SENIOR 2012 - C 1 MEDIUM

Titolo nota 04/09/2012

SERIE FORMALI

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi

$a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\text{ogf}(a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

$$B(x) = \text{ogf}(b_n)$$

$$A(x) + B(x) = \text{ogf}(a_n + b_n)$$

$$A(x)\cdot B(x) = \text{ogf}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

Per quali $A(x)$ esiste $B(x)$: $A(x)\cdot B(x) = 1$?

Se e solo se $a_0 \neq 0$

$\Rightarrow)$ $A(x)\cdot B(x) = 1$ $\quad a_0 \cdot b_0 = 1$ dunque $a_0 \neq 0$

$\Leftarrow)$ $a_0 \neq 0$.

$$A(x)\cdot B(x) = 1 \iff b_0 = \frac{1}{a_0} \text{ e } \forall n \geq 1 \ \underline{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}\right) + a_0 b_n = 0 \qquad b_n = -\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}}{a_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Basta definire b_n per ricorrenza "forte" secondo la formula

In particolare se $p(x)$ è un polinomio t.c. $p(0) \neq 0$

allora nelle serie formali esiste $\dfrac{1}{p(x)}$

In generale se $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ è una frazione algebrica

con $q(0) \neq 0$, ad essa possiamo associare

la serie formale $p(x) \cdot q(x)^{-1}$

Gli elementi invertibili dell'anello sono quelli non divisibili per x

CONGRUENZE (MODULO x^k)

$A(x) \equiv B(x) \pmod{x^k} \iff A(x) - B(x)$ è divisibile per x^k

FATTO IMPORTANTE!

$A(x) = B(x)$ se e solo se $A(x) \equiv B(x) \mod x^k$

per infiniti $k \in \mathbb{N}$

TRASLAZIONE DEGLI INDICI

$$A(x) = \mathrm{ogf}(a_n)$$

$\mathrm{ogf}(a_{n+1}) = ?$ $\qquad$ $\mathrm{ogf}(a_{n-1}) = ?$

con il coeff. di 0 uguale a 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}}{x} = \frac{A(x) - a_0}{x}$$

$$\sum_{n+1=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = A(x) - a_0$$

$$\mathrm{ogf}(a_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = x \sum_{n-1=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = x A(x)$$

Esempio. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$; quanto vale $\mathrm{ogf}(\alpha^n)$?

$$\frac{1}{1-\alpha x}$$ infatti modulo x^k

$$(1-\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \equiv (1-\alpha x) \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n x^n = 1 - \alpha^k x^k \equiv 1 \pmod{x^k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

ES 1

abbiamo una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2a_n + 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \end{cases}$$

Trovare una formula per a_n

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - (-1)^n \end{cases}$$

Sia $A(x) = \operatorname{ogf}(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\operatorname{ogf}(a_{n+1}) = \operatorname{ogf}(2a_n - (-1)^n)$$

$$\frac{A(x) - 1}{x} = 2A(x) - \operatorname{ogf}((-1)^n) = 2A(x) - \frac{1}{1+x}$$

$$A(x) - 1 = 2x\,A(x) - \frac{x}{1+x}$$

$$A(x)(1-2x) = 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$A(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{C_1}{1+x} + \frac{C_2}{1-2x}$$

moltiplico per $1+x$

$$\frac{1}{1-2x} = C_1 + C_2 \frac{1+x}{1-2x}$$

sostituisco $x = -1$

$$C_1 = \frac{1}{3}$$

Allo stesso modo $c_2 = \frac{2}{3}$

$$A(x) = \frac{1/3}{1-(-x)} + \frac{2/3}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n \right) x^n$$

$$a_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$$

In base 2

$a_0 = 1$ $\quad a_1 = 1$ $\quad a_2 = 11$ $\quad a_3 = 101$

Congettura

$a_{2k+1} = 1010 \ldots 1$ $\qquad a_{2k} = 1010 \ldots 1011$

Fibonacci

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$ogf(F_n) = F(x)$$

$$ogf(F_{n+2}) = ogf(F_{n+1} + F_n)$$

$$\frac{ogf(F_{n+1}) - F_1}{x} = F(x) + \frac{F(x) - F_0}{x}$$

$$\frac{\frac{F(x) - F_0}{x} - F_1}{x} = \frac{F(x) - x}{x^2} = F(x) + \frac{F(x)}{x}$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{c_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{c_2}{1-\alpha_2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n\right) x^n$$

