A3 medium POLONI

Titolo nota 07/09/2012

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum k^3 = \left(\sum k\right)^2$$

$$\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum k^4 = (n-0)^4 + (n-1)^4 + \dots + (n-n)^4 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (n-k)^4 = \sum_{k=0}^{n} \left(n^4 - 4n^3k + 6n^2k^2 - 4nk^3 + k^4\right)$$

$1^4 \quad 1^4+2^4 \quad 1^4+2^4+3^4 \quad 1^4+2^4+3^4+4^4 \quad \dots$ poly. di grado k+1

$2^4 \quad 3^4 \quad 4^4 \quad 5^4$ poly. di grado k

24 24 24 24 poly. di grado 0

Teorema: $p(x)$ polinomio di grado d, allora

$p(x+1)-p(x)$ polinomio di grado $d-1$

$$\sum_{k=0}^{d} a_k\left[(x+1)^k - x^k\right] = \sum_{k=0}^{d} a_k\left(kx^{k-1} + \dots + k+1\right) \quad \square$$

inverso: $\underbrace{p(x+1)-p(x)}=g(x)$ poly. di grado $d-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow p(x)$ poly di grado d

$p(0) \qquad p(1)=p(0)+g(0) \qquad p(2)=p(0)+g(0)+g(1)$

Tutti i valori (interi) di p sono determinati da $p(0)$ e da $g(x)$

$$g(x)=\sum a_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = ?$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5$$

$$(\cancel{1^5}-0^5)+(\cancel{2^5}-\cancel{1^5})+(3^5-\cancel{2^5})+\dots$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cancel{k^5}+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1\right)-\cancel{k^5} =$$

$$= 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\sum k^3 + 10\sum k^2 + 5\sum k + \sum_{k=0}^{n} 1 =$$

$$= 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\,\frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + 10\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\,\frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= (n+1)^5$$

$\boxed{\text{conti}}$ risolvo in funzione di $\sum_{k=0}^{n} k^4$

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + \dots$$

$$\int x^k = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k$$

$$x\left(1 + x + x^2 + \dots + x^{k+1}\right) = \frac{1 - x^{k+2}}{1-x} \cdot x$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\cancel{x} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k+1) x^k = \cancel{x} \cdot \left(0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1) x^{n}\right) = \cancel{x}\,\frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + \dots}{(1-x)^2}$$

$$\begin{array}{cccccl}
x & x^2 & x^3 & x^4 & = x\,\dfrac{1-x^4}{1-x} \\
 & x^2 & x^3 & x^4 & = x^2 \cdot \dfrac{1-x^3}{1-x} \\
 & & x^3 & x^4 & = x^3 \cdot \dfrac{1-x^2}{1-x} \\
 & & & x^4 & = x^4 \cdot \dfrac{1-x}{1-x}
\end{array}$$

$$\frac{1}{1-x}\left(x-x^5+x^2-x^5+x^3-x^5+x^4-x^5\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x}\left(x+x^2+x^3+x^4\right)-4x^5$$

+ conti

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

decomposizione in frazioni parziali

$\boxed{a_i \text{ diversi}}$

$$f(x)=\frac{\text{polinomio di grado} < n}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$$, ~~allora~~ esistono

coefficienti $c_1, c_2, \dots c_n$ t.c.

$$f(x)=\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{x-a_2}+\dots+\frac{c_n}{x-a_n}$$

dim: parente dell'interpolazione

$a_k=f(a_{k-1}, \dots a_{k-e})$, trovare il termine generico

$$a_k = a\,a_{k-1} + b$$

Idea: se b non ci fosse, sarebbe tutto più facile

$$X_k = a_k + \alpha$$

$$X_k - \alpha = a\left(X_{k-1} - \alpha\right) + b$$

se scelgo bene α, b sparisce

$$X_k = a X_{k-1} \underbrace{+ \alpha - a\alpha + b}_{\text{riesco ad azzerarlo se } a \neq 1} \qquad \alpha = \frac{b}{a-1}$$

$$X_k = a X_{k-1} = a^k X_0$$

$$a_k + \alpha = a^k \left(a_0 + \alpha\right) =$$

$$a_k = a^k \left(a_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

$$X_k = a X_{k-1} + b X_{k-2} + \cancel{c}$$

stesso trucco

Idea: trovo le sol. della forma $X_k = \lambda^k$ per un certo λ

$$\lambda^k = a\lambda^{k-1} + b\lambda^{k-2} \rightsquigarrow \lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

