Y}|} \geq 0$

$\Downarrow \cancel{\Uparrow}$

è più
di dire $\underbrace{|\vec{X}\cdot\vec{Y}| = |\vec{X}|\,|\vec{Y}|}_{\vec{X} = \lambda \vec{Y}}$

dal fatto che $\vec{X}\cdot\vec{Y} > 0 \to \underline{\underline{\lambda > 0}}$.

§3 Riarrangiamento

Siano $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ crescente

$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ crescente

$$\sum_i a_i b_{n-i+1} \le \sum_{i=1} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_i a_i b_i$$

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 \to \sigma(1) \\ 2 \to \sigma(2) \\ \vdots \\ n \to \sigma(n) \end{pmatrix}$$

l'= vale se e solo se ho accoppiato in modo ↗

= se e solo se ho accoppiato in modo ↘

<u>Xdim.</u> Supp. che σ sia una permutazione che mi dà il massimo.

Guardiamo le coppie di indici (i,j)

$$\underbrace{\text{tali che } a_i < a_j \text{ ma } b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}}_{\text{“coppie invertite da } \sigma \text{”}}$$

Th σ dà il max $\Longrightarrow$ $\nexists$ coppie (i,j) invertite da σ

supp. che $\exists\,(i,j)$ invertite da σ:

$$M = \cancel{a_1 b_{\sigma(1)}} + \dots + a_i b_{\sigma(i)} + \dots + a_j b_{\sigma(j)} + \dots \cancel{a_n b_{\sigma(n)}}$$

$$\text{IV}$$

corrisponde a una permutaz. σ' $\longrightarrow$

$$\cancel{a_1 b_{\sigma(1)}} + \dots + a_i b_{\sigma(j)} + \dots + a_j b_{\sigma(i)} + \dots + \cancel{a_n b_{\sigma(n)}}$$

$$\Longrightarrow a_i\left(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}\right) + a_j\left(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}\right) \geq 0$$

$$i<j \qquad \underbrace{\underbrace{(a_i - a_j)}_{\leq 0}\underbrace{\left(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}\right)}_{\geq 0}} \geq 0$$

può essere solo se $a_i = a_j$ oppure $b_{\sigma(i)} = b_{\sigma(j)}$

cioè (i,j) non è invertita da σ $\square$

es.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad = (a_i)$$

$$6 \quad 7 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad = (b_i)$$

$$\sum_i a_i b_{\sigma(i)} \leq 6 + 14 + 21 + 24 + 36 + 50 \qquad \sigma = id$$

ex. 3.1 $\quad a, b, c$ qualsiasi:

$$ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 \quad ?$$

$$(a_i) = b \quad a \quad c \quad ?$$
$$(b_i) = b \quad a \quad c$$

ex 3.2 $\quad a, b, c > 0$

$$a^b \cdot b^c \cdot c^a \le a^a \cdot b^b \cdot c^c$$

$$\overset{?}{\iff} \operatorname{Log}(a^b \cdot b^c \cdot c^a) \le \operatorname{Log}(a^a \cdot b^b \cdot c^c)$$

$\log_{10}$ (equivalente xché Log è crescente)

$$b \operatorname{Log} a + c \operatorname{Log} b + a \operatorname{Log} c \overset{?}{\le} a \operatorname{Log} a + b \operatorname{Log} b + c \operatorname{Log} c$$

se $a \le b \le c$ allora $\operatorname{Log} a \le \operatorname{Log} b \le \operatorname{Log} c$ $\square$

$\xrightarrow{(R)}$ fine

ex 3.3 (TeX)

Trovare il minimo k t.c. :

$$\underbrace{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}_{} \le k\sqrt{\frac{a^2}{b^4}+\frac{b^2}{c^4}+\frac{c^2}{a^4}}$$

$$\forall \begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a^4+b^4+c^4 = 4 \end{cases}$$

$u \cdot v = ?$

$v = (ab, bc, ca)$

$$\Bigg\| \underbrace{\left(\frac{a}{b^2}, \frac{b}{c^2}, \frac{c}{a^2}\right)}_{u} \Bigg\|$$

CS: $\displaystyle \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} = u\cdot v \le |u||v|$

$$\le \sqrt{\frac{a^2}{b^4}+\frac{b^2}{c^4}+\frac{c^2}{a^4}} \cdot \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$$

$a^4+b^4+c^4=4$

$$\wedge \quad k$$

$\sqrt{a^4+b^4+c^4} = 2$

$=$ sse $a=b=c$

Risp il k max è 2.

