SENIOR 2012 – Basic – Miscellanea (Janos)

Titolo nota 07/09/2012

ESERCIZIO 1

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z}$

Le somme di forma $a_i + a_j : 3 \mid a_i + a_j$ sono almeno 7

Tesi: Dimostrare che $3 \mid a_i$

Dim: Per Pigeonhole, almeno un a_i compare in 3 coppie

$3 \mid a_1 + a_2$
$3 \mid a_1 + a_3$ $\Rightarrow a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \ (3)$
$3 \mid a_1 + a_4$

a_5 deve comparire perché $\binom{4}{2} = 6$ e $6 < 7$

$a_5 + a_1 \vee a_5 + a_2 (a_3, a_4)$

$\Rightarrow a_1 \equiv a_5$ e $a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \vee$
$(a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv a_5)$

In questo caso sono ovviamente tutti $\equiv$ perché se no ci sarebbero solo 4 coppie, ma potrei prenderne per esempio due $\equiv 1$ e tre $\equiv 2$ (3). Ma ciò mi genera solo 6 coppie accettabili, quindi dovrebbero essere tutti $\equiv$ tra loro e quindi $\equiv 0$ (3).

c.v.d.

se le coppie in considerazione fossero 8, 9, 10 la tesi iniziale

$\equiv 0 \ (3)$

sarebbe comunque vera.

questo problema si può risolvere anche con un grafo, infatti basta considerare i vertici come gli a_i e gli spigoli come gli accoppiamenti tra a_i e a_j.

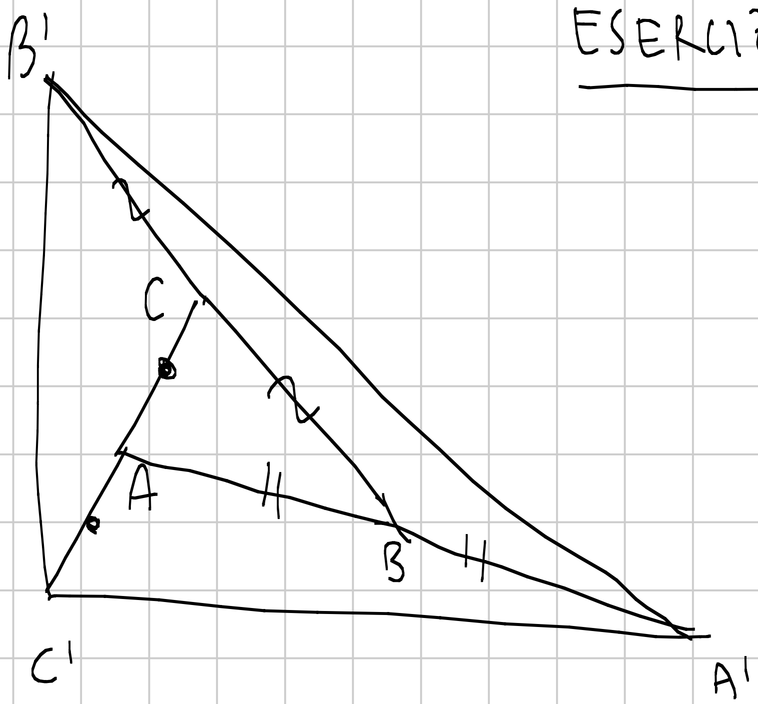
ESERCIZIO 2

dati i punti A', B', C' determinare il triangolo ABC t.c.

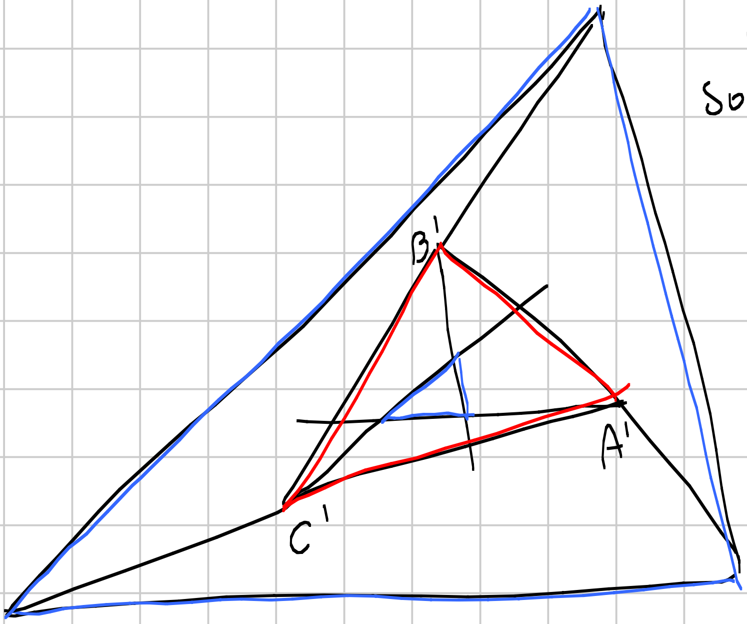
$\overline{AB} = \overline{BA'}$

$\overline{AC} = \overline{AC'}$

$\overline{CB} = \overline{CB'}$



Congettura di Lisa (Lentati)



