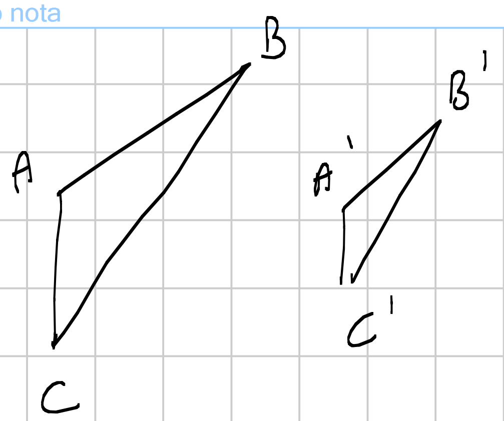
SENIOR 2012 - G3 BASIC

Titolo nota 06/09/2012

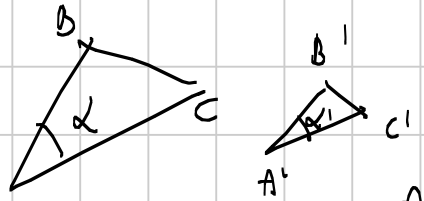


$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

I Due triangoli con 2 angoli congruenti sono simili.

II Due triangoli con 1 angolo congruente e i lati che lo comprendono in proporzione sono simili.

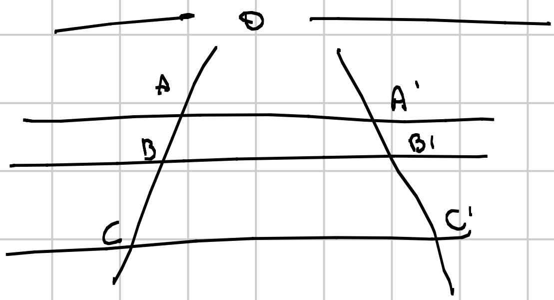


$\alpha = \alpha'$ $\qquad \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

III 3 coppie di lati in proporzione

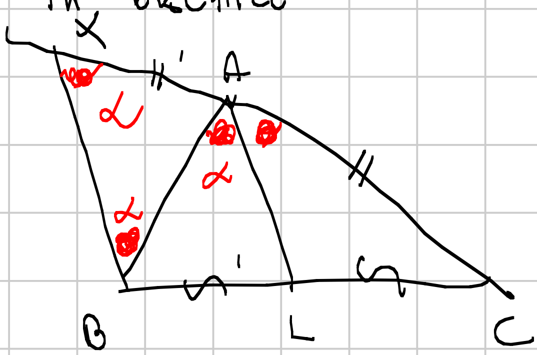
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

TALETE

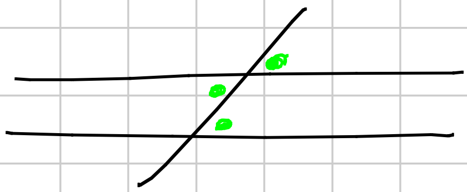


$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Esempio Th. bisettrice



$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

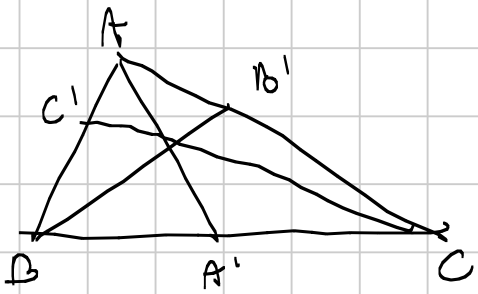


$X = AC \cap$ (parallela ad AL per B)

Per conto di angoli $\overset{\triangle}{ABX}$ isoscele $\longrightarrow AX = AB$

Per talete $\frac{LC}{AC} = \frac{BL}{AX} \Rightarrow \frac{LC}{AC} = \frac{BL}{AB} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$ ∎

Teo. Ceva



AA', BB', CC' allineati

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$$

e.g. bisettrici concorrono

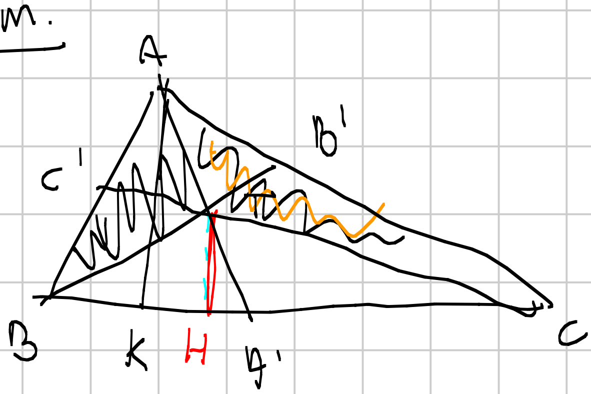
$$\frac{\cancel{c}}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} = 1$$

mediane concorrono

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Dim.

$[A] = \text{Area}$



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[BA'T]}{[CA'T]} = \frac{[BAT]}{[CAT]}$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[BA'A]}{[CA'A]}$$

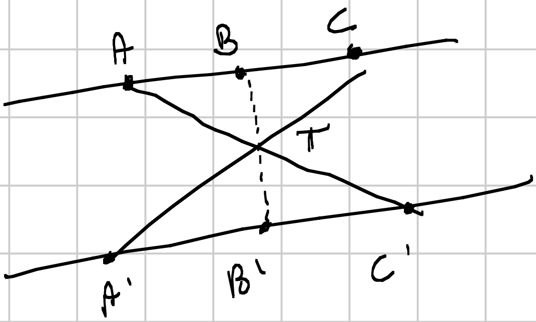
$$\frac{[BA'A]}{[CA'A]} = \frac{[BA'T]}{[CA'T]} \Rightarrow \frac{[BA'A]}{[BA'T]} = \frac{[CA'A]}{[CA'T]} \Rightarrow \frac{[BA'A]-[BA'T]}{[BA'T]} =$$

$$= \frac{[CA'A]-[CA'T]}{[CA'T]} \longrightarrow \frac{[BAT]}{[BA'T]} = \frac{[CAT]}{[CA'T]} \Rightarrow \frac{[BAT]}{[CAT]} = \frac{[BA'T]}{[CA'T]}$$

Analogamente $\frac{CB'}{B'A} = \frac{[CBT]}{[BAT]}$ e $\frac{AC'}{C'B} = \frac{[CAT]}{[CBT]}$

Quindi moltiplicando si ha la tesi

Dim. 2

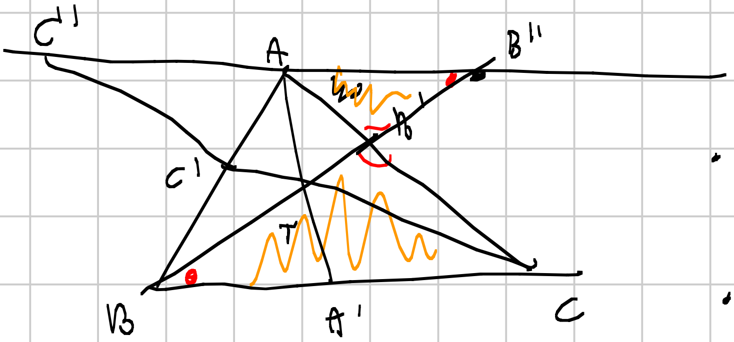


$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Updownarrow$$

$B, B', AC \cap A'C'$ sono allineati,

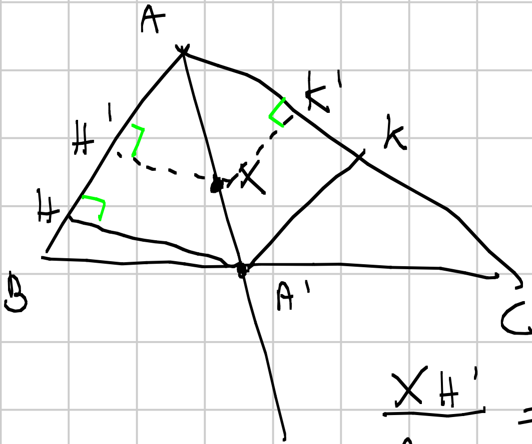
Provate a mostrarlo!



- $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{B''A}{\boxed{AC''}}$
- $\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{BC}{B''A}$
- $\dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{\boxed{AC''}}{BC}$

REMIND: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

CEVA $\boxed{V2}$



$$\frac{XH'}{XK'} = ?$$

$$\frac{XH'}{AX} = \frac{A'H}{AA'} \Rightarrow XH' = \frac{A'H}{AA'} \cdot AX$$

$$\frac{XK'}{AX} = \frac{A'K}{AA'} \Rightarrow XK' = \frac{A'K}{AA'} \cdot AX$$

Se faccio il rapporto $\dfrac{XH'}{XK'} = \dfrac{A'H}{A'K} = \dfrac{A'B \sin\beta}{A'C \sin\gamma} = \dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{b}{c}$

$$V(AA') \overset{X \in AA'}{=} \frac{d(X, AB)}{d(X, AC)} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{b}{c}$$

