SENIOR 2012 - Basic - P

Titolo nota 02/09/2012

INDUZIONE

p proposizione che parla di n

" - - - - - - n - - "

Volete dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ $p(n)$ è vera

$$
I \begin{cases} ① \ p(0) \text{ è vera} \\ ② \ p(n) \Rightarrow p(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}
$$

Se p soddisfa le ipotesi I allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $p(n)$ è vera

<u>Teorema 0</u> Nelle ipotesi I, $p(0)$ è vera

Dim. La tesi è l'ip. ①

<u>Teorema 1</u> nelle ip I $p(1)$ è vera

$p(0)$ vera per T_0

$p(0) \Rightarrow p(1)$ per ② con $n=0$

$p(1)$ è vera

<u>Teorema 2</u> Nelle ip I $p(2)$ è vera

$p(1)$ vera per T_1

$p(1) \Rightarrow p(2)$ per ② con $n=1$

$p(2)$ vera

Non riusciamo a dimostrare "$\forall n \in \mathbb{N}$ $p(n)$ è vera"

Esempio 1

$p(n) =$ " $n+1 \leq 2^n$ "

① PASSO BASE $\quad n=0 \quad p(0)$ è vera

$$0+1 \leq 2^0 = 1$$

② PASSO INDUTTIVO

Abbiamo dimostrare che $p(n+1)$ è vera sapendo che $p(n)$ è vera

$p(n+1) =$ " $(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$ "

$$(n+1)+1 \leq 2^n + 2^n$$

$n+1 \leq 2^n$ perché $p(n)$ è vera

$1 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

Per induzione $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \leq 2^n$

Esempio 2

$$0+1+2+\ldots+n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

P.B. $\quad n=0 \qquad 0 = \frac{0\cdot(1)}{2}$

P.I. $\quad \boxed{0+\ldots+n} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Sappiamo che $0+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2}$$

Esempio 3

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4^i} < \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usiamo l'induzione

P.B. $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} \frac{i}{4^i} = \frac{0}{4^0} < \frac{1}{2}$

P.I. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{4^i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4^i}\right) + \frac{n+1}{4^{n+1}} < \frac{1}{2} + \frac{n+1}{4^{n+1}}$

Bisogna cambiare la disuguaglianza

Proviamo con $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4^i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \left(< \frac{1}{2}\right)$

P.B. $\displaystyle\frac{0}{4^0} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

P.I. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{4^i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4^i} + \frac{n+1}{4^{n+1}} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4^i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{per ip. induttiva}$$

$$\frac{n+1}{4^{n+1}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$n+1 \leq \frac{4^{n+1}}{2^{n+2}} = 2^{2(n+1)-(n+2)} = 2^n$$

Es. 4 $p(n) =$ " $n > 500$ "

(2) è verificata : se $n > 500$ anche $n+1 > 500$

(1) non è verificata $0 \not> 500$

INDUZIONE FORTE

Sia q una proposizione che parla di un numero naturale n

$$J \begin{cases} (1)\ q(0) \text{ è vera} \\ (2)'\ \forall n \in \mathbb{N} \ (\text{Se } \forall k \leq n \ \ q(k) \text{ è vera, allora } q(n+1) \text{ è vera}) \end{cases}$$

Nelle ipotesi J, $q(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim. Sia $p(n)$ la proposizione

$p(n) =$ " $\forall k \leq n$, $q(k)$ è vera"

p soddisfa (1) perché q soddisfa (1)

P.B. $p(0) =$ " $\forall k \leq 0$, $q(k)$ è vera"

P.I. $p(n) \overset{?}{\Rightarrow} p(n+1)$

$p(n) \Rightarrow q(n+1)$ per ②'

Sappiamo allora che $\forall k \leq n$, $q(k)$ è vera, e in più $q(n+1)$ è vera

Dunque $p(n+1)$ è vera

Per induzione semplice $p(n)$ è vera $\forall n$

$p(n)$ dice che $\forall k \leq n$, e in particolare per $k = n$
$q(k)$ è vera

$p(n) \Rightarrow q(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 5

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di naturali

$a_0, a_1, a_2, \dots$

Sappiamo che $a_0 = 1$ e che $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < a_{n+1} \leq 2a_n$

Allora ogni naturale M si può scrivere come somma di alcuni a_k tutti distinti.

