SENIOR 2012 - Medium - A2

Titolo nota 06/09/2012

DISUGUAGLIANZE → Ripasso disug. classiche
→ Convessità
→ Esempi ed esercizi

Disug. classiche:
→ Riarrangiamento e parenti
→ Cauchy - Schwarz "
→ Medie e parenti
→ Newton e McLaurin
→ Bunching
→ Schur

RIARRANGIAMENTO Siano $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ reali di segno qual.
Supponiamo che $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$
Considero somme del tipo $a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)}$, dove
σ è una permutazione di $1, \dots, n$
Allora

- la somma è massima se uso $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
- " " " minima " " $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$

Questi sono l'unico caso di min e max $\Leftrightarrow$ nell'ipotesi sono tutti < stretto.

Idea della dim.: considero la permutazione che massimizza (esiste perché...) e dimostro che $\sigma(1) \leq \sigma(2) \leq \dots \leq \sigma(n)$ (Ex: questo dice che $\sigma = id$).
Se per assurdo σ non fosse crescente, allora esiste $j > i$ t.c. $\sigma(j) < \sigma(i)$
Scambiando $a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} + \dots \rightsquigarrow a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)}$ le cose migliorano.

TECNICA DI SMOOTHING. [Ex: dettagli da sistemare]

Esempi Se $x_1, \dots, x_n$ sono reali positivi, allora

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{cyc} \frac{x_1}{x_2} \geq n}$$

Soluzione Considero $x_1, x_2, \dots, x_n$ a_i

$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ b_i

Achtung! Non posso dire che $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ o viceversa !!!

Se pongo a_1 = + piccolo degli x_i

a_2 = 2° + " " .

e così via, mi ritrovo che gli a_i e i b_i sono ordinati in maniera opposta (sto usando che gli $x_i > 0$)

$$\underbrace{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1}}_{\text{prodotto di } a_i b_{\sigma(i)}} \geq \underbrace{\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_n}}_{\text{prodotto di } a_i b_{n+1-i}} = n.$$

(ordinamento opposto: + grande con + piccolo)

—o—o—

Disug. CHEBYCHEFF a_i e b_i come nel riarrangiamento. Allora

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum a_i \cdot \frac{1}{n}\sum b_i \leq \frac{1}{n}\sum a_i b_i}$$

Prodotto medie ≤ media prodotti

Se invece l'ordinamento è opposto, cioè $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$
$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

allora

$$\frac{1}{n}\sum a_i \cdot \frac{1}{n}\sum b_i \geq \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Possibili dim. ① Induzione ⇝ strada facendo serve riarrangiamento

② $a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \geq a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$
$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \geq a_1b_2+a_2b_3+\dots+a_nb_1$
$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \geq a_1b_3+a_2b_4+\dots+a_nb_2$
$\vdots \qquad \vdots$

Sommo tutto:

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} a_ib_j \leftarrow n^2 \text{ addendi}$$
$$= \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$$

$\boxed{\text{CAUCHY–SCHWARZ}}$ $a_1,\dots,a_n$ e $b_1,\dots,b_n$ reali qualunque.

Allora
$$|a_1b_1+\dots+a_nb_n| \leq (a_1^2+\dots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+\dots+b_n^2)^{1/2}$$

oppure
$$\left(\sum a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\cdot\left(\sum b_i^2\right)$$

oppure introducendo i vettori
$$A=(a_1,\dots,a_n) \qquad B=(b_1,\dots,b_n)$$

$$\langle A,B\rangle^2 \leq \|A\|^2\cdot\|B\|^2$$

Dimostrazioni

① Con i polinomi di 2° grado.

Versione base: $P(x):=\sum(a_i+b_ix)^2$ polinomio di 2° grado in x. Si ha che $P(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, quindi $\Delta\leq 0$, ma Δ = RHS − LHS della disug.

Versione vettoriale: $P(x):=\|A+xB\|^2=\|A\|^2+x^2\|B\|^2+2x\langle A,B\rangle$

② Induzione dopo aver fatto $n=2$ a mano [Ex: provare!]

