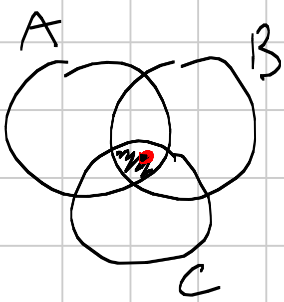
C2 Basic

Titolo nota 07/09/2012

Principio di Inclusione Esclusione

$$\#\{A \cup B\} = \#A + \#B - \#A \cap B$$

$$\#\{A \cup B \cup C\} = \#A + \#B + \#C - \#A \cap B - \#A \cap C - \#B \cap C$$
$$+ \#A \cap B \cap C$$



$$\# \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \#A_i \cap A_j + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \# \bigcap_{k \text{ insiemi}}$$

Funzioni Suriettive

Permutazioni

Su $\{1 \dots n\}$ sono $n!$

Si indicano con σ, τ

$$\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \tau = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{matrix} \qquad \sigma \circ \tau = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$$

- trasposizioni $\quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

- cicli $\quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{matrix} \quad (1\,2\,3\,4\,5\,6) \qquad (1\,2\,3)\ (5\,6) \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{matrix}$

Prop: Ogni permutazione può essere scritta come prodotto di cicli disgiunti in modo unico a meno dell'ordine.

$$a_1 \curvearrowright a_2 \curvearrowright a_3 \qquad\qquad a_k = a_h \qquad h < k$$

"prima o poi si ripete"

Per il principio del minimo intero $\exists$ il più piccolo k per cui vale.

$\boxed{h = 1}$ Abbiamo detto che sono iniettive.

Supponiamo p. ass. $k > h > 1$

$$a_k = \sigma(a_{k-1}) \quad , \quad a_h = \sigma(a_{h-1})$$

σ iniettiva $\Rightarrow$ $a_{k-1} = a_{h-1}$

ma questo andrebbe contro la minimalità di k $\times$

Per dimostrarlo procediamo per induzione

$$\sigma = (a_1 \dots a_{k-1})\,\tilde{\sigma}$$

Vale anche l'unicità.

Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	3	11	5	8	1	9	10	7	4	2	12

$$(1\,6)\,(2\,3\,11)\,(4\,5\,8\,10)\,(7\,9)\,(12)$$

....

Prop? Possiamo scrivere ogni permutazione come prodotto di trasposizioni? Sì

<u>Segno</u> $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$

σ permut. su $\{1 \dots n\}$

- $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, +1\}$
- il segno conta la parità del numero di inversioni cioè $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$

<u>Lemma</u> $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tilde{\sigma}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma})$

Definizione $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tilde{\sigma}) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma \circ \tilde{\sigma}(i) - \sigma \circ \tilde{\sigma}(j)}{i - j} =$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} \underbrace{\frac{\sigma \circ \tilde{\sigma}(i) - \sigma \circ \tilde{\sigma}(j)}{\tilde{\sigma}(i) - \tilde{\sigma}(j)}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)} \; \underbrace{\frac{\tilde{\sigma}(i) - \tilde{\sigma}(j)}{i - j}}_{\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma})} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma})$$

$\blacksquare$

Come dimostriamo la proposizione?

BdC ogni <u>ciclo</u> è prodotto di trasposizioni

<u>e</u> segno.

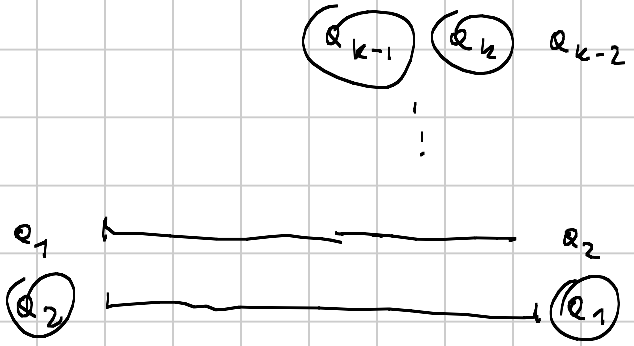
Caso $k = 3$ $\quad (a_1\, a_2\, a_3) = (a_1 a_2) \circ (a_2\, a_3)$

$$\begin{array}{lccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 \\
(a_2\, a_3) & a_1 & a_3 & a_2 \\
(a_1, a_2) & a_2 & a_3 & a_1
\end{array} \quad (a_1\, a_2\, a_3)$$

In generale $(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-2} a_{k-1})(a_{k-1} a_k)$