1) funziona per qualunque grado
2) funziona anche se sol. complesse
3) soluzioni multiple

sol. generica $= \alpha_1\lambda_1^k + \alpha_2\lambda_2^k + \dots + \alpha_d\lambda_d^k = X_k \ \forall k$

uso condizioni iniziali risolvo in funzione di α_d

$$X_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$$
$$X_1 = \alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_d\lambda_d$$
$$X_2 = \alpha_1\lambda_1^2 + \dots + \alpha_d\lambda_d^2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Matrice di Vandermonde $\to$ det $\neq 0$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i,j$

Se ci sono coeff. ripetuti, le sol. di tipo λ^k non bastano più

Fatto: Se λ è ripetuto m volte, allora funzionano

$$X_k = \lambda^k \qquad X_k = k\cdot\lambda^k \qquad X_k = k^2\cdot\lambda^k \dots X_k = k^{m-1}\lambda^k$$

[dim. fatto: criterio della derivata:
Thm: se $p(x)$ ha una radice ~~doppia~~ m-upla λ, allora λ è radice anche di $p'(x)$, $p''(x)$, ... $p^{(m-1)}(x)$]

$$\underbrace{\underbrace{X_k = aX_{k-1} + bX_{k-2}}_{\text{omogenea}} + \begin{cases} 2^k \\ k^5 + 3k \end{cases}}_{\text{disomogenea}}$$

Fatto:

Se ho una soluzione $\tilde{X}_k$ della ricorrenza non omogenea, allora ogni altra soluzione della ricorrenza non omogenea è

$$X_k = \boxed{\text{sol generica omogenea}} + \tilde{X}_k$$

$$\begin{cases} X_k = 4X_{k-1} - 4X_{k-2} + k^2 & (*) \\ X_0 = 0 & (**) \\ X_1 = 4 & (***) \end{cases}$$

1) soluzioni della versione omogenea

$$X_k = 4X_{k-1} - 4X_{k-2}$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2 \qquad \lambda=2$$

$$X_k=\alpha 2^k+\beta k\cdot 2^k$$

2) troviamo una soluzione dell'eq. non omogenea

$$X_{k+2}=4X_{k-1+2}-4X_{k-2+2}+k^2$$

$$X_k=ak^2+bk+c$$

$$a(k+2)^2+b(k+2)+c=4\left[a(k+1)^2+b(k+1)+c\right]-$$
$$-4\left[ak^2+bk+c\right]+(k+2)^2$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=4a+4b+\cancel{4c}-\cancel{4c}+4 & c=20 \\ 4ak+bk=8ak+\cancel{4bk}-\cancel{4bk}+4k & b=8 \\ ak^2=\cancel{4ak^2}-\cancel{4ak^2}+k^2 & a=1 \end{cases}$$

$X_k=k^2+8k+20$ soluzione di (*)

Teo: la soluzione generica di (*) è

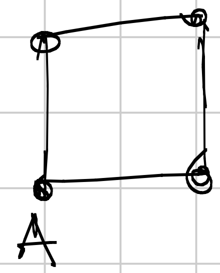
$$\alpha 2^k+\beta k2^k+k^2+8k+20$$

Ora trovo α, β imponendo (**), (***).

$a_0 = 1$

$b_0 = 2$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & (\mathrm{I}) \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n & (\mathrm{II}) \end{cases}$$



$(\mathrm{I})\ b_n = a_{n+1} - a_n \quad \forall n$

$(\mathrm{I}')\ b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$

sostituisco in (II): $a_{n+2} - a_{n+1} = a_n + 3(a_{n+1} - a_n)$

Funzionali

$f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x^2) - f(x) = 1 \quad \forall x \in \text{dom}$

I: trasformo x^2 in un $2x$

$$g(z) := f(e^z)$$

$$g(2z) = f(e^{2z}) = f((e^z)^2) = 1 + f(e^z) = 1 + g(z)$$

è lo stesso trucco delle "Cauchy strane"