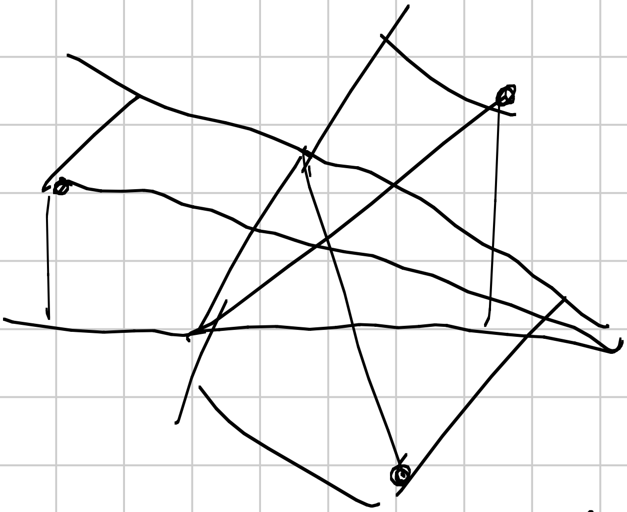
$$v(BB') = \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{c}{a}$$

$$v(CC') = \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{a}{b}$$

$$v(AA') \cdot v(BB') \cdot v(CC') =$$

$$= \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \Leftarrow$$

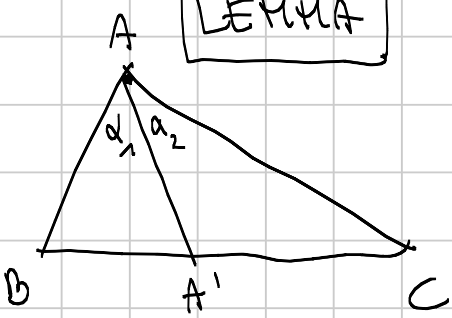
$$v(AA') \cdot v(BB') \cdot v(CC') = 1$$



CEVA $\boxed{V3}$

(trigonometrico)

$\boxed{\text{LEMMA}}$



Th sen $A\hat{B}A'$:

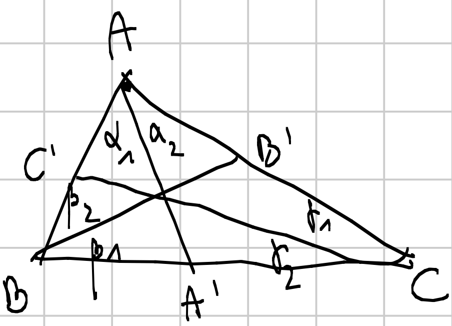
$$\frac{BA'}{AA'} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} \qquad \frac{A'C}{AA'} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$BA' = \frac{AA' \sin\alpha_1}{\sin\beta} \qquad A'C = \frac{AA' \sin\alpha_2}{\sin\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{c}{b}$$



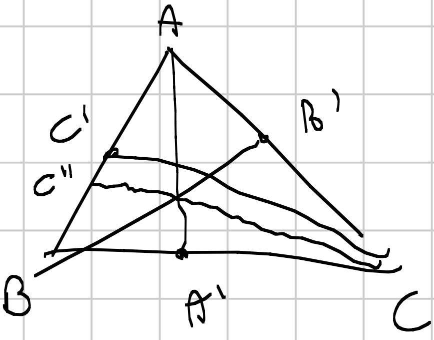
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$$

Le tre ceviane concorrono sse $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$

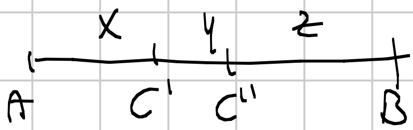
Idea dell'altra freccia



$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=1$$

Ma allora $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC''}{C''B}$



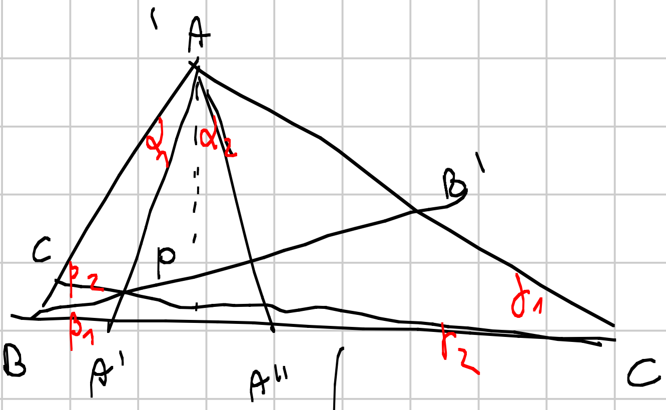
$$\frac{x}{y+z}=\frac{x+y}{z}$$

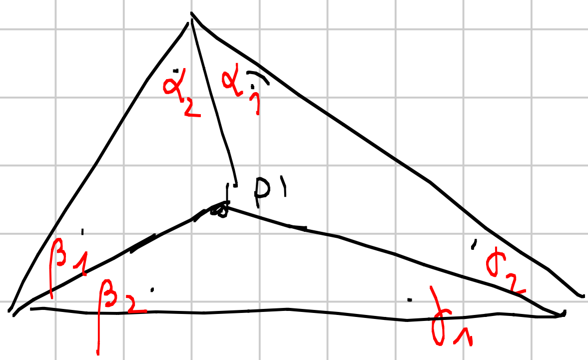
$$\Updownarrow$$

$$\cancel{xz}=xy+\cancel{xz}+y^2+yz$$

$$y(x+y+z)=0$$ ASSURDO

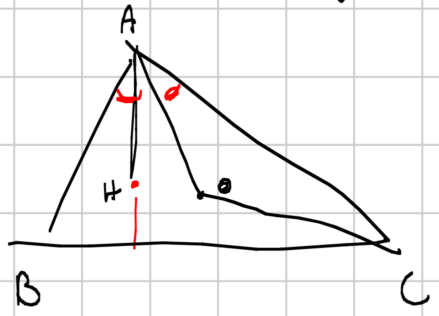
Esercizi





$$\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2}=1 \longrightarrow$$ le tre ceviane simmetriche risp. alle bisettrici concorrono

P e P' sono coniugati isogonali



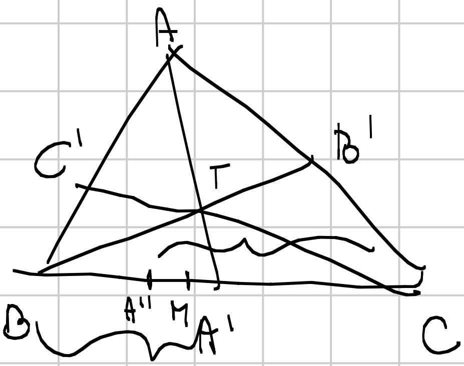
O, H coniugati isogonali

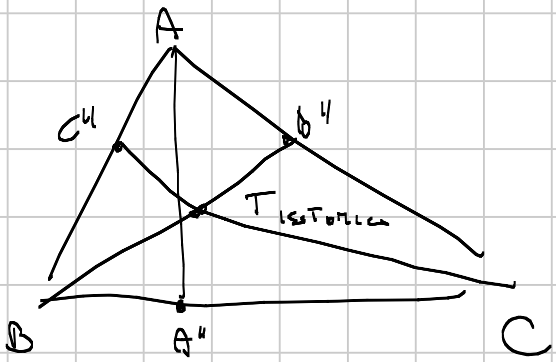
Lemoine

(G e K sono coniugati isogonali)

$\widehat{HAB} = 90 - \beta$

$\widehat{OAC} = \frac{180 - 2\beta}{2} = 90 - \beta$





$BA' = BM + MA'$

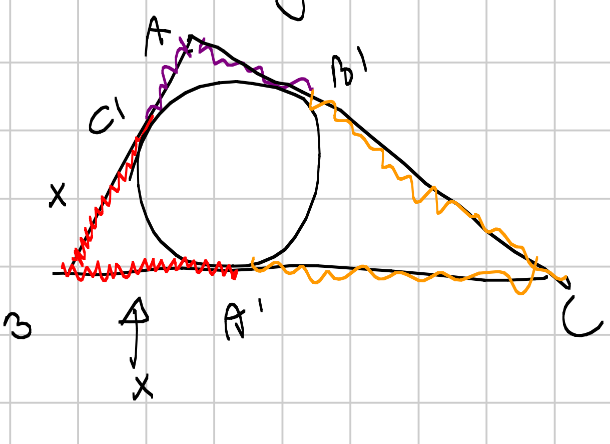
$CA'' = CM + MA''$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \leftrightarrow \frac{CA''}{A''B} \cdot \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} = 1$$

$\downarrow$

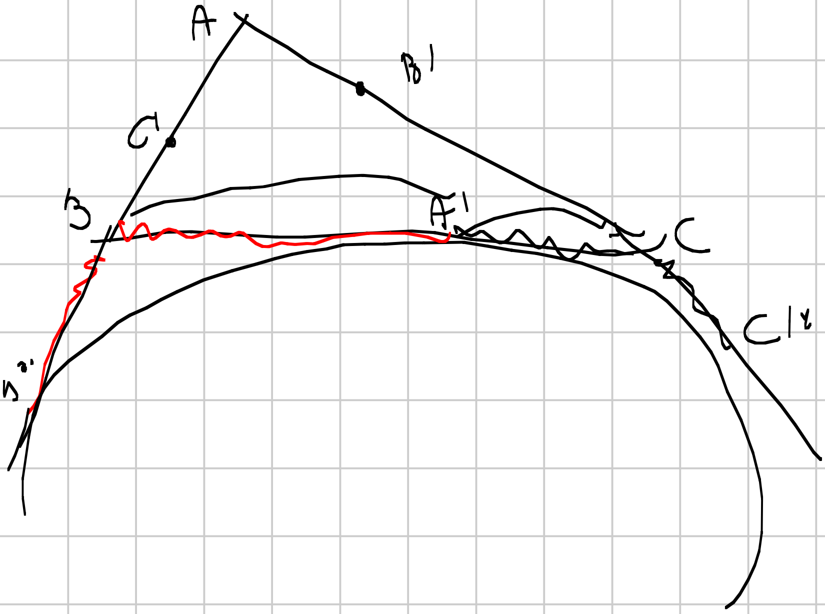
AA'', BB'', CC'' concorrono per Ceva inverso (nel coniugato isotomico di T)

P.to di Gergonne



$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

AA', BB', CC' concorrono in un punto che si chiama p.to di Gergonne.