$a_n = n+1$ verifica le ipotesi

$a_n = 2^n$ //

$a_n \doteq F_n$

Dim. per induzione forte

P.B. $n=0$ $\quad$ 0 è la somma senza addendi

P.I. Supponiamo la tesi per $0, \dots, n$ e la dimostriamo per $n+1$

1° oss. $n+1 \geq 1 = a_0$

$\exists\, k$ t.c. $a_k \leq n+1$

Per k abbastanza grande $a_k > n+1$

Sia $\bar{k}$ il massimo naturale k t.c. $a_k \leq n+1$

$a_{\bar{k}} \geq 1$ perché tutti gli el. della succ. lo sono (dimostratelo per induzione)

$0 \leq n+1 - a_{\bar{k}} < n+1$

Posso usare l'ipotesi induttiva sul naturale $n+1-a_{\bar{k}}$

$n+1 - a_{\bar{k}} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_h}$ $\quad$ con i_j tutti distinti (ip. induttiva)

$n+1 = a_{i_1} + \dots + a_{i_h} + a_{\bar{k}}$

Resta da verificare che $i_j \neq \bar{k}$

$n+1 < a_{\bar{k}+1} \leq 2a_{\bar{k}}$ $\qquad$ $n+1-a_{\bar{k}} < a_{\bar{k}}$

Se $a_{i_j} = a_{\bar{k}}$ allora $n+1-a_{\bar{k}} = a_{i_1} + \dots + a_{i_h} \geq a_{i_j} = a_{\bar{k}}$ assurdo

PIGEONHOLE Sia $n \geq 1$ un naturale
Abbiamo $n+1$ scarpe e le riponiamo in n cassetti. Allora esiste almeno un cassetto contenente almeno 2 scarpe.

PIGEONHOLE 2 $n, k \geq 1$ naturali
Se ho $nk+1$ scarpe e le colloco in n cassetti, almeno un cassetto contiene almeno $k+1$ scarpe.

Es. 6 A una festa partecipano n persone, alcune coppie delle quali si conoscono.
Esistono 2 persone con lo stesso numero di conoscenze.

Quante persone può conoscere una persona?
$0, 1, \dots, n-1$

Consideriamo i seguenti cassetti
C_0 contiene le persone che non conoscono nessuno o conoscono tutti

C_i (con $1 \leq i \leq n-2$) contiene le persone che hanno i conoscenze

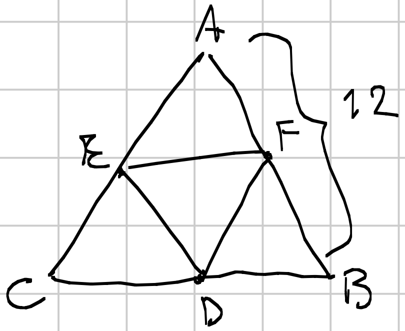
allora C_0 contiene 2 persone oppure un altro C_i contiene 2 persone
Se C_i contiene 2 persone, queste conoscono i persone ognuna

Se C_0 contiene 2 persone, non possono essere di tipo diverso

Esempio 7

T_ℓ un triangolo equilatero di lato ℓ.

Qual è il minimo a per cui si può ricoprire un T_{12} con 5 T_a?



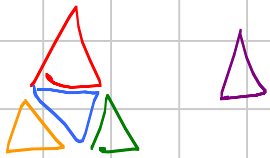
Abbiamo segnato 6 punti, dunque per ogni ricoprimento con 5 T_a c'è un T_a che copre 2 dei 6 punti.

$\forall\, x, y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ $\quad \overline{XY} \geq 6$

Se x, y sono ricoperti da un T_a, $\overline{XY} \leq a$

$a \geq 6$ usando una coppia di punti x, y come sappiamo esistere.