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

$$f(x)\,f(y) = f(xy)$$

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

I: sostituzioni furbe del tipo $x = e^y$ o $x = \log y$

+ riconduco a Cauchy

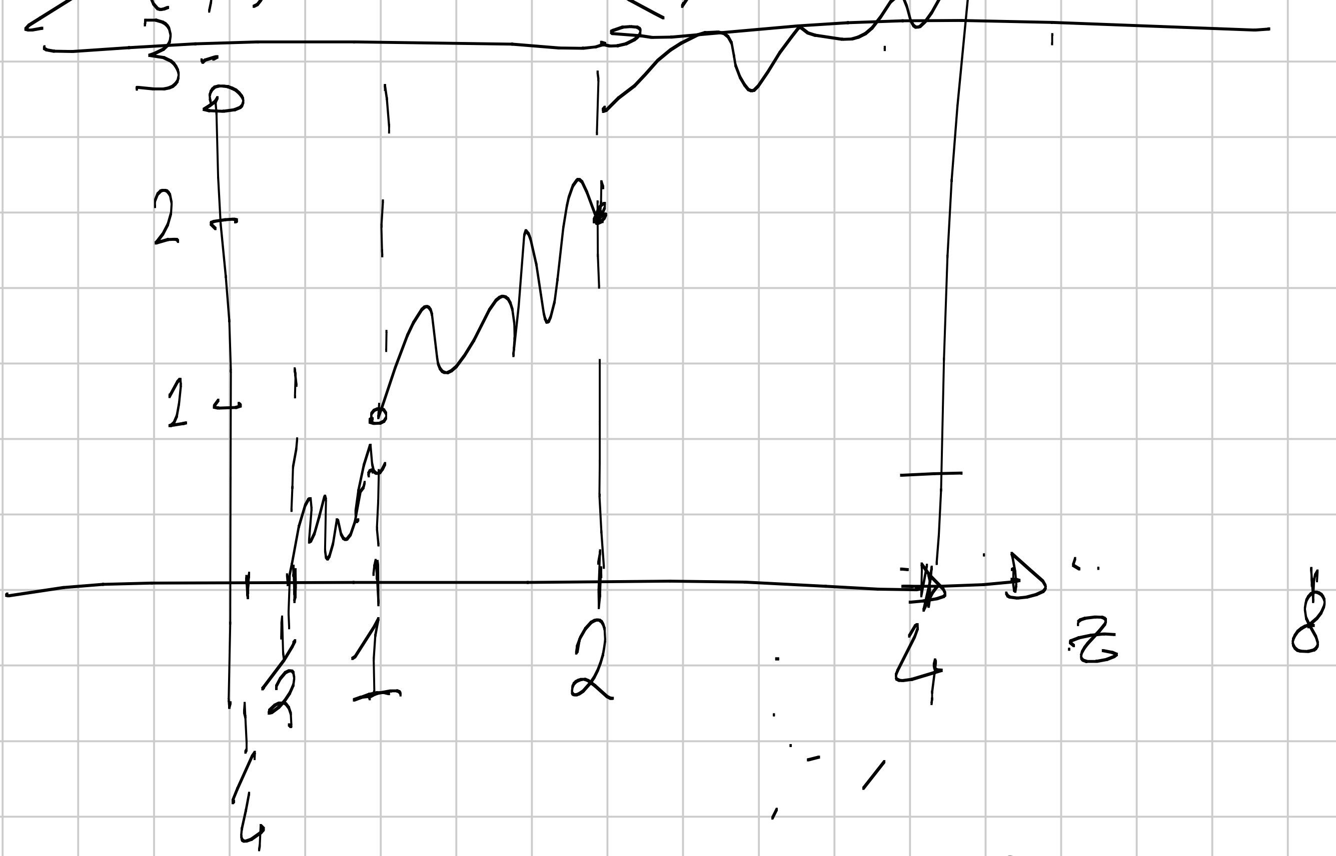
$$\boxed{g(2z) = 1 + g(z)}$$

$z \in (0, \infty)$

$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

~~$h(z) := g(z) + \alpha$~~

~~$h(2z) + \alpha = 1 + h(z) + \alpha$~~



Scegliamo $h(z)$ $h : [1, 2) \to \mathbb{R}$

Definiamo
$$\begin{cases} h(z) & \text{se } z \in [1, 2) \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} h\left(\frac{z}{2}\right)+1 & \text{se } z \in [2,4) \\ h(2z)-1 & z \in \left[\frac{1}{2},1\right) \\ \vdots & \\ h\left(\frac{z}{2^K}\right)+K & \text{se } z \in [2^K, 2^{K+1}) \end{cases}$$