Ma $\exists$ a,b,c t.c. ho l' $=$ (con $k=2$)?

Si prendo $a=b=c$ + $\Longrightarrow$ $=$. Ok $a=\sqrt[4]{4/3}=b=c$.

ex 3.4 Siano $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Mostrare che $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \dots + a_n/a_1 \geq n$

Cioè $\forall$ ordinamento $\sigma : \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$

vale $\boxed{a_{\sigma(1)}/a_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(n)}/a_{\sigma(1)} \geq n}$

~~x~~dim sia $\sigma : \begin{pmatrix} 1 \to \sigma(1) \\ \vdots \\ n \to \sigma(n) \end{pmatrix}$ t.c.

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \dots \leq a_{\sigma(n)}$$

$$\frac{1}{a_{\sigma(1)}} \geq \frac{1}{a_{\sigma(2)}} \geq \dots \geq \frac{1}{a_{\sigma(n)}}$$

$$a_1/a_2 + \dots + a_n/a_1 \geq \sum_i \underbrace{a_{\sigma(i)} \cdot \frac{1}{a_{\sigma(i)}}}_{1} = n$$

$=$ sse $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Ox 3.5 Dis aritmetico-geometrica

$$G((x_i)) \le A((x_i))$$

$$x_1, \dots, x_n \ge 0$$

Dim

$$y_1 = G/x_1$$

$$y_2 = G^2/x_1 x_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = G^n/x_1 \cdots x_n$$

$\Rightarrow$

$$y_i/y_{i+1} = \frac{\cancel{G^i}}{\cancel{x_1 \cdots x_i}} \cdot \frac{\cancel{x_1 \cdots} x_{i+1}}{\cancel{G^{i+1}}} = x_{i+1}/G$$

$$y_n/y_1 = \frac{\cancel{G^n}}{\cancel{x_1 \cdots x_n}} \cdot \frac{x_1}{G}$$

G^n

$$y_1/y_2 + y_2/y_3 + \dots + y_n/y_1 \ge n$$

$$x_2/G + x_3/G + \dots + x_1/G \ge n$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \ge G$$

Vale l'= $\Leftrightarrow$ vale l'= sse $y_i = y_j = G$ $\forall i, j$

sse $x_i = G$ $\forall i$
$= x_j$

A-G è utile quando debbo calcolare

|| il minimo di $\sum x_i$
|| Conoscendone il $\prod x_i$

oppure quando debbo calcolare

|| il max di $\prod x_i$
|| conoscendone la $\sum x_i$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

ex. 3.6 Calcolare $\min\left\{x+2y+3z \;\middle|\; \begin{matrix} x,y,z \ge 0 \\ x^3y^2z = 1 \end{matrix}\right\}$

sol = sse $\begin{cases} \frac{x}{3} = y = 3z \\ x^3y^2z = 1 \end{cases}$ $\quad (3y)^3 y \left(\frac{y}{3}\right) = 1$

$$\prod x_i = x^3y^2z$$

$$(x_i) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}, y, y, 3z\right)$$

$$G(x_i) = \sqrt[6]{\prod_i x_i} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}x^3y^2z} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$6A(x_i) = x+2y+3z$$

$$x+2y+3z \ge 6G(x_i) \ge 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{9}} = \underline{\underline{\min}}$$

A=G

ex. 3.7 Trovare $\max\left\{ \underbrace{x^2 y z^3}_{\prod x_i} \,\middle|\, \begin{matrix} x,y,z \geq 0 \\ x+y+z=1 \end{matrix} \right\}$

$$(x_i) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, y, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}\right)$$

$$G(x_i) = \frac{1}{\sqrt[6]{4\cdot 27}} \sqrt[6]{x^2 y z^3}$$

$$\wedge\!|$$

$$A(x_i) = \frac{x+y+z}{6} = 1/6$$

$$x^2 y z^3 \leq \frac{4\cdot 27}{6^6} = \max ?$$

vale l'=: $\frac{x}{2} = y = z/3$ con $x+y+z=1$

troviamo x, y, z.