$BA' = BB' = \cancel{AB'} - AB$

$AB'' = AC''$

$AB'' + AC'' = AB + BB'' + AC + CC'' =$

$= AB + BA' + AC + CA' =$

$= AB + AC + BC = 2p$

$AB' = AC' = p$

$BA' = p-c, \quad A'C = p-b$

$CB' = p-a, \quad B'A = p-c$

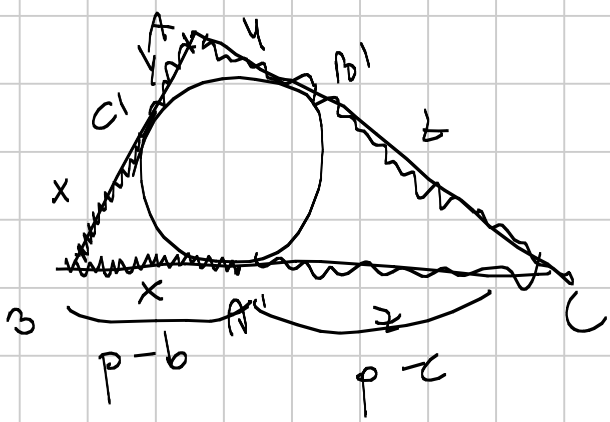
$AC' = p-b, \quad C'B = p-a$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{\cancel{p-c}}{\cancel{p-b}} \cdot \frac{\cancel{p-a}}{\cancel{p-c}} \cdot \frac{\cancel{p-b}}{\cancel{p-a}} = 1$$

$\Downarrow$

AA', BB', CC' concorrono in Nagel.

Ger



$$\begin{cases} x+z=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases} \rightarrow x+y+z=p$$

$\Downarrow$

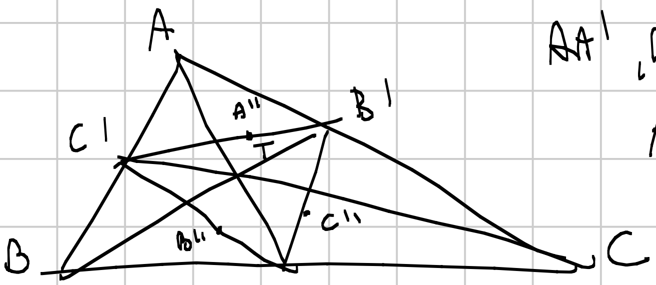
$x = p-b$

$y = p-a$

$z = p-c$

$\longrightarrow$ Nagel e Gergonne isotomici

Esercizio



AA', BB', CC' concorrono

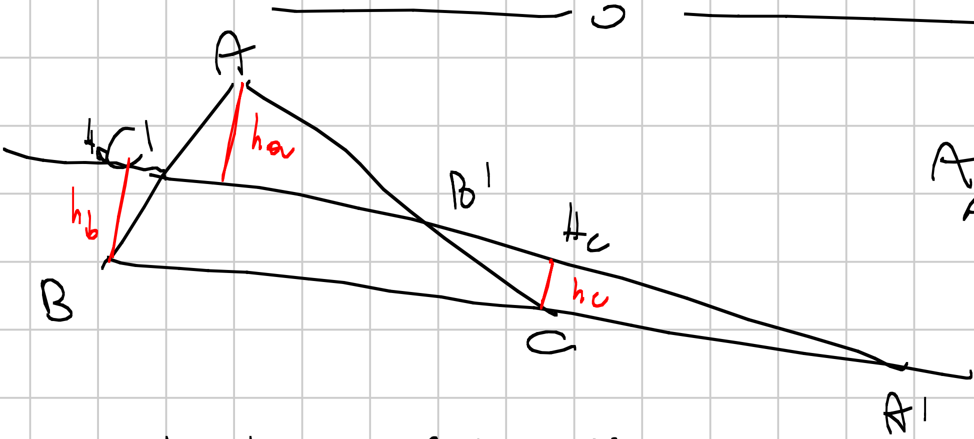
$A'' \in B'C'$ e calcola

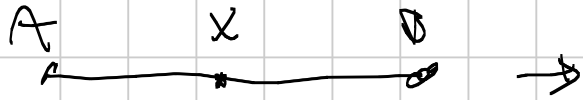
A'

AA'', BB'', CC'' concorrono $\Rightarrow$ $A'A''$, $B'B''$ e $C'C''$ concorrono.

FATELO!

— o —





Ax positivo
xA negativo

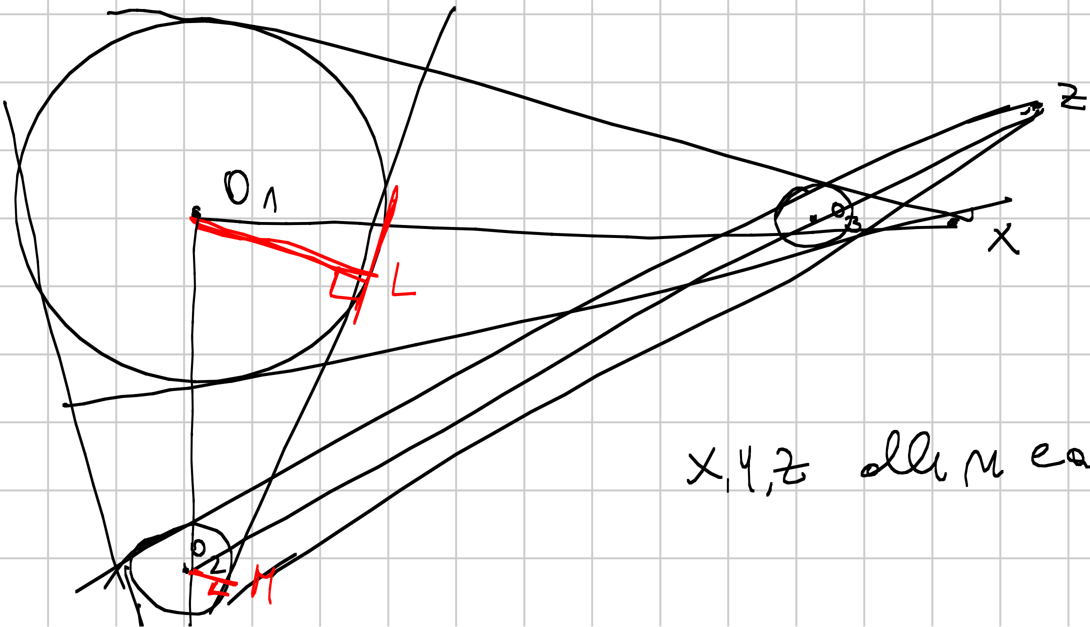
A', B', C' sui lati allineati se $\dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} \cdot \dfrac{AC'}{C'B} = -1$

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{h_b}{h_c}$$

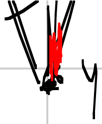
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{h_c}{h_a} \longrightarrow \prod \frac{BA'}{A'C} = -1$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{h_a}{h_b}$$

Esercizio



X, Y, Z allineati

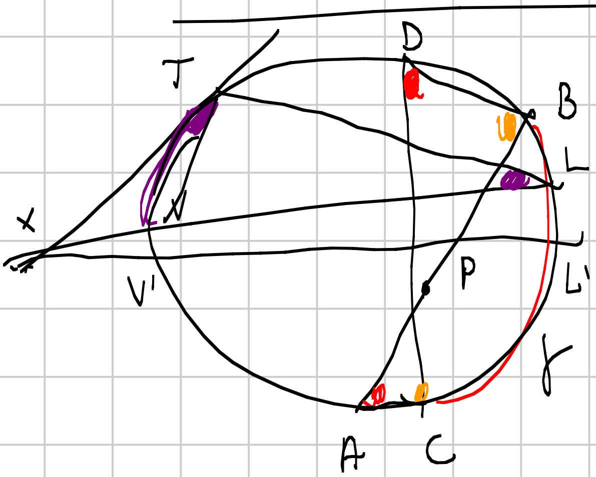


$$\frac{O_1Y}{YO_2} = \frac{O_1L}{O_2M} = -\frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{O_2Z}{ZO_3} = \frac{r_2}{r_3}$$

$$\frac{O_3X}{XO_1} = -\frac{r_3}{r_1}$$

$$\frac{O_1Y}{YO_2} \cdot \frac{O_2Z}{ZO_3} \cdot \frac{O_3X}{XO_1} = -\cancel{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 r_3}} = -1$$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

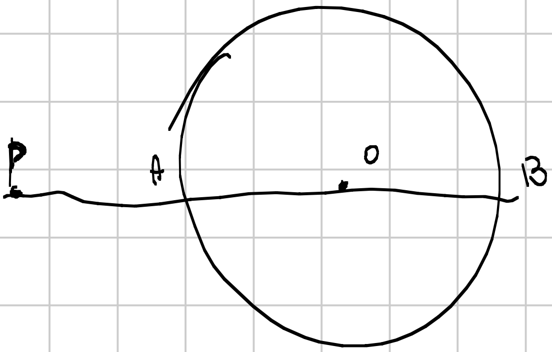
$XT^2 = XV \cdot XL = XV' \cdot XL'$

Valgono anche gli inversi

$Pow_\gamma P = -PA \cdot PB$ (Negativa)

$Pow_\gamma X = XT^2 = XV \cdot XL$ (Positiva)

P esterno

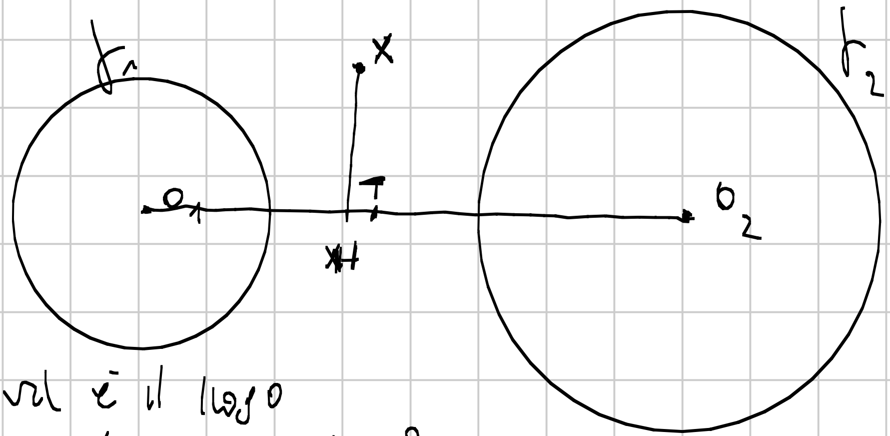


$PA \cdot PB = ?$

$(PO - OA)(PO + OB) =$

$= (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$

$Pow_\gamma P = OP^2 - r_\gamma^2$



Qual è il luogo

$$Pow_{\gamma_1} X = pow_{\Gamma_2} X \ ?$$

$$\downarrow$$

$$O_1X^2 - r_1^2 = O_2X^2 - r_2^2 \longrightarrow O_2X^2 - O_1X^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\begin{cases} O_1T + TO_2 = O_1O_2 \\ O_2T^2 - O_1T^2 = r_2^2 - r_1^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} O_1T + TO_2 = O_1O_2 \\ O_2T - O_1T = \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{O_1O_2} \end{cases} \longrightarrow \text{1 sola sol.}$$