③ SOS: Sum of Squares. Si tratta di dimostrare che

$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)-\left(\sum a_i b_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2\ge 0$$

④ Omogeneità. La disug. è omogenea (di grado 2 se scritta con i quadrati). Quindi wlog posso assumere che sia

$$\sum a_i^2=1 \quad e \quad \sum b_i^2=1 \qquad (\star)$$

[Ex: convincersene per bene e scrivere una dimostrazione del seguente fatto: C.S. con Hp aggiuntiva $(\star)$ $\Rightarrow$ C.S. generale]

Ma allora $\quad 2\sum a_i b_i \le \sum\left(a_i^2+b_i^2\right)$ $\quad$ (Ho usato $2ab\le a^2+b^2$)

$$=\sum a_i^2+\sum b_i^2$$

$$=1+1=2$$

quindi $\sum a_i b_i\le 1$

quindi $\left(\sum a_i b_i\right)^2\le 1=\left(\sum a_i^2\right)\cdot\left(\sum b_i^2\right)$. (aggiustare i valori assoluti)

—o —o —

Quando vale = in C.S. Se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ t.c. $a_i=\lambda b_i$ per ogni i, cioè se e solo se i due vettori sono l'uno multiplo dell'altro.

Come si vede il caso di uguaglianza?

① $\Delta=0 \Rightarrow$ l'eq. $P(x)=0$ ha una radice $\Rightarrow \exists\, x\in\mathbb{R}$ t.c. $a_i+xb_i=0$ per ogni i

② Provare! ③ Deve essere $a_i b_j=a_j b_i$ per ogni i e j, quindi quando posso dividere $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}=\lambda$

④ Capirlo!

Parenti di C.-S.

① Utilizzare + specie di vettori: 3 specie

Questa volta $a_i, b_i, c_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \leq \left(\sum a_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum b_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum c_i^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

e idem per più specie.

Dim. per omogeneità: assumo $\sum a_i^3 = \sum b_i^3 = \sum c_i^3 = 1$ e poi uso

$$a_i b_i c_i \leq \frac{a_i^3 + b_i^3 + c_i^3}{3} \qquad (\text{AM-GM fatta su } a_i^3, b_i^3, c_i^3)$$

② Utilizzare esponenti diversi $a_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p, q > 1$

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\text{C.S. sarebbe } p = q = 2)$$

Dim per omogeneità usando $\boxed{ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$ DISUG. DI YOUNG

③ = ① + ② Usare più specie di variabili (k vettori) e k esponenti $p_1, \dots, p_k$ t.c.

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$$

Dim passa per una YOUNG generalizzata $\boxed{x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \leq \sum \frac{1}{p_i} x_i^{p_i}}$

Finto ④ $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \leq (x_1+y_1)^{\frac{1}{n}} (x_2+y_2)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot (x_n+y_n)^{\frac{1}{n}}$

Ex: è una Cauchy-Schwarz con $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ e n specie di vettori 2 dimensionali $(x_1^{\frac{1}{n}}, y_1^{\frac{1}{n}}), (x_2^{\frac{1}{n}}, y_2^{\frac{1}{n}}), \dots, (x_n^{\frac{1}{n}}, y_n^{\frac{1}{n}})$

n = numero di vettori $\quad$ 2 = dimensione del vettore

$\boxed{\text{MEDIE } p\text{-esime}}$ $a_1, \dots, a_n \geq 0$ (o >0 stretto se serve)
$p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allora

$$M_p(a_1, \dots, a_n) := \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p} \qquad p \neq 0$$

Si pone poi

$$M_0(a_1, \dots, a_n) := \text{Geometrica} := (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$M_\infty(a_1, \dots, a_n) := \max\{a_1, \dots, a_n\}$$
$$M_{-\infty}(a_1, \dots, a_n) := \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

Disug. delle medie: Comunque si scelgano $a_1, \dots, a_n$ si ha che

$$p \to M_p(a_1, \dots, a_n)$$

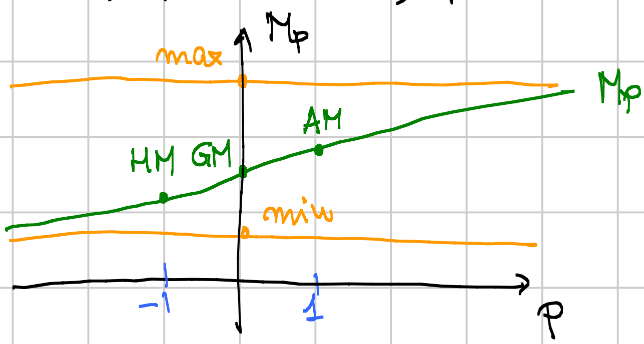
è monotona crescente (strettamente se gli a_i NON sono TUTTI uguali).