$a_1 \; a_2 \; \dots \; a_{k-2} \; a_{k-1} \; a_k$

$a_k \; a_{k-1}$

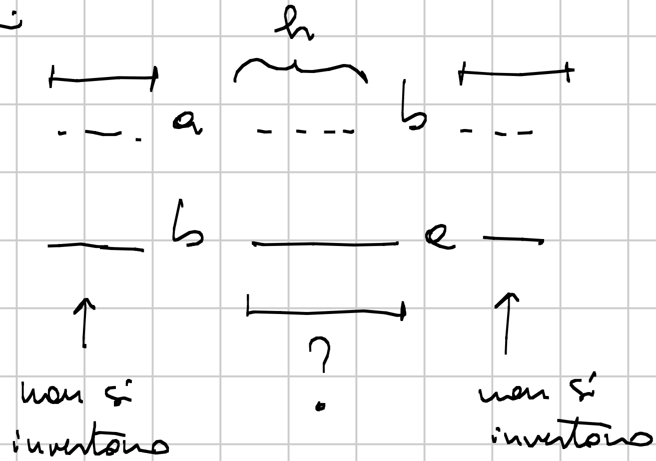


E il segno? Dipende solo dal numero di trasposizioni

Se abbiamo $2h$ trasp. $\longrightarrow$ $\text{sgn} = +1$

" " $2h+1$ " $\longrightarrow$ $\text{sgn} = -1$

Ogni trasposizione contribuisce un n.ro dispari di inversioni



$h \geq 0$

Quante inversioni ci sono in tutto? Se tra a e b ci sono h el.ti le inversioni sono h con a e h con b, quindi $2h$ e ci aggiungiamo lo scambio a con b, per un totale di $2h+1$ inversioni

<u>Allora</u>

$$\underset{\uparrow \atop \text{ciclo di lungh. } k}{(a_1 \dots a_k)} = \underbrace{(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-1} a_k)}_{k-1 \text{ trasp}}$$

Un ciclo di lunghezza pari è DISPARI

" " " dispari è PARI

Permutazioni senza punti fissi

Quelle con almeno un p.to fisso sono $\binom{n}{1}(n-1)!$ ma abbiamo tolto 2 volte quelle con esattamente 2 p.ti fissi.

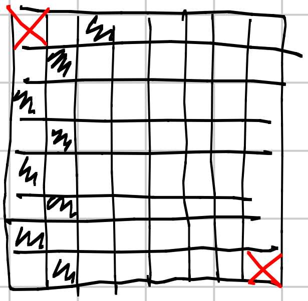
Dobbiamo andare a contare quelle con almeno 2 p.ti fissi che sono $\binom{n}{2}(n-2)!$

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \dots (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1}(n-1)! = n\cdot(n-1)! = \frac{n!}{1!} \qquad \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot(n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

$$n!\,\Big(\underbrace{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}}_{\sim \frac{1}{e}}\Big) \simeq \frac{n!}{e}$$

Colorazioni e Invarianti



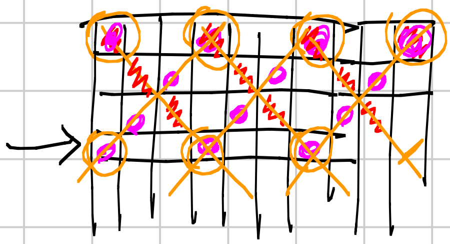
 si può ricoprire? NO

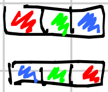
62 caselle 32 B 30 N

ma 

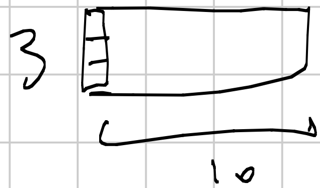
2. Scacchiera 10 × 10  33

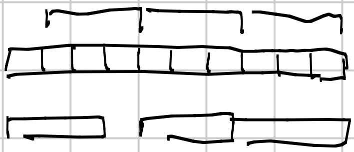
Dove può essere il quadratino scoperto?





34 R
33 B 33 V



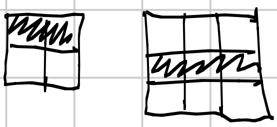


3. Scacchiera 101 × 101 con tasselli 2×2 o 3×3

$$101^2 = 4x + 9y$$

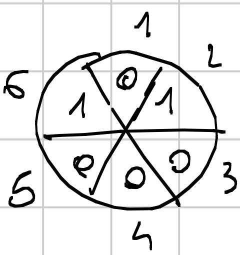
Coloriamo a strisce orizzontali bianche e nere

Ci sono 101 bianche in più



se mettiamo una 3×3 copriamo 3 bianche in + ma 101 non è multiplo di 3.