ex. 3.8 Calcolare $\min\left\{ x^2+y^4+z^6 \,\middle|\, xyz = k \right\}$

$x,y,z > 0$

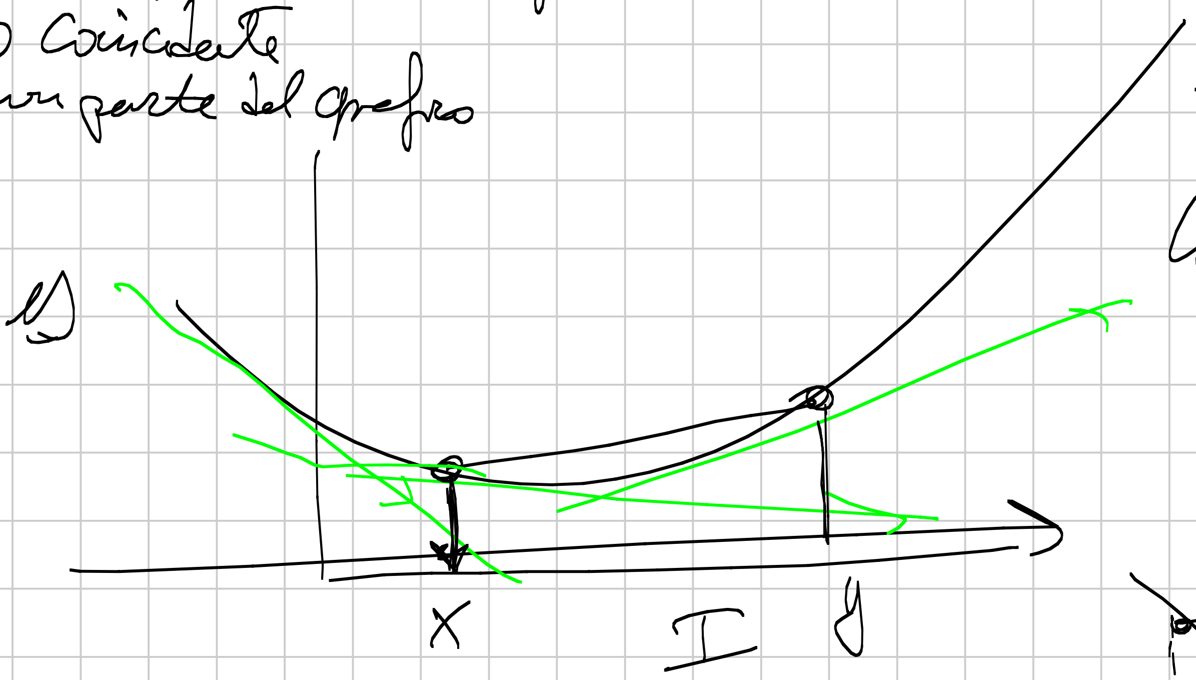
$$\underbrace{\frac{x^2}{6} \cdot \frac{x^2}{6} \cdots \frac{x^2}{6}}_{6} \cdot \underbrace{\frac{y^4}{3} \cdot \frac{y^4}{3} \cdot \frac{y^4}{3}}_{3} \cdot \underbrace{\frac{z^6}{2} \cdot \frac{z^6}{2}}_{2} = x^{12} y^{12} z^{12} = k^{12}$$

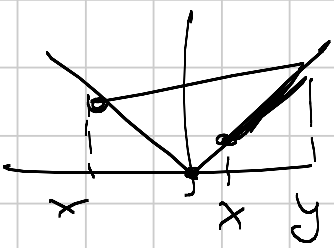
§4 Dis. di convessità

definizione una funzione f (definita su un intervallo I) si dice convessa (CONCAVA) se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico in I sta AL DI SOPRA (AL DI SOTTO) del grafico stesso:

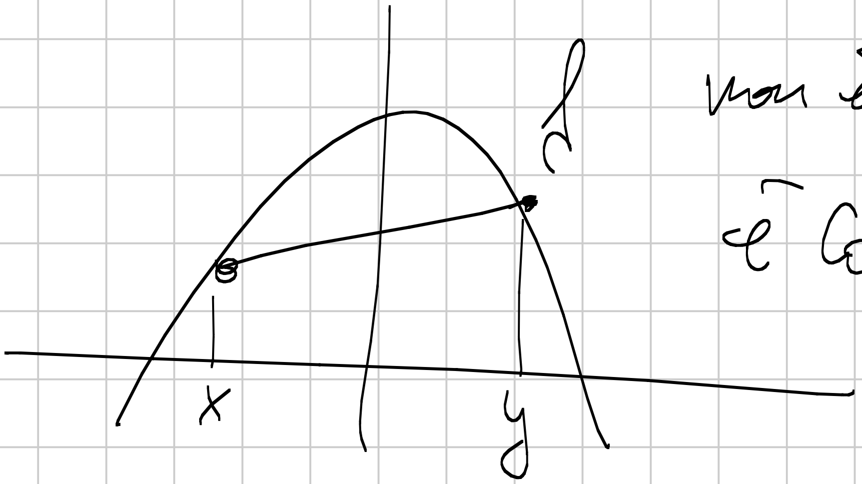
o coincidente con parte del grafico

es





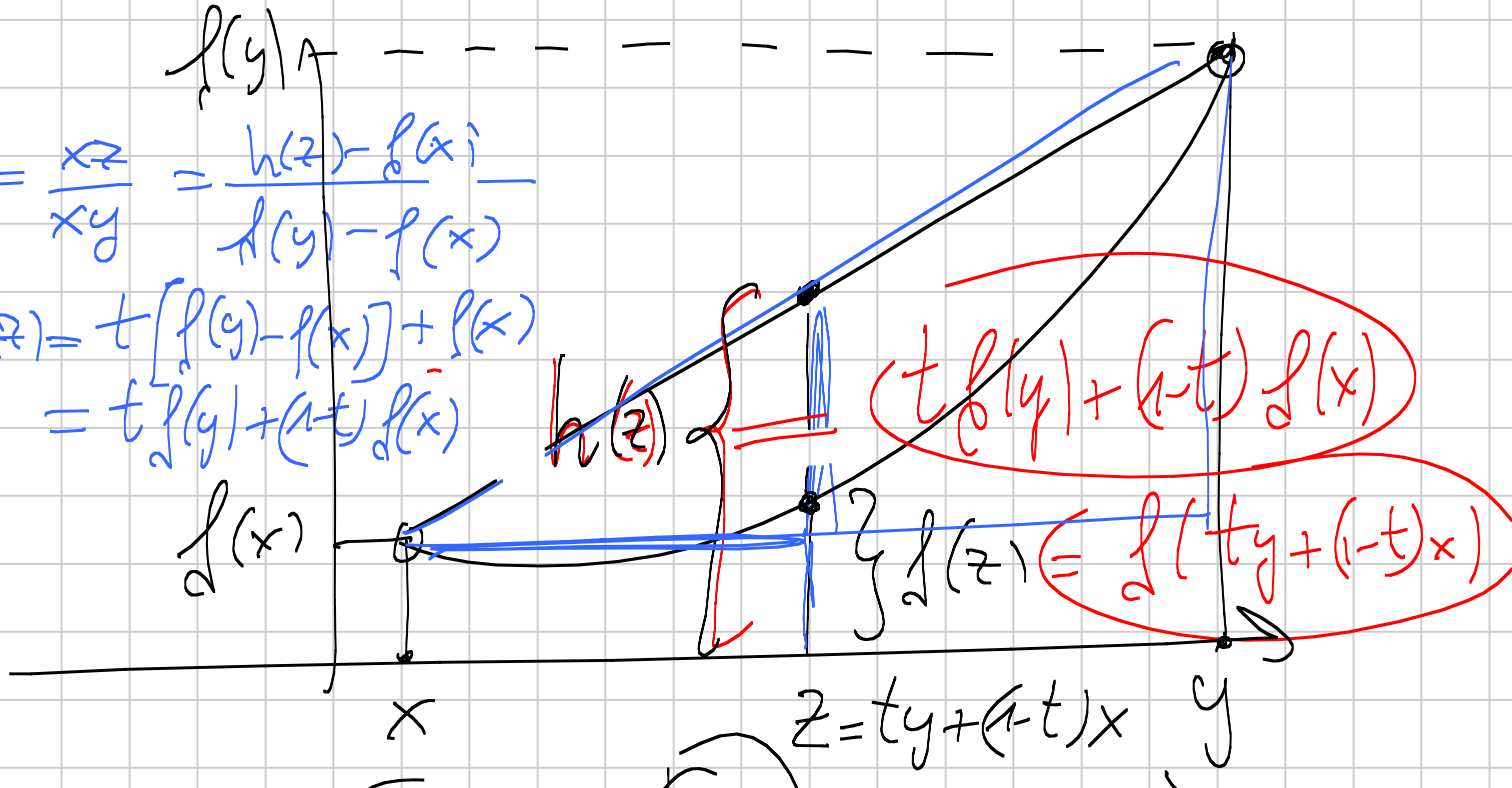
es. anche la funz $f(x) = |x|$ è convessa es.