[morale: non ci sono solo soluzioni "belle"]

$$\left[h(z)+1 = 1+g(z) = 1+h(z)\right] \text{ per } z \in [1,2)$$

$$f(x)+f(y) = f(x+y) \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\forall x,y \in \mathbb{R}$$

1) $f(0)=0$
2) $a := f(1)$
3) induzione, "conquisto $\mathbb{N}$"
4) dispari, "conquisto $\mathbb{Z}$"
5) conquisto $\frac{1}{n}$
6) conquisto $\mathbb{Q}$

7) mi fermo

Su $\mathbb{Q}$, le soluzioni sono tutte e sole $f(x)=ax$, su $\mathbb{R}$, no!

Idea: Basi di Hamel

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ è linearmente indipendente (su $\mathbb{Q}$) se per ogni $s_1, \dots s_k$ (e per ogni $k \in \mathbb{N}$) e per ogni $q_1, q_2, \dots q_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$\sum q_k s_k \neq 0 \quad (\text{tranne quando } k=0)$$

ES: $\{1, \sqrt{2}\}$ è lin. indip.

$$\forall q_1, q_2 \qquad q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot \sqrt{2} \neq 0$$

ES: $\{1, \sqrt{2}, 3-7\sqrt{2}\}$

$$\underset{\mathbb{Q}}{1} \cdot (3-7\sqrt{2}) \underset{\mathbb{Q}}{-3} \cdot 1 + \underset{\mathbb{Q}}{7} \cdot \sqrt{2} = 0$$

Def: un insieme S Genera $\mathbb{R}$ (su $\mathbb{Q}$) se $\forall r \in \mathbb{R}$, esistono

$k \in \mathbb{N}$,
$q_1, q_2, \dots q_k \in \mathbb{Q}$, $\quad s_1, s_2, \dots s_k \in S$
tali che
$$r = \sum_{i=1}^{k} q_i s_i$$

<u>ES</u>: $\mathbb{R}$ genera $\mathbb{R}$
$$r = \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\cap}{1}} \cdot \underset{S}{\underset{\cap}{r}}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ genera $\mathbb{R}$:
$$r = \begin{cases} 1 \cdot r & \text{se } r \notin \mathbb{Q} \\ \left(r + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} & \text{se } r \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esistono insiemi H che sono lin. ind. e generano $\mathbb{R}$, si chiamano <u>basi di Hamel</u>

$$\left\{ 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e \quad \dots \right\}$$

tanti (più che numerabili)

"<u>Thm</u>": data H base di Hamel, ogni reale si scrive come
$$r = \sum_{k=1}^{n} q_k s_k$$

per qualche $q_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $S_k \in H$, $k \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{in modo unico}}$

Dim: $\sum_{k=1}^{n} q_k S_k - \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \tilde{q}_k \tilde{S}_k = 0$

Prendo H

1) Scelgo a caso il valore di $f(S)$ per ogni $S \in H$

2) $f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k S_k\right) := \sum q_k f(S_k)$ è necessario

Dato $r \in \mathbb{R}$, si scrive in modo unico

come $\sum q_k S_k$ $\quad f(r) := \sum q_k f(S_k)$

---

x, y $\quad x = \sum_{k=1}^{n} q_k S_k \quad y = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \tilde{q}_k \tilde{S}_k$