—o—o—

Casi particolari: $p=1 \to AM$, $p=0 \to GM$, $p=2 \to QM$, $p=-1 \to HM$

Curiosità $p \to M_p$

La funzione è sempre monotona, ma è convessa - concava solo per $n=2$.



—o—o—

Idea della dimostrazione: Teoricamente bisognerebbe dim. che

$$M_p(\dots) \leq M_q(\dots) \quad \text{per ogni } p \leq q.$$

In realtà basta dimostrare 2 cose:

→ $AM \geq GM$ (questo sistema i confronti tra $p=0$ e tutti i $p \neq 0$)
[Ex: convincersene]

→ $AM \leq M_p$ per ogni $p \geq 1$. (questo sistema tutto il resto)
[Ex: convincersene, anche per i negativi]

$\boxed{\text{Dim. di AM-GM}}$

(1) Riarrangiamento: A = aritm G = geom.

$$x_1 = \frac{a_1}{G}, \quad x_2 = \frac{a_1 a_2}{G^2}, \quad x_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{G^3}, \dots, x_n = \dots$$

Uso $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_n} \geq n$

riarr.

$$\frac{a_2}{G} + \frac{a_3}{G} + \dots + \frac{a_1}{G} \geq n$$

(2) Induzione UP e DOWN [Ex]

→ lo faccio per $n=2$

→ Se è vera per k, è vera per $2k$ UP

→ Se è vera per k, è vera per $k-1$ DOWN

Nell ultimo punto, introduco una variabile fittizia.

Ho $a_1, \dots, a_{k-1}$. La uso su $a_1, \dots, a_{k-1}, \frac{a_1 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$

Ora uso la disug. AM-GM per k

$$\left[a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_{k-1}}{k-1}\right]^{\frac{1}{k}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \frac{a_1 + \dots + a_{k-1}}{k-1}}{k}$$

$$\left[a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1}\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\frac{a_1 + \dots + a_{k-1}}{k-1}\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left[\frac{a_1 + \dots + a_{k-1}}{k-1}\right]$$

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$$

Semplifico il fantasma e ho finito

(3) SMOOTHING Idea: rimpiazzo $a_1, a_2, \dots, a_n$ con altra roba in modo da avere la stessa somma e prodotto $\geq$

Sostituisco

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightsquigarrow (A, a_1 + a_2 - A, a_3, \dots, a_n)$$

Si verifica [Ex] che posso fare in modo che il 2° sia ≥ 0 e che scegliendo bene a_1 e a_2 il prodotto sale. [Esercizio!]

Iterando queste costruzioni li rendo tutti uguali in n passaggi.

FUNZIONI CONVESSE

<u>Def.</u> Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se

$$a \in I,\ b \in I \Rightarrow \text{tutto il segmento } [a,b] \subseteq I$$

La stessa definizione si può dare per insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$

<u>Oss.</u> In $\mathbb{R}$ gli insiemi convessi sono

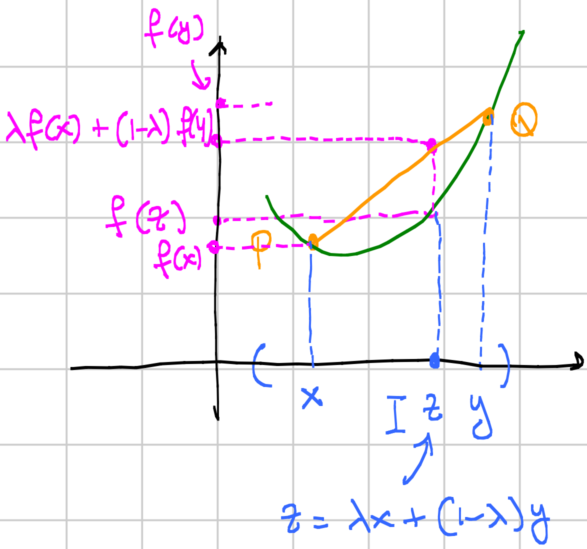
- i p.ti;
- gli intervalli (con o senza estremi)
- semirette (")
- tutto $\mathbb{R}$.