non è convessa!

è concava.

Come si scrive questa condizione di convessità con una formula?



$$t = \frac{\overline{xz}}{\overline{xy}} = \frac{h(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

$$h(z) = t[f(y) - f(x)] + f(x) = t f(y) + (1-t) f(x)$$

$$h(z) = t f(y) + (1-t) f(x)$$

$$f(z) = f(ty + (1-t)x)$$

Convessità $\iff h(z) \geq f(z)$ ~~$\forall z \in [x,y]$~~ $\forall t \in [0,1]$

<u>SCRIVIAMOLA MEGLIO</u>

OSS

Un punto $z \in [x,y]$

si può sempre scrivere come

$$z = x + t(y-x) \qquad 0 \le t \le 1$$
$$= ty + (1-t)x$$

PROP Sia f una funz. definita su I. Sono condizioni equivalenti:

(i) f è convessa (concava) su I

(ii) $f(tx+(1-t)y) \le$ ($\ge$) $tf(x)+(1-t)f(y)$ $\quad \forall x,y \in I$, $\forall t \in [0,1]$

(iii) $f(t_1x_1+\dots+t_nx_n) \le$ ($\ge$) $t_1f(x_1)+\dots+t_nf(x_n)$

$\forall x_1,\dots,x_n \in I$, $\forall t_1,\dots,t_n \in [0,1]$, $\sum_i t_i = 1$

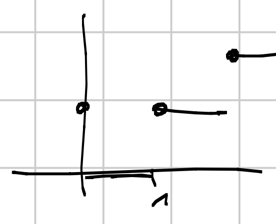
(iv) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le$ ($\ge$) $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ $\quad \forall x,y \in I$

└ (equivalente se f è continua).

(v) $f''(x) \ge 0$ ($\le$) $\quad \forall x \in I$

└ (equivalente se f ammette derivata seconda)

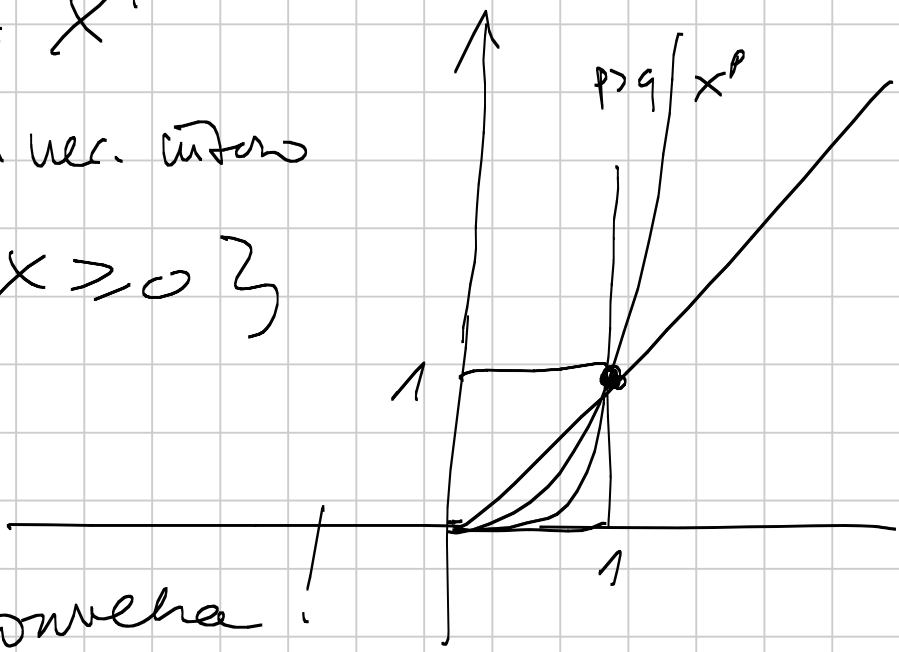
ex. $f(x) = [x]$ non è conv.