$f(x) = \sum q_k f(S_k) \quad f(y) = \sum \tilde{q}_k f(\tilde{S}_k)$

$x+y = \sum q_k S_k + \sum \tilde{q}_k \tilde{S}_k =$

$+3\sqrt{2} \quad +5\sqrt{2} \quad 8\sqrt{2}$

$f(x+y) = \sum q_k f(S_k) + \sum \tilde{q}_k f(\tilde{S}_k) = f(x) + f(y)$

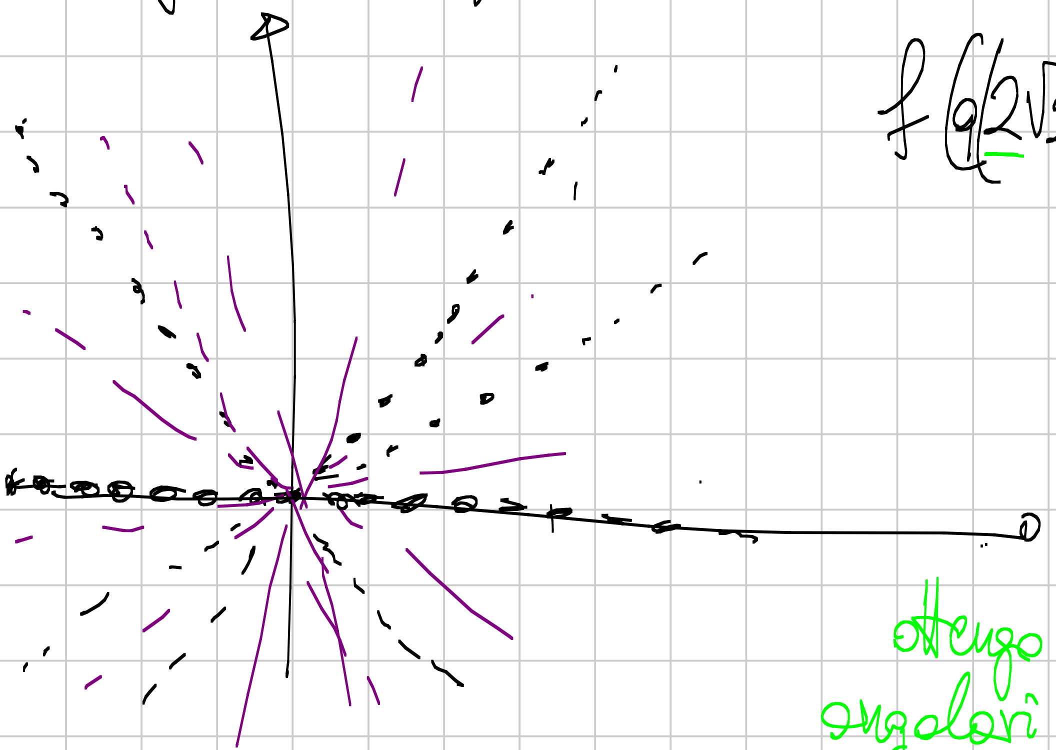
$\square$

$$\{1, \sqrt{2}, \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{roba}}\} = H$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(q) = q \quad \text{per } q \in \mathbb{Q}$$

$$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \Rightarrow f(q\sqrt{2}) = -q\sqrt{2} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