Dovrebbe valere

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{x}{1-\alpha_2 x} = c_1 + c_2 \frac{1-\alpha_1 x}{1-\alpha_2 x}$$ Pongo $x = \frac{1}{\alpha_1}$

In generale se $p(x)$ ha grado minore di $q(x) = \prod_{i=1}^{h} (x-\alpha_i)^{\beta_i}$

allora $\frac{p(x)}{q(x)}$ si può scrivere come

$$\sum_{i=1}^{h} \left(\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{c_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \right)$$

DERIVATE FORMALI

D è un operatore che alla serie $ogF(a_n)$ associa

$ogF((n+1)a_{n+1})$

$$D(A(x)) = A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

1ª proprietà

D è lineare $\qquad D(A(x)+B(x)) = D(A(x)) + D(B(x))$

$$D(\lambda A(x)) = \lambda D(A(x))$$

2ª proprietà

$$D(A(x) \cdot B(x)) = D(A(x)) \cdot B(x) + D(B(x)) \cdot A(x)$$

Si dimostra per $A(x) = x^n$ $B(x) = x^m$ (conto semplice)

modulo x^k e usando la linearità

guadagno $A(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n$ $B(x) = x^m$

riusando la linearità guadagno (sempre modulo x^k)

$$A(x) = p(x) \qquad B(x) = q(x)$$

$$D\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B(x)^2}$$

SERIE DI SERIE DI POTENZE

abbiamo una successione $A_0(x), A_1(x), \dots$

Supponiamo che $\forall k \in \mathbb{N}$ la successione sia definitivamente nulla mod x^k

allora possiamo definire $\sum_{i=0}^{\infty} A_i(x)$ come

$$\text{ogf}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{in}\right) \qquad \text{ove } A_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} x^n$$

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$A_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$$

$$A_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^2\, x^n$$

$$A_3(x) = \sim$$

$$A_i(x) = \sum_{n=i}^{\infty} (n!)^i\, x^n$$

$$\begin{array}{lllll}
1 + & x + & x^2 + & x^3 + & \dots \\
 & 1!\,x + & 2!\,x^2 + & 3!\,x^3 + & \dots \\
 & & (2!)^2 x^2 + & (3!)^2 x^3 + & \dots \\
 & & & (3!)^3 x^3 + & \dots \\
 & & & + & \\
 & & & \vdots & \\
\hline
1 + & 2x + & 7x^2 + & 259x^3 + & \dots
\end{array}$$

COMPOSIZIONE DI SERIE FORMALI

Quando ha senso calcolare $A(B(x))$

Vorremmo $A(B(x)) = a_0 + a_1 B(x) + a_2 B(x)^2 + a_3 B(x)^3 + \dots$

Se $b_0 \neq 0$, ogni addendo di questa serie contiene un termine noto $\neq 0$, dunque non possiamo eseguire la composizione

Se $b_0 = 0$ allora $B(x)^i \equiv 0 \pmod{x^i}$

dunque posso calcolare la serie delle serie

In generale $A(B(x)) \neq B(A(x))$

INVERSA DI UNA SERIE FORMALE

$A(x)$ ha inversa $B(x)$ per definizione se $A(B(x)) = x$

Vogliamo $x \mid B(x)$. Allora modulo x

$$x = A(B(x)) \equiv a_0 + a_1 B(x) + \dots \equiv a_0 \equiv x \equiv 0 \pmod{x}$$

Serve $a_0 = 0$

Se anche $a_1 = 0$ però ho che modulo x^2

$$A(B(x)) = a_2 B(x)^2 + a_3 B(x)^3 + \dots \equiv 0 \equiv x \pmod{x^2}$$

assurdo

Dunque è necessario che sia $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$