ex $f(x) = x^p$

p non nec. intero

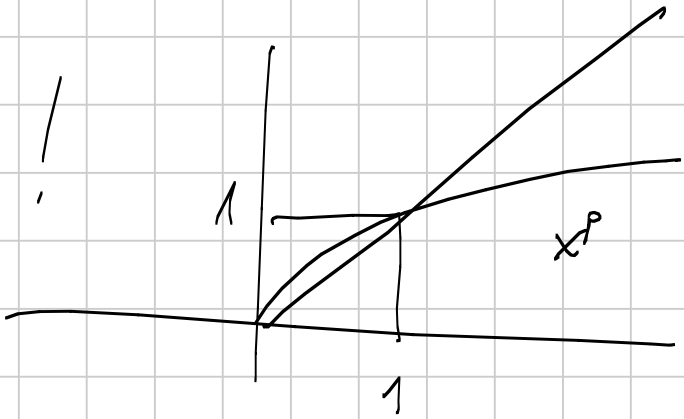
$I = \{x \geq 0\}$



$p > 1$

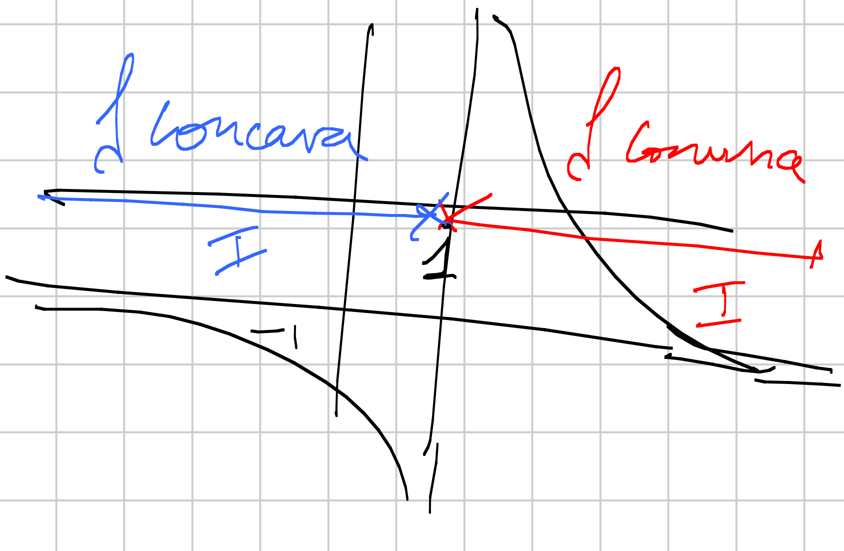
è convessa!

$0 < p < 1$ è concava!

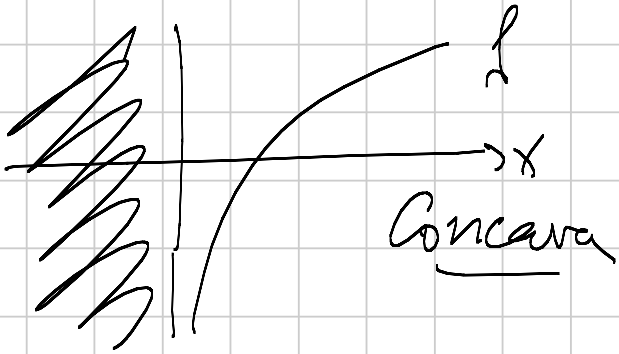


$$f(x) = x^p$$
$$f'(x) = p\,x^{p-1}$$
$$f''(x) = \underset{>0}{p}(p-1)\underbrace{x^{p-2}}_{>0} > 0 \iff p > 1$$