<u>Def.</u> Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x \in I$, $y \in I$, $\lambda \in [0,1]$

<u>Interpretazione geometrica</u> Dati 2 p.ti P e Q del grafico, il segmento PQ sta sempre tutto sopra il grafico



Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice <u>concava</u> se verifica la disuguaglianza opposta

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Disuguaglianze per funzioni convesse

→ JENSEN

→ KARAMATA

DISUG. JENSEN Se f è convessa
$x_1, \dots, x_n \in I$
$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

Allora

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

Caso particolare Se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, allora

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}}$$

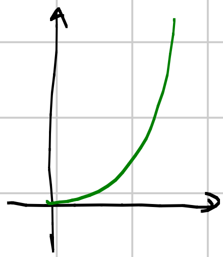
f(media) $\le$
$\le$ media di f

Oss. Per le funzioni concave vale con il verso girato.

Dim. JENSEN
→ per $n=2$ è la definizione di funzione convessa
→ usando la definizione si fa il passaggio UP $k \to 2k$
→ usando il solito elemento fantasma si fa il passaggio DOWN $k \to k-1$.
[Ex: dettagli a posto]
[Ex: si può fare una dim. per smoothing]

—o—o—

Esempi classici $\boxed{1}$ $f(x) = x^\alpha$, definita per $x \ge 0$, è CONVESSA $\Leftrightarrow \alpha \ge 1$
(FATTO MISTERIOSO: facile ad esempio se $\alpha = 2$).

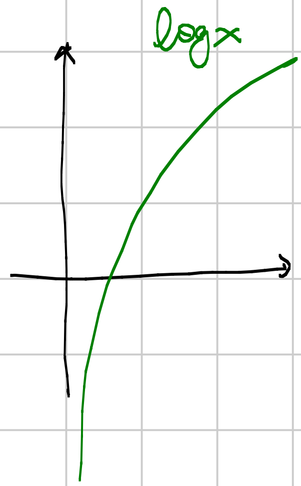


JENSEN con $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ diventa

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^\alpha \le \frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}$$

Facendo la radice α-esima ottengo $\underset{AM}{M_1(x_1, \dots, x_n)} \le M_\alpha(x_1, \dots, x_n)$

$\boxed{1.5}$ $f(x) = x^\alpha$ è concava per $\alpha \in (0,1)$. Da qui segue $M_\alpha \le AM$ se $\alpha \in (0,1)$ (seguiva anche dal precedente cambiando variabili)



$\boxed{2}$ $f(x) = \log x$, definita per $x > 0$, è CONCAVA

qualunque base > 1

Quindi

$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \ge \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n}$$

$$= \log\left[x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\right]^{\frac{1}{n}}$$

Poiché $\log x$ è strett. crescente, posso "semplificarlo" e ottengo AM-GM.

—o—o—

Usando λ variabili (e non solo $\frac{1}{n}$) ottengo versioni PESATE delle disuguaglianze delle medie. Ad esempio AM-GM pesata

$$\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 \log x_1 + \dots + \lambda_n \log x_n$$

$$= \log\left(x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}\right)$$

$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \ge x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}$$ AM-GM pesata

Esempio: $x^3 + y^5 + k$ Uso pesi $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{7}{15}$ (somma 1)

e ottengo

$$x^3 + y^5 + k = \frac{1}{3} \cdot \overset{x_1}{\boxed{3x^3}} + \frac{1}{5} \overset{x_2}{\boxed{5y^5}} + \frac{7}{15} \cdot \overset{x_3}{\boxed{\frac{15}{7} k}}$$

$$\ge \left[3x^3\right]^{\frac{1}{3}} \left[5y^5\right]^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\frac{15}{7} k\right]^{\frac{7}{15}} = \text{roba} \cdot xy$$

Analogamente si fanno versioni pesate di tutte le medie.