Viceversa se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$

$b_0 = 0$

$$A(B(x)) = 0 + a_1 \cdot B(x) + a_2 \cdot B(x)^2 + \dots \equiv a_1 b_1 x \equiv x \pmod{x^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^n]\, A(x) = a_n$$

per $n \geq 2$

$$[x^n]\, A(B(x)) = 0 = [x^n]\left(a_1 \cdot B(x)\right) + [x^n]\left(a_2 \cdot B(x)^2 + \dots\right) =$$

$$= a_1 \cdot b_n + \text{MOSTRO}_n(b_0, \dots, b_{n-1})$$

$$b_n = -\frac{\text{MOSTRO}_n(b_0, \dots, b_{n-1})}{a_1}$$

$i \geq 2$

$[x^n]\, a_i\, B(x)^i = a_i [x^n] (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)(b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \cdot$

$\dots \cdot (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$

Sia $Id(x) = x$

$B(x)$ ha la stessa proprietà per cui $b_0 = 0$ $b_1 \neq 0$

Sia $C(x)$ t.c. $B(C(x)) = x$ l'inversa di $B(x)$

$A(B(C(x))) =$ $\cdot$ $\quad Id(C(x)) = C(x)$

$= A(Id(x)) = A(x)$

$A(B(x)) = Id(x)$ e $B(C(x)) = Id(x)$

dunque $A(x) = C(x)$

PRODOTTI INFINITI

abbiamo $A_0(x), A_1(x), \dots$

e vogliamo calcolare

$\prod_{i=0}^{\infty} A_i(x)$

Supponiamo che $a_{i,0} = 1 \quad \forall i$

e che $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_i(x) - 1$ sia definitivamente nulla mod x^k

$A_1(x) = 1 + a_1 x + \dots$

Per k abbastanza grande $(k > k_1)$

$$A_k(x) = 1 + a_2 x^2 + \dots$$

Per $k \geq k_2$

$$A_k(x) = 1 + a_3 x^3 + \dots$$

Allora

$$\prod_{i=0}^{\infty} A_i(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1 + \left(A_i(x) - 1\right)\right) \equiv \prod_{i=0}^{K_h}\left(1 + \left(A_i(x) - 1\right)\right) \pmod{x^h}$$

per $i \geq k_h$ $\quad A_i(x) = 1 + x^h \cdot B_i(x)$

adesso per calcolare $[x^n] \prod_{i=0}^{\infty} A_i(x)$ ragiono modulo x^{n+1}

Esiste $S \subseteq \mathbb{N}$ tale che ogni naturale n si scriva in modo unico come $a + 2b$ con a e $b \in S$?

Sia $A(x) = \sum_{n \in S} x^n$

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) \quad \left(= \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\| $$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \qquad\qquad A(x) \cdot A(x^2) = \left(\sum_{a \in S} x^a\right) \cdot \left(\sum_{b \in S} x^{2b}\right)$$

$$A(x)\cdot A(x^2) = \frac{1}{1-x}$$

$0 \in S$ perché altrimenti 0 non si scrive come $p+2b$

Vale anche $A(x^2)\cdot A(x^4) = \frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{A(x)}{A(x^4)} = 1+x$$

vale anche $\frac{A(x^4)}{A(x^{16})} = 1+x^4$

$$\frac{A(x^{16})}{A(x^{64})} = 1+x^{16}$$

e in generale

Sostituendo $x^{2^{2k}}$

$$\frac{A\left(x^{2^{2k}}\right)}{A\left(x^{2^{2(k+1)}}\right)} = 1+x^{2^{2k}}$$

$$\frac{A(x)}{\cancel{A(x^4)}}\cdot\frac{\cancel{A(x^4)}}{A(x^{16})} = (1+x)(1+x^4)$$

$$\frac{A(x)}{A(x^{64})} = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})$$

In generale $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{A(x)}{A\left(x^{2^{2k}}\right)} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1+x^{2^{2i}}\right)$$

Viene da pensare che $A(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{4^i}\right)$

Vediamo se è vero modulo $x^{2^{2k}}$

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^{2i}}\right) \equiv \prod_{i=0}^{k-1}\left(1+x^{2^{2i}}\right) = \frac{A(x)}{A\left(x^{2^{2k}}\right)} \equiv A(x) \pmod{x^{2^{2k}}}$$

È vero che $A(x)\cdot A(x^2) = \frac{1}{1-x}$?