ex $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$



ex $f(x) = \log_a x$



$= \log_a x$] convessa
$0<a<1$

$f'(x) = \frac{1}{x} / \ln a$

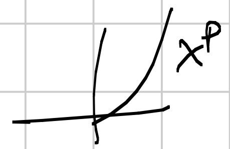
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} / \ln a$ $\begin{cases} >0 & a>1 \\ <0 & 0<a<1 \end{cases}$

Ogni funzione convessa / concava dà luogo a disuguaglianze interessanti ex. 4.1 Mostrare che $A(x_1,x_2) \le M_p(x_1,x_2)$

$p \ge 1$.

Th $\quad \dfrac{x_1+x_2}{2} \le \sqrt[p]{\dfrac{x_1^p + x_2^p}{2}}$

$x_1, x_2 \ge 0$



viene dal fatto che $f(x) = x^p$ è convessa $p \ge 1$

Cond (iv) $\Rightarrow$ $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^p \le \frac{x_1^p + x_2^p}{2}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2} \le \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p}{2}}$$

Se voglio mostrare $A(x_1, \dots, x_n) \underset{p \ge 1}{\le} M_p(x_1 \dots x_n)$
uso la (iii)

$$f\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) \le \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^p \le \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}$$

$\longrightarrow$ ok.

ex 4.2 Mostrare $M_p(x_1,x_2) \le M_q(x_1,x_2)$

$p \le q$

Th $\sqrt[p]{\dfrac{x_1^p + x_2^p}{2}} \le \sqrt[q]{\dfrac{x_1^q + x_2^q}{2}}$

Th $\left(\dfrac{x_1^p + x_2^p}{2}\right) \le \dfrac{x_1^q + x_2^q}{2} = \sqrt[q/p]{\dfrac{(x_1^p)^{q/p} + (x_2^p)^{q/p}}{2}}$

ok $\square$

oppure:

$f(x) = x^{q/p}$ convessa

$$f\left(\frac{x_1^p + x_2^p}{2}\right) \le \frac{f(x_1^p) + f(x_2^p)}{2}$$

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p}{2}\right)^{\cancel{q}/p} \le \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q}{2}}$$

$\underline{ex}$ $AB \leq \underbrace{\frac{1}{p}}_{t} A^p + \underbrace{\frac{1}{q}}_{1-t} B^q$ $\quad p,q>0$

(Young) $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$AB>0$

$$\left[\frac{1}{2}(A^2+B^2) \geq AB \qquad A^2+B^2 \geq 2AB \right.$$

$$Q \geq \Pi \geq G \qquad A^2+B^2-2AB \geq 0$$

$$\left. = (A-B)^2 \right]$$

$f(x) = \operatorname{Log} x$ $\quad$ Concava

$$\operatorname{Log}\Big(\underbrace{\frac{1}{p}}_{t} A^p + \underbrace{\frac{1}{q}}_{1-t} B^q \Big) \geq \underbrace{\frac{1}{p}\operatorname{Log}(A^p) + \frac{1}{q}\operatorname{Log}(B^q)}_{\operatorname{Log}(AB)}$$

$\underline{\operatorname{Log}_{10} \text{ crescente}}$ $\quad \Downarrow$

$$\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q \geq AB.$$

ex dimostrare che se $x_1, \dots, x_n \geq 0$
$\sum_i x_i = 1$

allora $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boxed{\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}} \geq \underbrace{\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{n}}_{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}}$

t_i y_i

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{t_i} f(x_i) \overset{?}{\geq} f(\sum_i x_i \cdot x_i)$$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ Convessa ?

$$\frac{1}{n}\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \dots + \frac{1}{n}\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq f\left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)$$

$\geq f(1/n) \geq \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}$

vero

(Si deriva e $f'' \geq 0$)

(facile! sostituire)

$f'' \sim \frac{4-x}{(1-x)^{7/2}} > 0 \quad x \in (0,1)$