$O_1O_2 \geq r_2 - r_1 \longrightarrow T$ si trova su O_1O_2

$O_1O_2 < r_2 - r_1 \longrightarrow T$ si trova fuori O_1O_2

Suppongo $\exists X \in$ luogo.

$$Pow_{\gamma_1} X = Pow_{\gamma_2} X \to O_2X^2 - O_1X^2 = r_2^2 - r_1^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow O_2H^2 + HX^2 - (O_1H^2 + HX^2) = r_2^2 - r_1^2 \longrightarrow$$

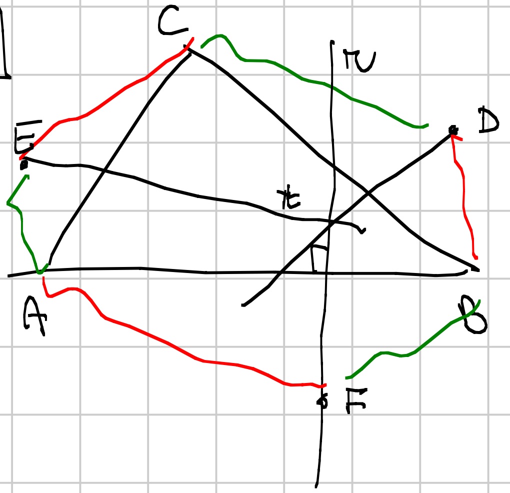
$$\longrightarrow O_2H^2 - O_1H^2 = r_2^2 - r_1^2$$

H è il punto su O_1O_2 che soddisfa la relazione. Ma allora $H \equiv T$. $\quad XT \perp O_1O_2$

Il luogo è la perpendicolare per T ad O_1O_2

LEMMA Dati A e B due punti, il luogo dei p.ti tali che $AX^2 - BX^2 = k$ è una retta $\perp$ AB

Teorema



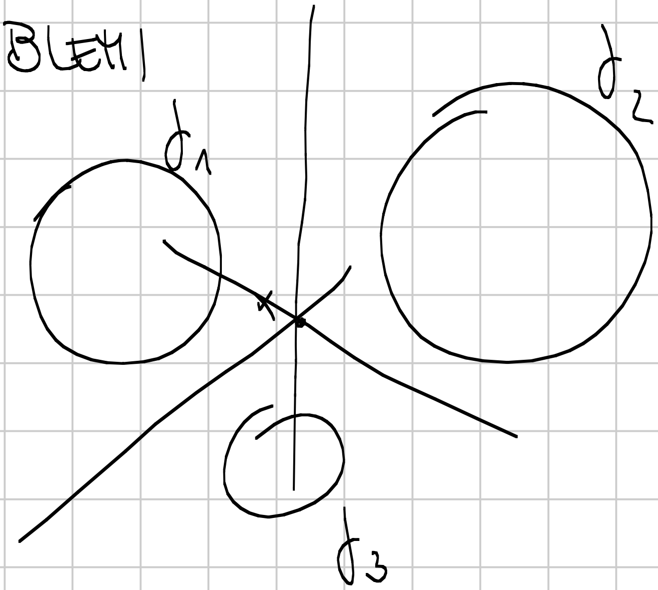
$r = \perp$ da F ad AB
$s = \perp$ da D a BC
$t = \perp$ da E a AC

r, s, t concorrono $\iff$

$\iff EA^2 + FB^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

PROBLEMI

1)



$X \in$ asse radicale (γ_1, γ_2)

$Pow_{\gamma_1} X = Pow_{\gamma_2} X$

$X \in$ asse radicale (γ_1, γ_3)

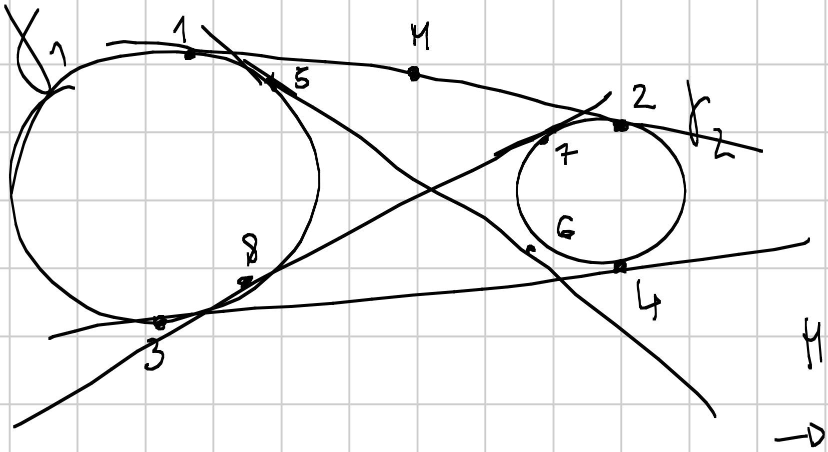
$Pow_{\gamma_1} X = Pow_{\gamma_3} X$

$\Downarrow$

$Pow_{\gamma_2} X = Pow_{\gamma_3} X \longrightarrow$

$\longrightarrow X \in$ asse radicale (γ_2, γ_3)

2)



I punti medi di 12, 34, 56, 78 appartengono all'asse radicale?

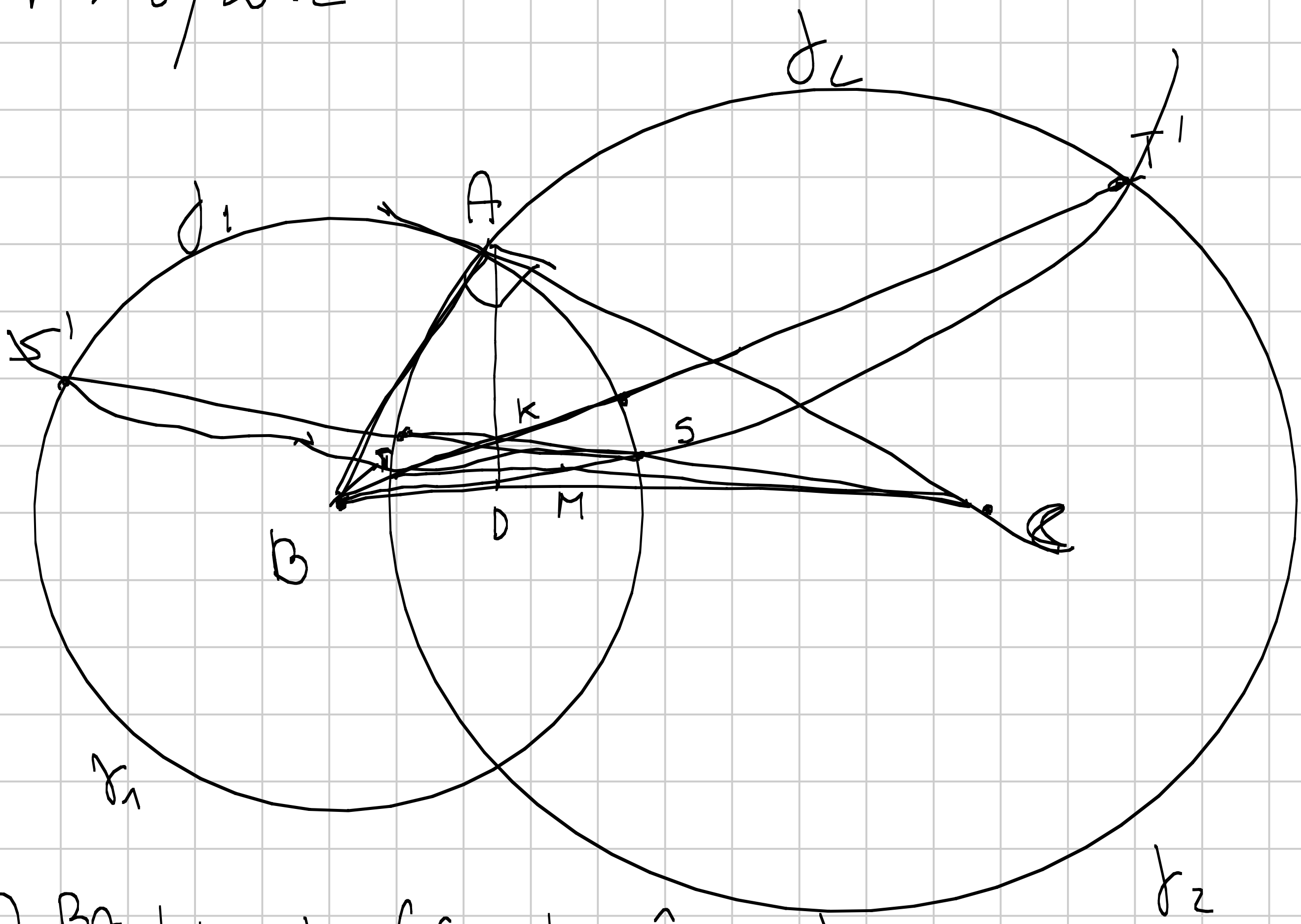
$M1 = M2 \to M1^2 = M2^2 \to$

$\to Pow_{\gamma_1} M = Pow_{\gamma_2} M$

Quindi $M \in$ asse radicale

Quindi tutti i punti medi delle tangenti comuni sono allineati sull'asse radicale.