$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}$$

Uso questa con $x_i = a_i^{p_i}$ $\quad \lambda_i = \frac{1}{p_i}$ (avendo supposto $\sum \frac{1}{p_i} = 1$)

Ottengo

$$\boxed{\frac{1}{p_1} a_1^{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} a_n^{p_n} \geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

YOUNG a n variabili

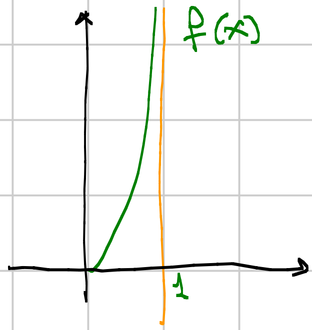
—o —o —

Disug. di convessità: utili in disug. a n variabili con RHS o LHS del tipo $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$

Esempio NESBITT $\quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \qquad a, b, c > 0$

Dim. È omogenea di grado 0, quindi wlog $a+b+c = 1$. Diventa

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2} \qquad f(x) = \frac{x}{1-x}$$



Se $f(x)$ è convessa (e lo è $f(x) = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$)

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} = \frac{1}{3} \text{LHS}$$

$$\| $$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

FINE.

DIM elementare: Pongo $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$, ricavo a, b, c, e viene una disuguaglianza più semplice.

Disug. SHAPIRO $\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$ (ogni variabile divisa per la somma delle 2 successive)

Speranza: LHS $\geq$ quello che viene quando sono tutte uguali

Risposta Ok se
- n pari e ≤ 12
- n dispari e ≤ 23

(n è il numero di variabili)

NO altrimenti.

—o—o—

$\boxed{\text{DISUGUAGLIANZA DI KARAMATA}}$ Dico che $[x_1, \dots, x_n] \geq [y_1, \dots, y_n]$ se

$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$

- $x_1 \geq y_1$,
- $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$,
- $x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3$

⋮

- $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$

Allora se f è convessa $\boxed{\sum f(x_i) \geq \sum f(y_i)}$

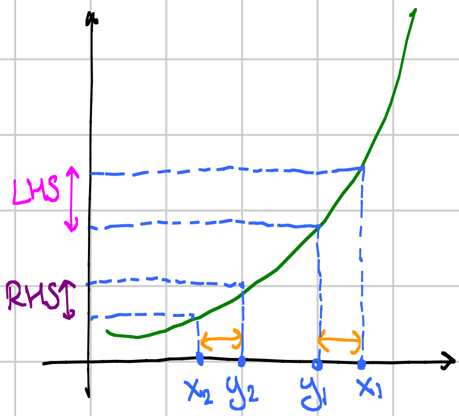
KARAMATA $\geq$ JENSEN: basta prendere (per il caso $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$) gli x_i ordinati (wlog si può) e tutti gli $y_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Idea per $n=2$

Devo dim. che

$f(x_1) + f(x_2) \geq f(y_1) + f(y_2)$

$$\underbrace{f(x_1) - f(y_1)}_{\text{LHS}} \geq \underbrace{f(y_2) - f(x_2)}_{\text{RHS}}$$



NEWTON e Mc LAURIN → Prossima volta

nel senso di prima

BUNCHING o MUIRHEAD $[k_1, \dots, k_n] \succeq [m_1, \dots, m_n]$

$k_1 \geq \dots \geq k_n \boxed{\geq 0}$ $m_1 \geq \dots \geq m_n \boxed{\geq 0}$

Allora $$\boxed{\sum_{sym} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \geq \sum_{sym} x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}}$$

vale meno dove gli esponenti sono + distribuiti

$\boxed{x_i \text{ e } y_i \geq 0}$

Ad esempio per $n=3$ $[4,3,1] \succeq [3,3,2]$

$$\sum_{sym} a^4 b^3 c \geq \sum_{sym} a^3 b^3 c^2$$

Oss. 1 Il fatto che $k_1 + \dots + k_n = m_1 + \dots + m_n$ ci dice che la disuguaglianza è omogenea

Oss. 2 Se non è vero che $[k_1, \dots, k_n] \succeq [m_1, \dots, m_n]$, allora è falsa

Ad esempio

$$\sum_{sym} a^5 b^2 c \ \boxed{\geq} \ \sum_{sym} a^4 b^4$$

è falsa

$[5,2,1] \not\succeq [4,4,0]$

Per vedere che è falsa basta sostituire $a=b=n$, $c=1$.