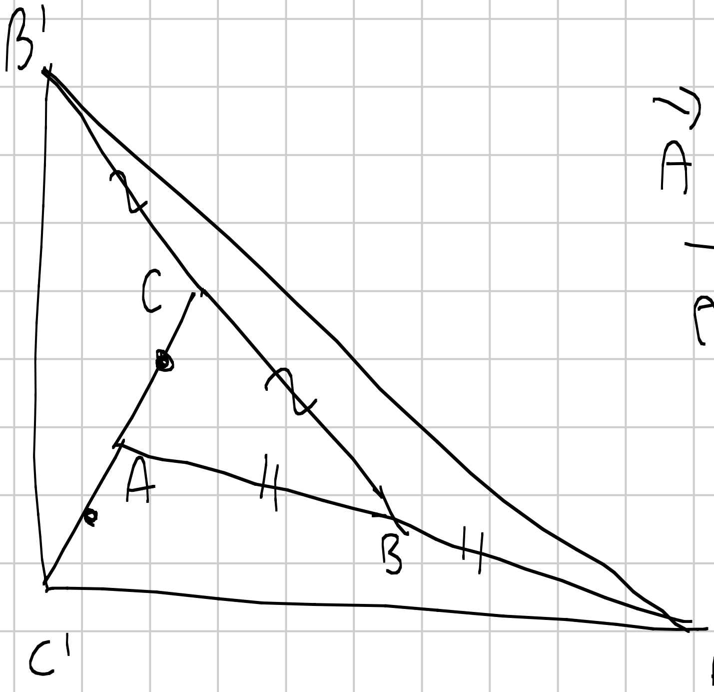
i due triangoli blu sono OMOTETICI perchè hanno lati paralleli per costruzione

A triangolo Blu grande $= 7\, A$ triangolo rosso

A triangolo rosso $= 7\, A$ triangolo blu piccolo

$\Rightarrow A$ tr Blu grande $= 49$ tr Blu piccolo

Dimostrazione DEL PROF. (con i vettori)



$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$\vec{A'} = \vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) =$

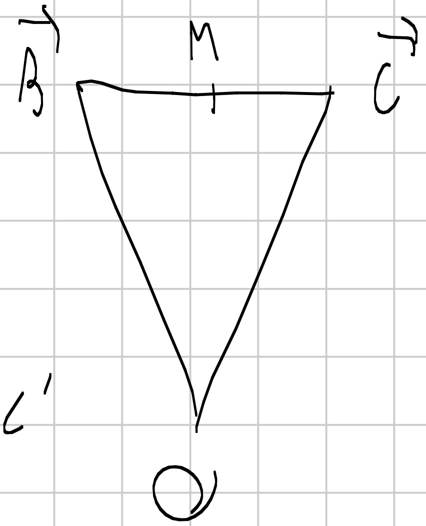
$= 2\vec{B} - \vec{A}$

$$\begin{cases} \vec{A}' = 2\vec{B} - \vec{A} \\ \vec{B}' = 2\vec{C} - \vec{B} \\ \vec{C}' = 2\vec{A} - \vec{C} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - x = a \\ 2z - y = b \\ 2x - z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - a \\ y = 2z - b \\ z = 2x - c \end{cases}$$

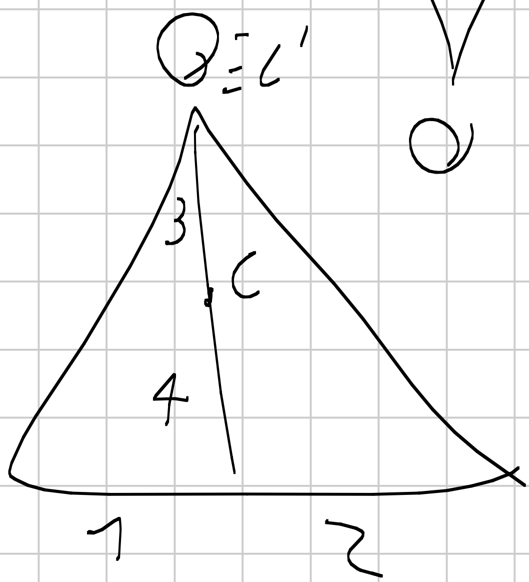
$$\dots \begin{cases} \vec{A} = \dfrac{4\vec{C}' + 2\vec{B}' + \vec{A}'}{7} \\ \text{e ciclici} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se metto l'origine in C', $4\vec{C}' = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{2\vec{B}' + \vec{A}'}{7}$$

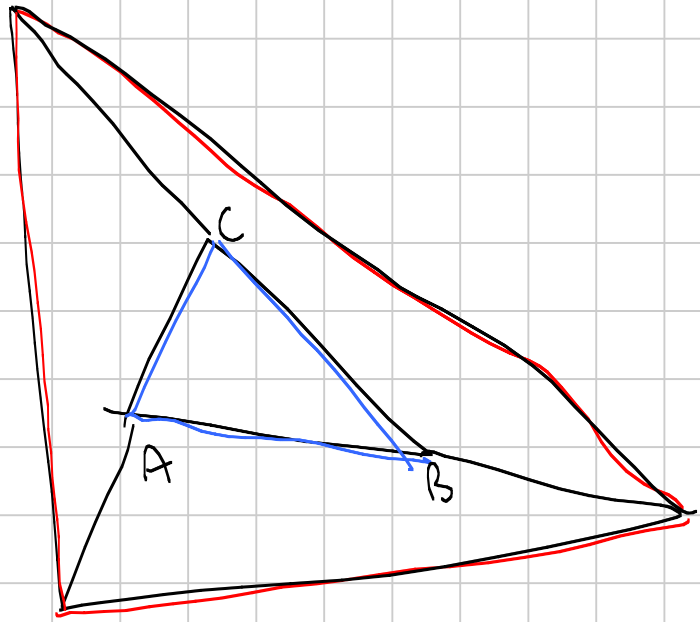


$$\vec{M} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$$



abbiamo che C si trova in proporzione 3 a 4

SOLUZIONE 3



SOLUZIONE
CON LA
FANTASIA