$a = 6$ basta (basterebbero anche 4 triangoli)

 è un ricoprimento

<u>Esempio 8</u> Trovare il più piccolo naturale n con questa proprietà

"Comunque si prendono n numeri naturali ≥ 1
le cui scomposizioni in fattori primi contengano
solo primi < 30, ce ne sono 2 il cui prodotto è un $\square$"

I primi < 30 sono 10

Se $k = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \ldots \cdot 29^{a_{29}}$ con $a_p \geq 0$

$h = 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot 29^{b_{29}}$ $\quad b_p \geq 0$

$$Kh = 2^{a_2+b_2} \cdot \dots \cdot 29^{a_{29}+b_{29}}$$

Quando Kh è un $\square$? Quando $a_p + b_p$ è pari per $p = 2, 3, \dots, 29$

$n = 2^{10} + 1$ funziona

Associo al numero K la seguente 10-upla

$$\left([a_2]_{\bmod 2}, [a_3]_{\bmod 2}, \dots, [a_{29}]_{\bmod 2}\right)$$

Le possibili 10-uple sono 2^{10}

Se $n = 2^{10} + 1$ esistono K, h con la stessa sequenza

Se $n \leq 2^{10}$ considero
l'insieme S dei naturali della forma

$$2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot \dots \cdot 29^{c_{29}} \quad \text{con } c_p = 0 \text{ oppure } 1$$

$|S| = 2^{10}$ e quindi posso prendere un sottoinsieme di n elementi di S, se $n \leq 2^{10}$

<u>Esempio 9</u> (USAMO 1990/1)

Uno stato deve produrre targhe per automobili. Le targhe sono composte da 6 cifre decimali. La legge vuole che due targhe differiscano in almeno 2 posizioni. Quante targhe è possibile emettere?

Supponiamo di avere targhe con 2 cifre decimali

Allora posso avere al più 10 targhe.
Se ne avessi 11, per PIGEONHOLE 2 di esse coinciderebbero nella prima cifra, dunque avrebbero al più una cifra diversa (la seconda)

Se le targhe hanno 3 cifre

Se ho 101 targhe, $101 = 10 \cdot 10 + 1$
dunque ci sono 11 targhe con la prima cifra uguale, e fra queste ce ne sono 2 con anche la seconda cifra uguale. Dunque non si possono emettere 101 targhe.

In generale dimostriamo, per induzione su $n \geq 2$ che se le targhe hanno n cifre non possono essere più di 10^{n-1}.

P.B. $n = 2$ già visto

P.I. Se ho più di 10^n targhe con $n+1$ cifre, dunque almeno $10^n + 1$, ce ne sono almeno

$10^{n-1} + 1$ che coincidono sulla prima cifra.
Per ipotesi induttiva fra queste ce ne sono 2 che coincidono ovunque tranne che sull'ultima cifra

---

Dunque se le targhe hanno n cifre, se ne possono produrre non più 10^{n-1}.

Esibiamo 10^{n-1} targhe che rispettano la legge

Prendiamo tutte le targhe $(a_1, \dots, a_n)$ tali che $a_1 + \dots + a_n$ sia divisibile per 10.

$$a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{10}$$

1) Queste targhe sono 10^{n-1}. Infatti per costruire una targa scelgo a piacere le prime $n-1$ cifre, a quel punto l'ultima è determinata.

2) Due di queste targhe non coincidono in almeno due posizioni

$$(a_1, \dots, a_n) \qquad (b_1, \dots, b_n)$$

Per assurdo le due targhe in esattamente una posizione j

$$a_i = b_i \quad \forall i \neq j$$

$$a_j \neq b_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ è un multiplo di } 10$$

$$||$$

$$a_j - b_j \text{ non è un multiplo di } 10$$

$$a_j - b_j \neq 0 \qquad -9 \leq a_j - b_j \leq 9$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \pmod{10}$$

$$a_j \equiv b_j \pmod{10}$$

Dunque le 10^{n-1} targhe scelte rispettano la legge.