Nel LHS il termine + forte è $\sim n^7$, mentre al RHS il termine + forte è $\sim n^8$

Dim Bunching (idea) BUNCHING = raggruppamento

Raggruppando opportunamente i termini al LHS e usando AM-GM, si ottengono i termini al RHS

$$\sum a^3 \geq \sum a^2 b \qquad \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \overset{\text{AM-GM}}{\geq} \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = a^2 b$$

Oss. L'idea può funzionare TALVOLTA anche se il LHS è solo ciclico (Bunching ufficialmente SOLO per somme simmetriche).

— o — o —

SCHUR

$$\boxed{\begin{gathered} a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geq 0 \\ a,b,c\geq 0 \end{gathered}}$$

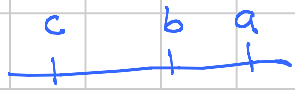
Dim. È ciclica (in realtà pure simmetrica, ma si vede solo a conti fatti). Wlog posso suppore a è la + grande. Avrei quindi 2 casi

$\to a\geq b\geq c$

$\to a\geq c\geq b$

Facciamo il 1° (il 2° è completamente uguale). Gli addendi sarebbero $+\ -\ +$. Dico che $1°+2°\geq 0$ e questo basta.

$$1°+2° = a(a-b)(a-c)-b(a-b)(b-c)$$
$$= \underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{\left[a(a-c)-b(b-c)\right]}_{\substack{a\geq b \text{ e } a-c\geq b-c \\ \geq 0}}\geq 0$$



Achtung! A priori uno non sa quali sono i 2 termini utili.

Oss. Si ha uguaglianza $\iff$ due variabili uguali e la terza nulla, oppure tre variabili uguali.

Quindi ci sono 2 situazioni distinte che danno uguaglianza.

Facendo i conti

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c) = \sum_{cyc} a(a^2-ac-ab+bc) = \sum_{cyc} a^3-a^2c-a^2b+abc$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{sym} a^3+\frac{1}{2}\sum_{sym} abc-\sum_{sym} a^2b\geq 0$$

$$\boxed{\sum_{sym} a^3 + \sum_{sym} abc \geq 2 \sum_{sym} a^2 b}$$

Schur come somme simmetriche

$$[3,0,0] + [1,1,1] \geq 2\,[2,1,0]$$

FORTE + DEBOLE ≥ 2 MEDI

Oss. tattica: se in una disuguaglianza ci sono due famiglie di casi di uguaglianza, forse c'è di mezzo Schur e di sicuro non bastano le medie.

$\boxed{\text{VARIANTI}}$ $a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0 \quad (k \geq 0)$

funziona allo stesso modo [Ex: dimostrarla]

(Posso mettere funzioni crescenti e/o convesse qua e là ...)

Se sviluppo: $\displaystyle\sum_{cyc} a^k(a^2 - ac - ab + bc) = \sum_{cyc} a^{k+2} - a^{k+1}b - a^{k+1}c + a^k bc$

Come prima $\displaystyle\sum_{sym} a^{k+2} + \sum_{sym} a^k bc \geq 2 \sum_{sym} a^{k+1} b$

$$\boxed{[k+2,0,0] + [k,1,1] \geq 2\,[k+1,1,0]}$$

In realtà posso poi moltiplicare tutto per $(abc)^m$

$$[k+m+2, m, m] + [k+m, 1+m, 1+m] \geq 2\,[k+m+1, m+1, m]$$

Altre varianti si ottengono ponendo $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$ ...

$\boxed{\text{BMO 2012 - 2}}$ $\displaystyle\sum_{cyc} (x+y)\sqrt{(z+y)(z+x)} \geq 4(xy+yz+zx)$

$\boxed{\text{Sol 1}}$ Idea bella: spero che $(x+y)\sqrt{(z+y)(z+x)} \geq 2xy+yz+zx$
Questa si fa facendo i quadrati (conti!)