IMO 5/2012



(1) BA tange γ_2 (C centro, $B\hat{A}C = 90°$)

CA tange γ_1 (B centro, $B\hat{A}C = 90°$)

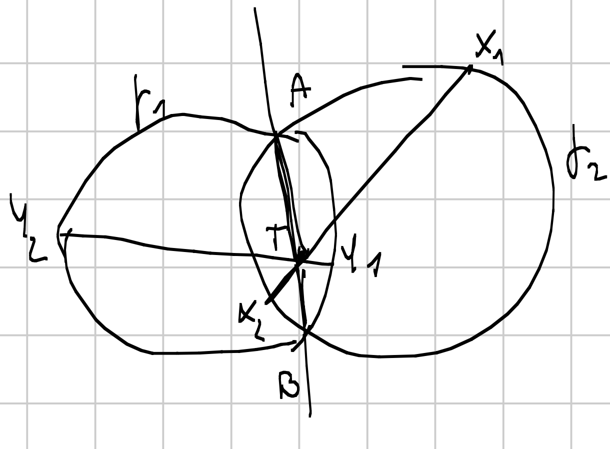
(2) AD è asse radicale di γ_1 e γ_2 perché $\mathrm{pow}_{\gamma_1} A = \mathrm{pow}_{\gamma_2} A$ e $AD \perp BC$

Fatto sulla casa

$T \in$ asse radicale di γ_1, γ_2. $T \cap \gamma_1 = \{Y_2, Y_1\}$

$T \cap \gamma_2 = \{X_2, X_1\}$

$X_1 X_2 Y_1 Y_2$ ciclico



$$\mathrm{Pow}_{\gamma_1} T = TY_1 \cdot TY_2 = TA \cdot TB$$

$$\mathrm{Pow}_{\gamma_2} T = TX_1 \cdot TX_2 = TA \cdot TB$$

$TX_1 \cdot TX_2 = TY_1 \cdot TY_2 \iff X_1Y_1X_2Y_2$ ciclico

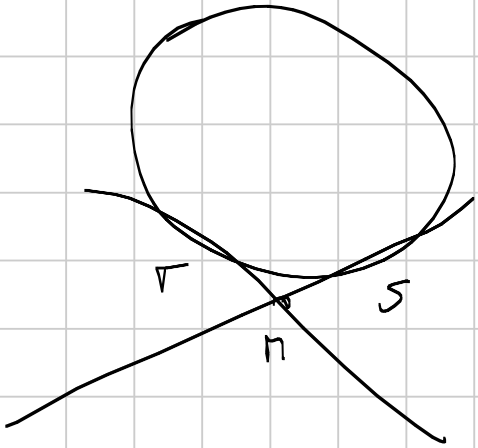
(3) S, T, S', T' sono conciclici

La nostra speranza è che BS, CT tangono la nuova circonferenza

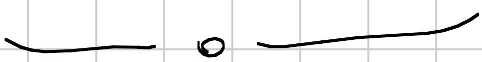
BS tange $\iff BS^2 \underset{\uparrow \text{ speranza}}{=} \overbrace{BT \cdot BT' = BA^2}$

$\uparrow$ BA tange γ_2

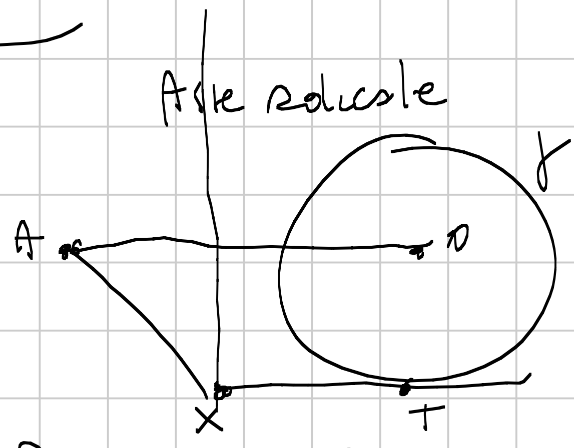
Ma $BA = BS$ quindi la speranza è vera! BS tange, CT tange



$MS = MT$



Asse radicale = Asse



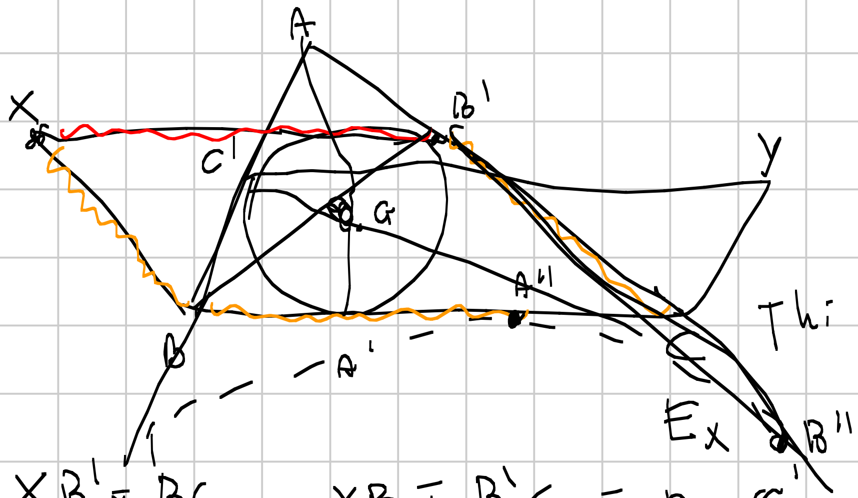
$Pow_O X = OX^2 - r^2$

$Pow_A X = AX^2$

$Pow_\gamma X = OX^2 - r^2$

$OX^2 - r^2 = AX^2 \to OX^2 - AX^2 = r^2$

BST 2010/5



$BCB'X$, $CBC'Y$ parall.

Th: $GX = GY$

$XB' = BC$, $XB = B'C = p - c$

$BA'' = p - c = BX$

X come circonferenza degenere $BX = BA'' \to$
$\to BX^2 = BA''^2 \to$
$\to Pow_X B = Pow_{E_X} B$

$B'B'' = \underset{p}{AB''} - \underset{(p-a)}{AB'} = a = BC = XB'$

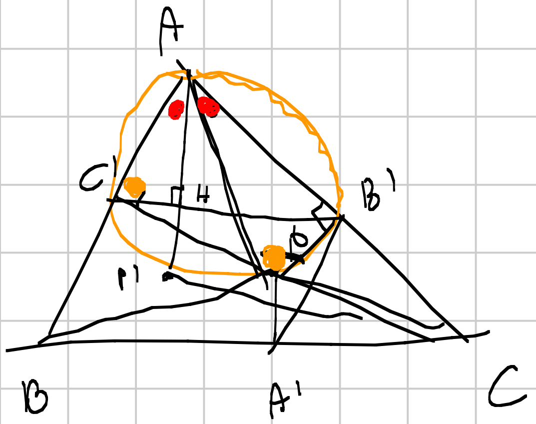
$B'B'' = XB' \to$
$\to B'B''^2 = XB'^2 \to$
$\to Pow_{E_X} B' = Pow_X B'$

$\to BB'$ è asse radicale di X e E_X
CC' è asse radicale fra Y e E_X

(X, Y, E_X)

$BB' \cap CC' = G$ ed è il punto per cui passa l'asse radicale fra X e Y
ma l'asse radicale fra X e Y è l'asse, quindi $G \in$ asse XY, $GX = GY$

TRIANGOLI PEDALI

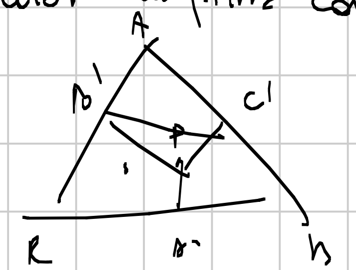


$AC'PB'$ ciclico

Se traccio la perpendicolare da A a $B'C'$, $C'\hat{A}H = PAB'$ per conto di angoli

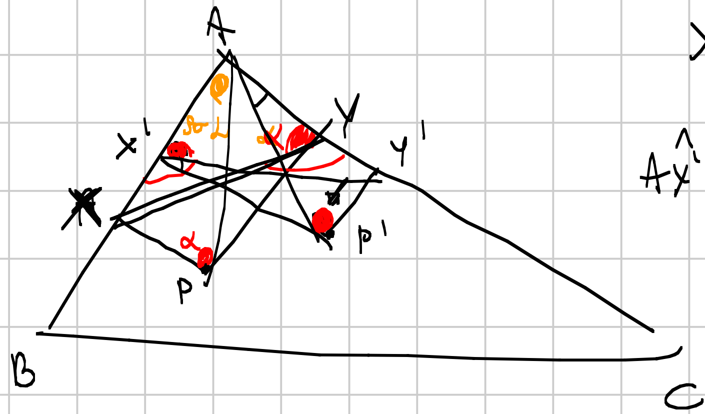
(1) Le perpendicolari condotte da A a $B'C'$, da C a $A'B'$, da B a $A'C'$ sono le simmetriche di AP, CP, BP rispetto alle bisettrici giuste. Ciò vuol dire che siccome AP, BP, CP concorrono le perpendicolari di prima concorrono in P'

1) Proprietà



$AP' \perp B'C'$ et simila.

Cosa posso dire su $XX'YY'$?