- Invarianti caselline {0, 1, ...}



- aumento 2 adiacenti di 1
- diminuisco 2 adiacenti di 1

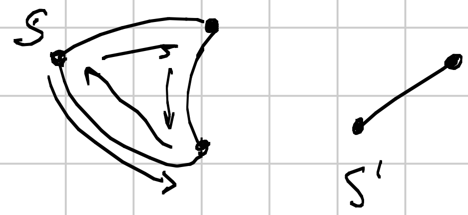
$\sum$ Posti dispari − $\sum$ posti pari è invariante

Non è possibile.

• Ci sono 12 amici che hanno magliette R e N.
Cambiano secondo maggioranza
Invariante coppie di colori diversi.

GRAFI

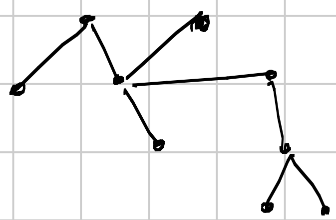
vertici e archi



* grafo connesso

* ciclo

- **Albero** grafo connesso SENZA cicli.



se tolgo un arco sconnetto

se aggiungo un arco ciclo

• Ogni albero ha almeno una foglia (i.e. vertice con un solo arco)

P. ass. ci sarebbe un ciclo

Formula: $V = E + 1$

Dim: per induzione Base • : $1 = 0 + 1$ ✓

passo induttivo:

passo con aggiungere NO

Togliamo un vertice, in particolare una foglia
entra in gioco l'ipotesi induttiva ✓

Esempio: Un labirinto 2012 x 2012 porte tra stanze adiacenti.

Quante possono essere al più le porte chiuse per poter arrivare da ogni stanza ad ogni altra stanza?

$2012 \times 2011 \times 2$: totale porte

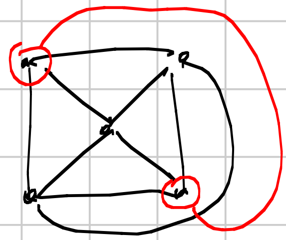
Quante devono essere aperte? stanze $- 1$

le stanze sono 2012×2012

Quindi $2012 \times (2011 \times 2 - 2012) + 1$

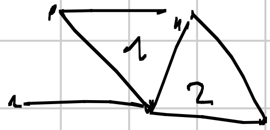
Grafi planari (connessi)

non ci sono archi che si intersecano

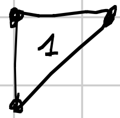


$$V + F = S + 2$$

3



2



Per induzione sul numero di archi o spigoli S

non $\emptyset$!

Base: • : $1 + 1 = 0 + 2$ ✓

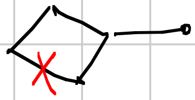
$n \geq 0$

Passo: supponiamo sia vero per tutti $S \leq n$

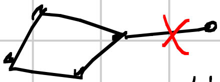
vogliamo che valga per $S = n+1$

Togliamo un arco: → non sconnettiamo

→ sconnettiamo



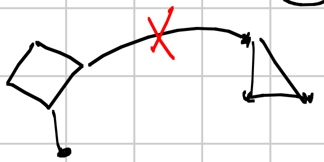
non sconnesso



sconnesso

- non sc. almeno un arco in meno e una faccia in meno ✓

- sconnesso ① ②



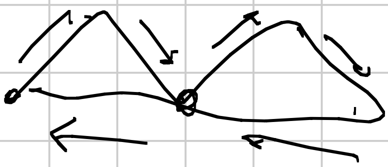
$$V_1 + F_1 = S_1 + 2 \qquad V_2 + F_2 = S_2 + 2$$

sommiamo

$$\underbrace{(V_1 + V_2)}_{=V} + \underbrace{(F_1 + F_2)}_{=F+1} = \underbrace{(S_1 + S_2)}_{=S-1} + 4$$

$$V + F = S + 2 \qquad \blacksquare$$

- Cammini chiusi su grafi planari connessi Euleriani



Un grafo planare connesso ammette un cammino chiuso sse # archi in uscita è pari per ogni vertice

[⇒] ogni volta che entro in un vertice devo uscire ✓

[$\Leftarrow$] partiamo con il nostro cammino prima o poi torniamo in un vertice già visto

* se è quello iniziale ✓
* se è intermedio devo uscirne per forza ma il numero di archi è finito quindi prima o poi torno all'origine.