$\boxed{\text{Sol 2}}$ Conti salvando la faccia

$x+y=a \qquad x=\dfrac{a+c-b}{2}$

$y+z=b \qquad y=\dfrac{b+a-c}{2}$

$z+x=c \qquad z=\dfrac{c+b-a}{2}$

$$\sum_{cyc} a\sqrt{bc} \geq \cancel{4}\sum_{cyc}\frac{(a+c-b)(b+a-c)}{\cancel{4}} = \sum_{cyc} ab+\cancel{a^2}-\cancel{ac}+\cancel{bc}+\cancel{ac}-\cancel{c^2}-b^2-\cancel{ab}+bc$$

$$= 2\sum_{cyc} ab - \sum_{cyc} a^2$$

$$\sum_{\substack{\cancel{cyc}\\ sym}} a\sqrt{bc} + \sum_{\substack{\cancel{cyc}\\ sym}} a^2 \geq 2\sum_{\substack{\cancel{cyc}\\ sym}} ab \qquad (a,b,c) \rightsquigarrow (a^2,b^2,c^2)$$

$$\underbrace{\sum_{sym} a^2bc}_{\text{DEBOLE}} + \underbrace{\sum_{sym} a^4}_{\text{FORTE}} \geq 2\underbrace{\sum_{sym} a^2b^2}_{\text{MEDIO}} \qquad [2,1,1]+[4,0,0] \geq 2[2,2,0]$$

Non è nulla!!

$$[4,0,0]+[2,1,1] \underset{\text{Schur con } k=2}{\geq} 2[3,1,0] \underset{\text{Bunching}}{\geq} 2[2,2,0]$$

— o — o —

$\boxed{\text{IMO 2000 - 2}}$ $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$ $\quad a,b,c>0$, $abc=1$

Sol. $a=\dfrac{x}{y} \quad b=\dfrac{y}{z} \quad c=\dfrac{z}{x}$ [Ex: convincersi che dati a,b,c con $abc=1$, esistono x,y,z t.c.]

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\cdot\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right) \leq 1$$

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz$$ Questa è omogenea!!!

$$(\cancel{xy}-\cancel{xz}+x^2-y^2+yz-\cancel{yx}+zy-z^2+\cancel{zx})(z-x+y)\le xyz$$

$$(x^2-y^2-z^2+2yz)(z-x+y)\le xyz$$

$$x^2z-x^3+x^2y-\cancel{y^2z}+y^2x-y^3-z^3+z^2x-\cancel{z^2y}+\cancel{2}yz^2-2xyz+\cancel{2}y^2z\le xyz$$

$$\sum_{sym} x^2z \le 3xyz+x^3+y^3+z^3$$ Schur $\rightarrow$ SURE !!

—o—o—

C.S. inventandosi la partenza $\quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

$$a+b+c=\sum_{cyc}a=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}\sqrt{a}\sqrt{b+c}\le (LHS)^{1/2}\left(\sum a(b+c)\right)^{1/2}$$

Quindi $\quad LHS \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum a(b+c)} \overset{?}{\ge} \frac{3}{2}$

Mi serve $\quad (a+b+c)^2\ge\frac{3}{2}\sum a(b+c)$

$$a^2+b^2+c^2+2\cancel{(ab+bc+ca)}\ge\cancel{3}(ab+bc+ca)$$ Ok: banale

—o—o—

$\boxed{\text{IMO 2005-3}}\quad \sum_{cyc}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge 0 \qquad xyz\ge 1 \qquad x,y,z>0$

$$\sum_{cyc}\frac{x^5+y^2+z^2-x^2-y^2-z^2}{x^5+y^2+z^2}\ge 0$$

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\right)\ge 0 \qquad 3\ge\sum_{cyc}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$$

$\sum_{cyc}\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{3}{x^2+y^2+z^2}$. Invento la partenza:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\left(x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}+y\cdot y+z\cdot z\right)^2\le(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)$$

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\le\frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\le\frac{3}{2}\,\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$ $\quad yz\le\frac{y^2+z^2}{2}$

Sommando è finita !!!! $\qquad$ [Ex.: IMO 2001-2]