$A\hat{X'}Y' = A\hat{P'}Y' = 90 - P'\hat{A}Y'$

$\parallel$

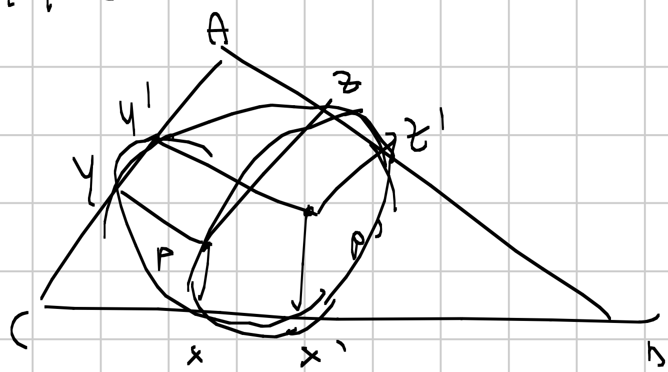
$90 - \alpha$

$\Downarrow$

$AP'Y' = \alpha = A\hat{X'}Y'$

Per uguaglianza di angoli

$XX'YY'$ è ciclico



$\underline{\underline{YY'ZZ'}}^{\gamma_1}$, $\underline{\underline{XX'}}^{\gamma_2}$$\underline{YY'}$, $\underline{XX'}^{\gamma_3}$$\overline{ZZ'}$ ciclici

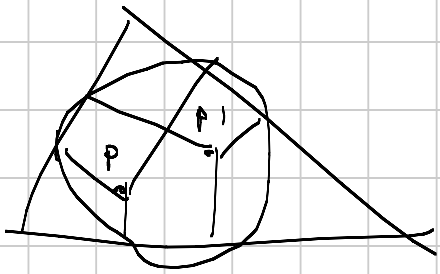
YY' è asse radicale fra γ_1 e γ_2

XX' " " " γ_2 e γ_3

ZZ' è " γ_1 e γ_3

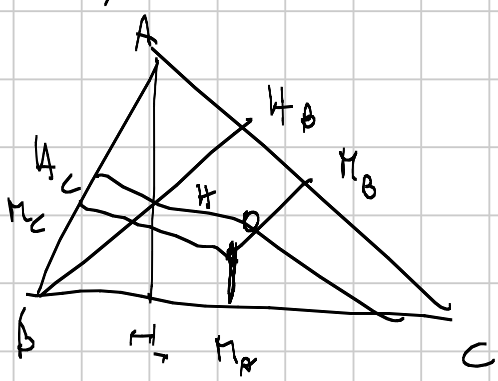
Ma questi dovrebbero concorrere. Però non lo fanno! Assurdo! Quindi non è vero che stanno su tre circonferenze diverse ma su una sola

2)



I triangoli pedali di P e P' sono conciclici

Es. $P \equiv O$, $P' \equiv H$



$H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C$ stanno sulla stessa circonferenza (Cfr. di Feuerbach)

(e coll.)

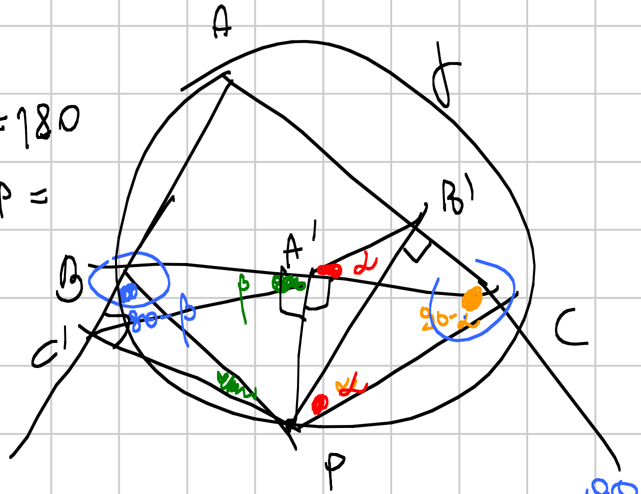
Tutti i punti sulla cfr circoscritta fanno degenerare il triangolo pedale

Se $P \in \gamma$ $A'B'C'$ allineati

$\hat{ABP} + \hat{ACP} = 180$

$\hat{ACP} = 180 - \hat{ABP} =$

$= \hat{PBC'}$

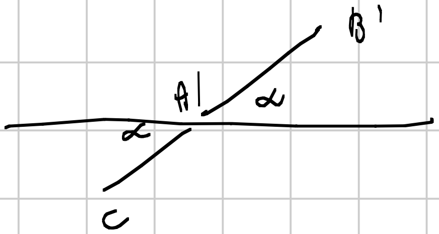


$B'CPA'$ ciclico $\to$

$\to B'\hat{C}P = 90 - \alpha$

$BC'A'P$ ciclico

$90 - \alpha = 90 - \beta$

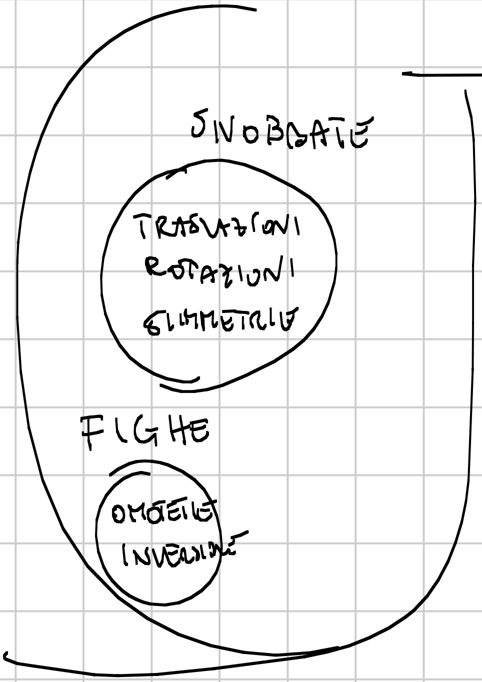


$\alpha = \beta$

B', A', C' allineati

La retta A'B'C' si chiama retta di Simson di P

Proprietà interessante (difficile). Il punto medio di PH dove H è l'ortocentro, sta sulla retta di Simson di P

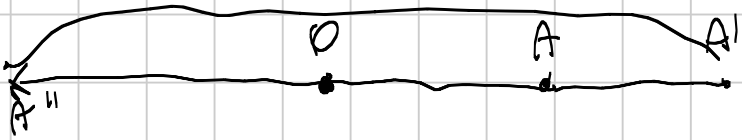


OMOTETIA (O, k) $k \in \mathbb{R}$

$A \to A'$ O, A, A' allineati

$$\frac{OA'}{OA} = k$$

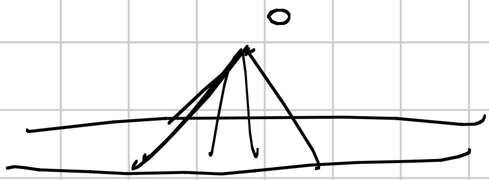
- Se $k > 0$, A, A' stanno dalla stessa parte rispetto ad O
- Se $k < 0$ A, A' stanno da parti opposte rispetto ad O



Centro O rapporto 2 (A')
" " " -2 (A'')

Cosa mantengono le omotetie:

1) Retta → Retta parallela

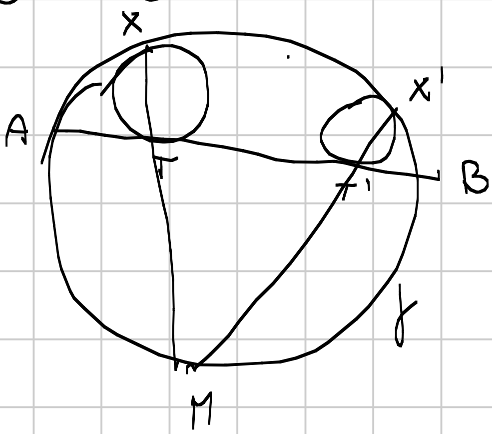


2) Rapporti fra distanze sono mantenuti e fanno k

1) Mantiene gli angoli
2) Circonferenze $\to$ Circonferenze

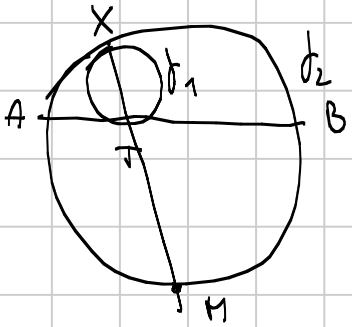
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

USIAMOLE!

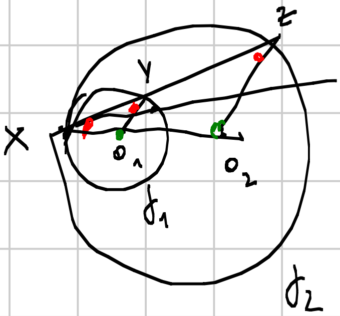


Th XT, $X'T'$ concorrono su γ.