$$f(S_3) = f(S_4) = \ldots = 0$$



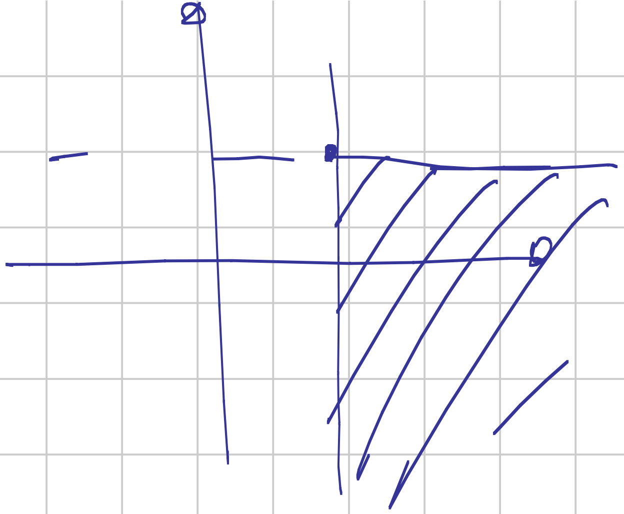
$$f(q(2\sqrt{2}-1)) = (-2\sqrt{2}-1)q$$

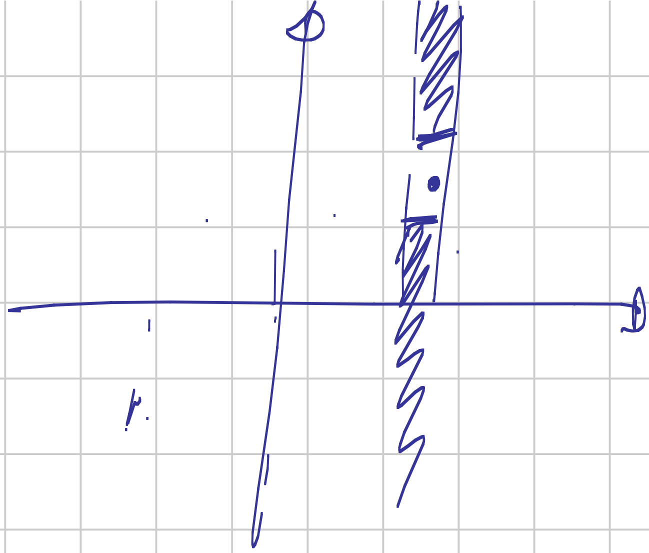
$$\frac{-2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}$$

ottengo tutti i coeff. angolari

In part. tutte queste soluzioni hanno grafico denso nel piano

$\Rightarrow$ Se una f soddisfa Cauchy e $\exists$ una "pallina" nel piano dove il grafico non passa, allora è una retta.





Esiste sol. di $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e $f(x)\not\equiv 0$ periodica di periodo 1 e periodo π

$$f(x+1)=f(x) \quad e \quad f(x+\pi)=f(x)\ ?$$

$$f(1)=0 \qquad f(\pi)=0$$

$$\boxed{f(x)+f(y)=f(\text{roba})\cdot x} + y$$

supponiamo non iniettiva scelgo "x" e "roba" in modo che $f(x)=f(\text{roba}) \Rightarrow f(y)=0$

$\Rightarrow \ldots$

PREIMO '01 $\boxed{f(x+yf(x))=f(x)f(y)}$ $P(x,y)$ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$\forall x,y$

$\exists$ solo un numero finito di valori x t.c. $f(x)=1$

Trovare tutte le f

Supponiamo $f(a)=1$

$P(a,a)$: $f(a+a)=1 \Rightarrow f(2a)=1$

$\Rightarrow \nexists\, a$ t.c. $f(a)=1$

Supponiamo che x,y siano tali che $f(x+yfx)=f(x)$

$\Rightarrow$ assurdo $(f(y)=1)$ $\Rightarrow$ iniettività

Se esistessero $a \neq b$ tali che $f(a)=f(b)$

$x=b$ $\quad y$ t.c. $x+yfx=a$

$$f(x+yfx)=fx\,fy \qquad \forall x,y$$

$$\|$$

$$f(y+xfy)=fy\,fx$$

$$\cancel{f}(x+yfx)=\cancel{f}(y+xfy) \qquad \forall x,y$$

$$x(1-fy)=y(1-fx) \qquad \frac{1-fx}{x}=\frac{1-fy}{y}=\alpha$$

$$1-fx=\alpha x \qquad fx=-\alpha x+1$$

+verifica

$\boxed{\text{IMMAGINE}}$

SL 2005

$$f(x)f(y) = 2f(x+yf(x)) \quad \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$$

Può valere

$y = x + yf(x)$?

Fisso x, scelgo $y = \frac{x}{1-f(x)} \geq 0$ [ok solo se $f(x) < 1$]

$f(x) \cancel{f(y)} = 2 \cancel{f(y)} \Rightarrow f(x) = 2$, assurdo

$\Rightarrow$ non succede mai che $f(x) < 1$

$a, b \in f(\mathbb{R}^+) = Im$

$a, b \in Im \Rightarrow \frac{ab}{2} \in Im$

Se fosse $a < 2$

$\frac{a}{2} b < ab \quad .. \quad \left(\frac{a}{2}\right)^n b$

assurdo perché Im deve contenere solo valori ≥ 1

$\Rightarrow$ Im contiene solo valori ≥ 2

$\boxed{\text{SENIOR 2009}}$

$\boxed{\text{Immagine}}$