Lemma noto



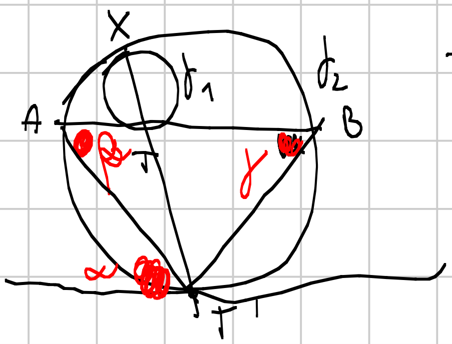
X, T, M punto medio di AB sono allineati



$$\frac{XZ}{XY} = \text{costante} = \frac{XO_2}{XO_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

XYO_1 è isoscele

XZO_2 è isoscele



Dopo l'omotetia

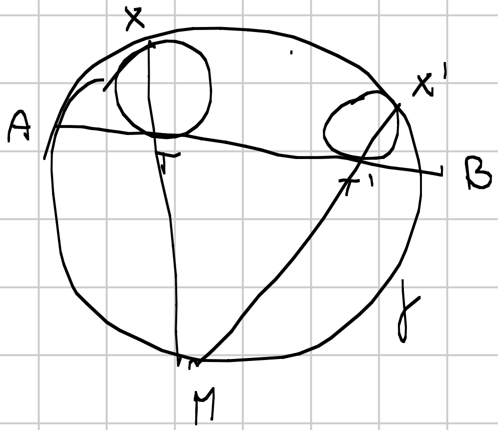
$T \to T'$

$AB \to$ tangente in T'

$\alpha = \beta$ perché alterni interni $\to$

$\alpha = \gamma$ perché angoli alla cfr

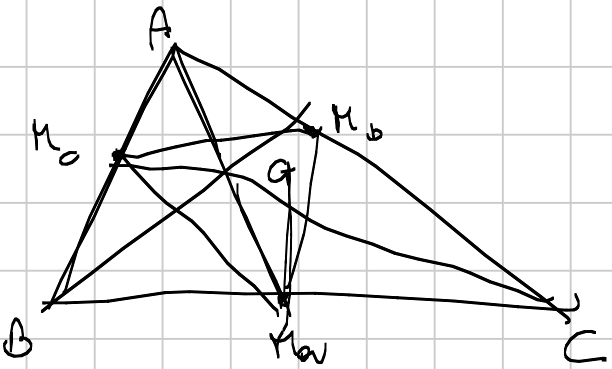
$\to \beta = \gamma \to T'$ punto medio dell'arco AB



Per questo mostrato XT e $X'T'$ concorrono in M medio di $\widehat{AB}$.

---

(2)



$$\frac{AG}{GM_a} = 2 = \frac{BG}{GM_b} = \frac{CG}{GM_c}$$

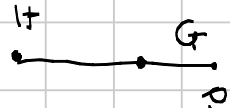
Esiste un'omotetia di centro G e rapporto $k = -\frac{1}{2}$ che manda $A \to M_a$, $B \to M_b$, $C \to M_c$

$$H_{ABC} \to H_{M_a M_b M_c}$$

$M_a H_{M_a M_b M_c} \perp M_b M_c \parallel BC \to M_a H_{M_a M_b M_c} \perp BC$

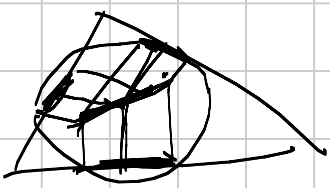
$\to M_a H_{M_a M_b M_c}$ è l'asse $\to H_{M_a M_b M_c} = O$

$$H \to O$$

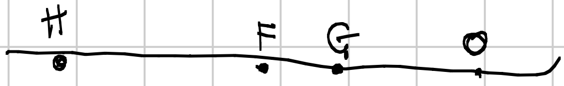


H, G, O sono allineati (retta di Eulero) $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$

Da prima il centro della cfc circoscritta il pedale di P e P' è a metà fra questi due

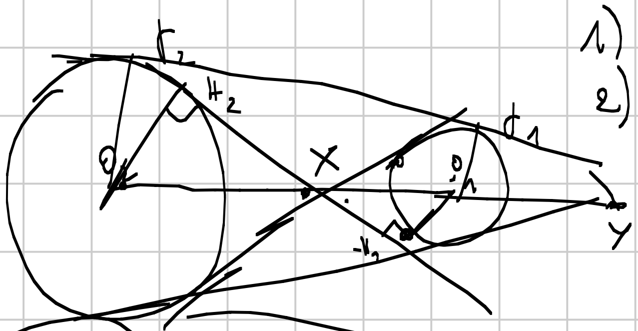


Da prima: F centro della circonferenza di Feuerbach è il punto medio di OH



$$\frac{OG}{GF}=2$$

Date Γ_1, Γ_2 quante omotetie esistono che mandano una nell'altra?



1) il centro sta su O_1O_2
2) Il rapporto è obbligato ed è $\frac{r_2}{r_1}$

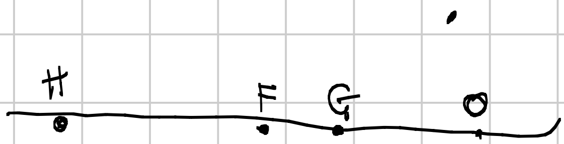
I punti sono le intersezioni delle tangenti comuni esterne e interne

$$\frac{O_2X}{XO_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{O_2Y}{YO_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

Quali sono i centri di omotetia di Feuerbach e circoscritta?

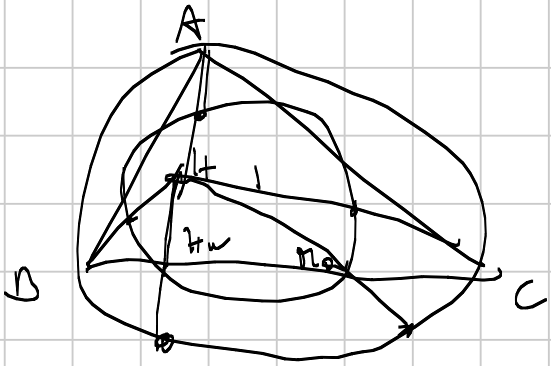
G è uno dei centri di omotetia fra Feuerbach e $\odot ABC$



$$\frac{r_{circoscritta}}{r_{Feuerbach}} = 2$$

$$\frac{OY}{YF}=2$$

Quindi H è l'altro centro di omotetia fra Feuerbach e $\odot ABC$.



L'omotetia di centro H e fattore 2/

$H_a \rightarrow$ simmetrico di H rispetto a BC

$M_a \rightarrow$ simmetrico di H rispetto a M_a

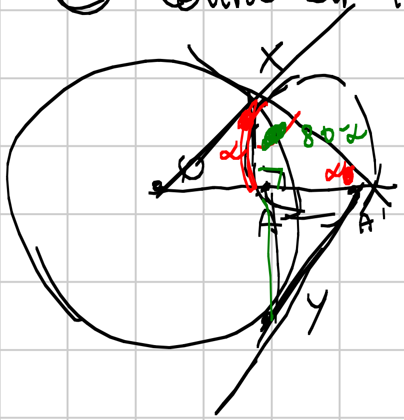
LEMMA I simmetrici di H rispetto ai lati e i simmetrici di H rispetto ai punti medi dei lati stanno sulla circoscritta.

FATTO 2 Anche i punti medi di AH, BH e CH sono su Feuerbach

<u>Esercizio</u> (difficile) Nagel, Incentro, Baricentro sono allineati e $\frac{GN}{NI} = 2$

INVERSIONE CIRCOLARE

O centro di inversione circonferenza centrata in O di raggio r.

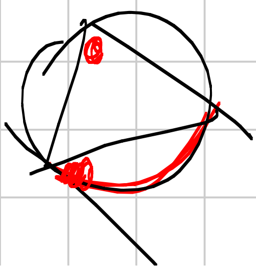


$f(A) = A'$

O, A, A' sono allineati, A, A' stanno dalla stessa parte rispetto ad O e $\underline{OA \cdot OA' = r^2}$

1) X, A, Y sono allineati. $OX^2 = r^2 = OA \cdot OA' \rightarrow$

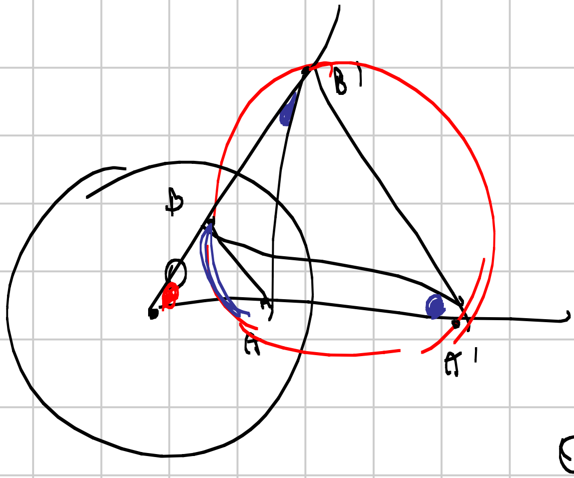
$\rightarrow X\hat{A}A' = 90°$



Analogamente $A'\hat{A}Y = 90° \rightarrow X, A, Y$ allineati.

P

Le distanze?



$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$

$\Downarrow$

$ABA'B'$ è ciclico

$\overset{\triangle}{OBA'} \sim \overset{\triangle}{OB'A}$

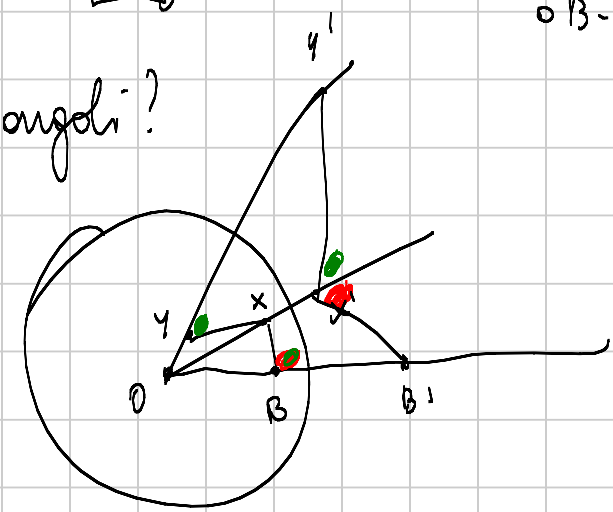
$\Downarrow$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB \cdot OA}{r^2} \Longleftarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA \cdot OB}{OB' \cdot OB}$$

$$\rightarrow A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OB \cdot OA}$$

2) E gli angoli?

$B\hat{X}Y$ e $B'\hat{X'}Y'$?



$B\hat{X'}Y' = \bullet + \bullet =$

$= 180 - O\hat{B}X + 180 - O\hat{Y}X =$

$= 360 - O\hat{B}X - O\hat{Y}X =$

$= B\hat{X}Y + Y\hat{O}B$

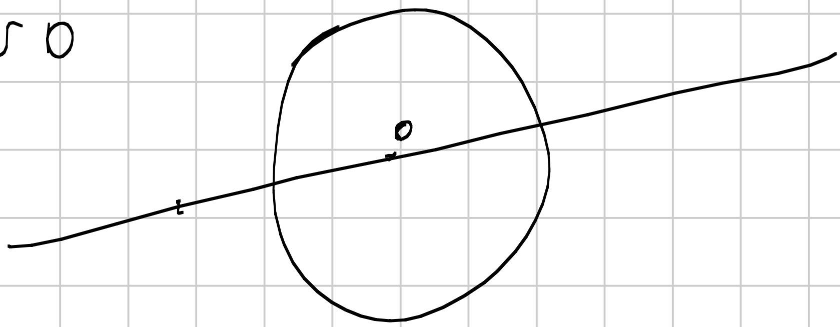
<u>Lemma</u> $B'\hat{X'}Y' = B\hat{X}Y + B\hat{O}Y$

3) Dove vanno le rette?

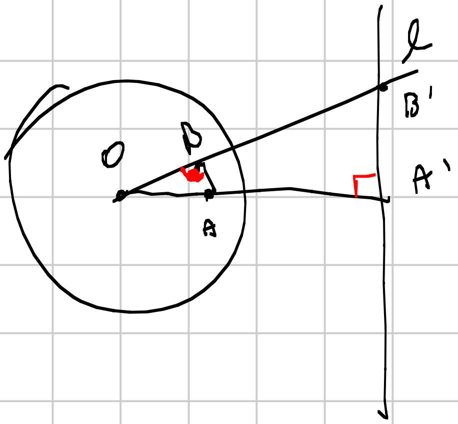
a) Una retta per O

$\Downarrow$

se stessa



b) Una retta qualsiasi → ? Circonferenza di diametro OX, dove X è l'inverso dell'intersezione fra l e la perpendicolare passante per O



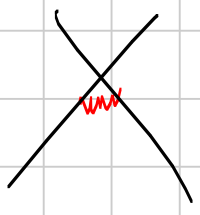
c) Una cfr passante per O → retta

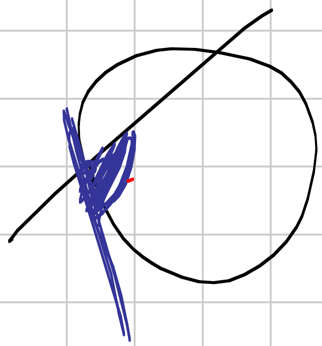
d) Una cfr generica dove va? → Cfr generica

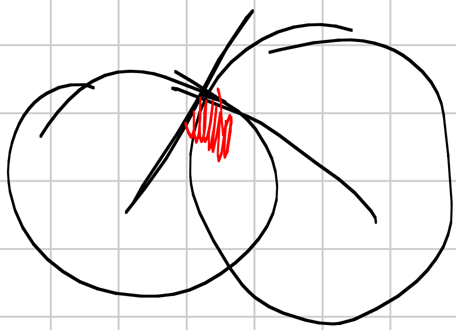
<u>Idea:</u> Con le relazioni sugli angoli dimostrare che

A, B, C, D ciclici → A', B', C', D' ciclici

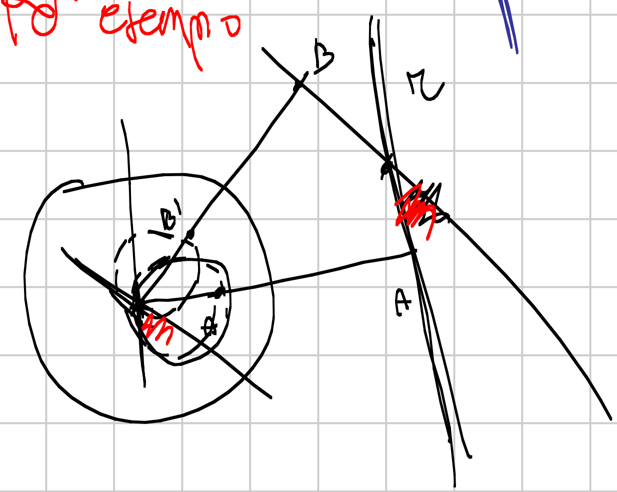
4) Gli angoli si mantengono



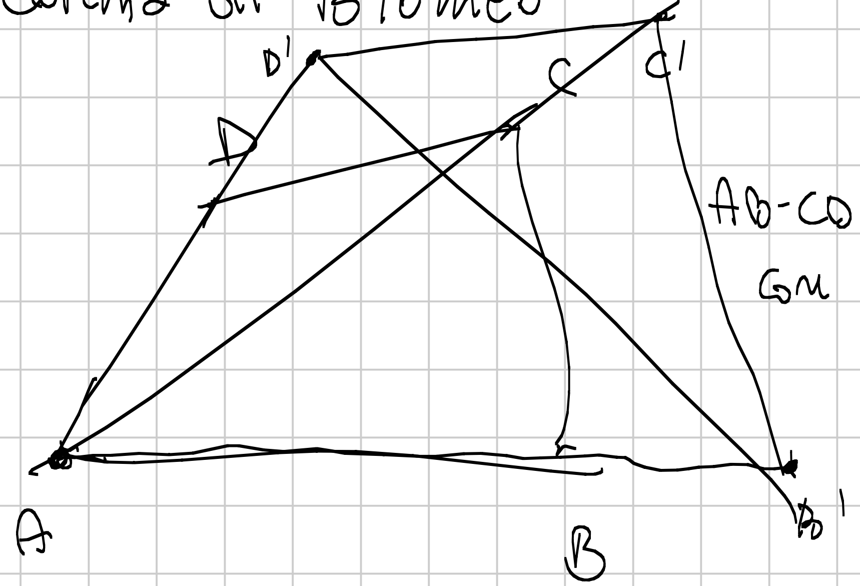




Per esempio



Teorema di Tolomeo



$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

con uguaglianza $\Leftrightarrow$ $\odot ABCD$

$$D'C' = DC \cdot \frac{r^2}{AD \cdot AC} \qquad D'B' = DB \cdot \frac{r^2}{AD \cdot AB}$$

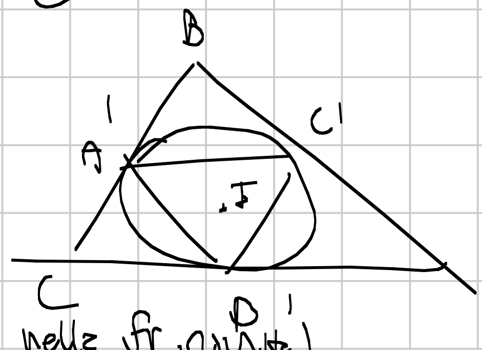
$$B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC}$$

$$D'C' + C'B' \geq D'B' =$$

$$\frac{DC}{AD \cdot AC} + \frac{BC}{AB \cdot AC} \geq \frac{DB}{AD \cdot AB}$$

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD \geq DB \cdot AC$$

Se fosse retto
acuto, degenere
e vale l'uguaglianza

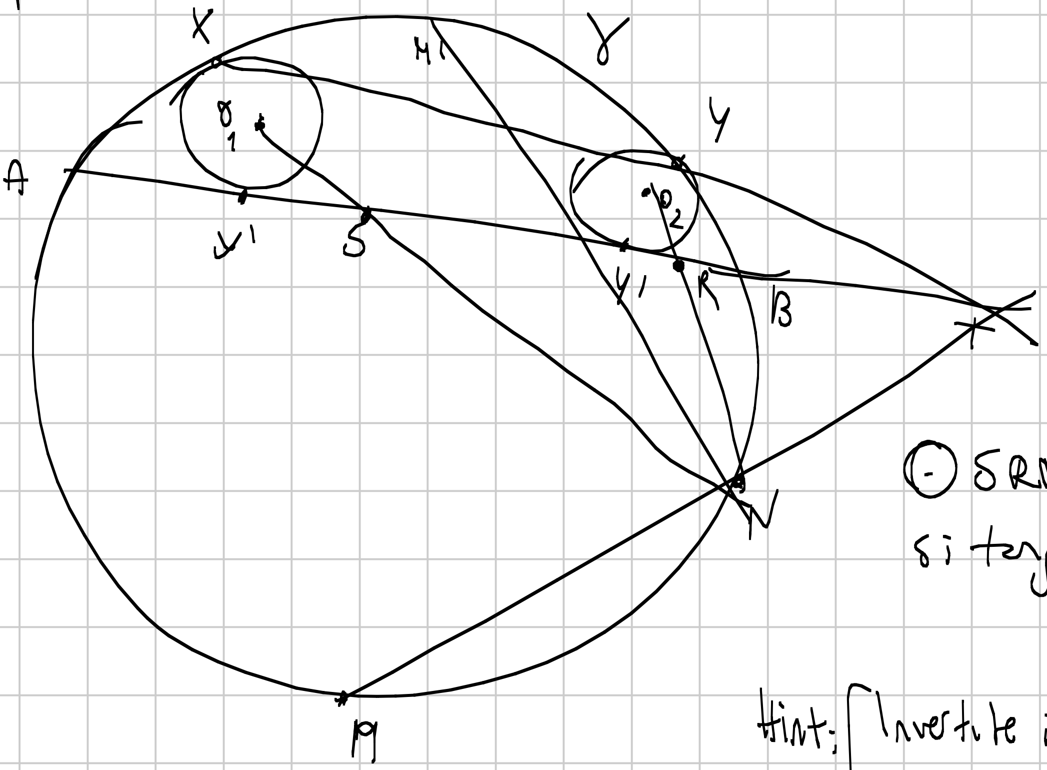


1) Dimostrare che OI è la retta di Eulero di A'B'C'

(Hint: inversioni nella circonferenza inscritta)

Ricorda che $\odot[E] \to \odot[F]$ allora E, F sono allineati col centro di inversione

c) X esperti



⊙ SRN, γ si tangono in N

Hint: [Invertite in N + simmetria rispetto a NM' dove M' è pto medio dell'altro arco AB]

FINE