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^{2i}}\right) \cdot \prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^{2i+1}}\right) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^{i}}\right) = \frac{1}{1-x}$$

S è l'insieme dei naturali la cui scrittura in base 2 contiene "1" soltanto nei posti dispari

$1000101 \in S \qquad 11 \notin S$

Sia a_n il numero di modi di scrivere n come somma di numeri dispari (non ordinati)

Sia b_n 〃 〃 〃 〃 〃

somma di numeri distinti ≥ 1 (non ordinati)

$a_0 = b_0 = 1$ Tesi $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = b_n$

Sia $A(x) = ogf(a_n)$ $B(x) = ogf(b_n)$

$$A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + \dots)\dots$$

$$= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2i+1}}$$

$$B(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$$

$$1 \stackrel{?}{=} \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x^{2i+1}) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$$

$$\frac{1}{A(x)} = \prod_{\substack{i \geq 0 \\ i \text{ dispari}}} (1 - x^i) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)}{\prod_{\substack{i \geq 2 \\ i \text{ pari}}} (1 - x^i)}$$

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x^i) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i)}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{2i})} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x^i) \cdot \frac{1}{(1-x^i)}$$

$$\parallel$$

$$1$$

RADICE QUADRATA DI UNA SERIE FORMALE

$$B(x) = \sqrt{A(x)} \iff B(x)^2 = A(x)$$

già sappiamo che $B(x)$ non è necessariamente unica

anzi se $B(x)^2 = A(x)$ $\quad (-B(x))^2 = A(x)$

Se $B(x)^2 = A(x)$ allora $v_x(A(x))$ è pari

Se $v_x(A(x)) = 2k$ ragiono su $\frac{A(x)}{x^{2k}}$, dunque

wlog $a_0 \neq 0$

si avrà $b_0^2 = a_0$ $\quad b_0 = \pm\sqrt{a_0}$

Scegliamo b_0

$$B(x)^2 = \text{ogF}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}\right)$$

vogliamo dunque che sia $b_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} b_i b_{n-i} = a_n$

è la solita ricorrenza

generalizzare per la $\sqrt[n]{A(x)}$

BINOMIO DI NEWTON GENERALIZZATO

sia $k \in \mathbb{N}$; chiamiamo $p_k(n)$ il polinomio

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Per ragioni combinatoriche sappiamo che

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$ = è una ogf in due variabili n e x

Vorremmo che fosse anche $\forall m \in \mathbb{N}_{0,1}$

$$(1+x)^{1/m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/m}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(1/m)\, x^i$$

è la stessa dell'algoritmo di prima con $b_0 = 1$

Dobbiamo dimostrare che $\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i\left(\frac{1}{m}\right) x^i\right)^m = 1+x$

Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i(n)\, x^i\right)^m = \left((1+x)^n\right)^m = (1+x)^{mn} = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i(mn)\, x^i$$

$$[x^i] \quad = [x^i] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|$$

$$p_i(mn)$$

Vale l'uguaglianza anche fra i polinomi in n per $n = \frac{1}{m}$

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{1/m}{i} x^i\right)^m = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{1}{i} x^i = 1+x$$

$$(1+x)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-m}{i} x^i \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

(Usare che $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$)

$$\binom{-m}{i} = \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)\cdot \ldots \cdot(-m-i+1)}{i!} =$$

$$= (-1)^i \cdot \frac{(m+i-1)(m+i-2)\cdot \ldots \cdot m}{i!} = (-1)^i \binom{m+i-1}{i}$$

$\forall i \in \mathbb{N}$

In quanti modi scrivo n come somma di k addendi ordinati e ≥ 0? In a_n modi

$$A(x) = \sum a_n x^n$$

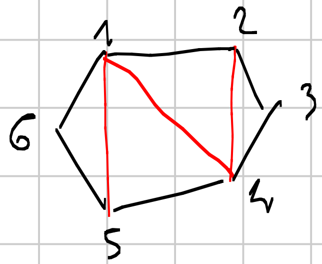
$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x+\ldots) \ldots (1+x+\ldots) =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{-k}{i} (-x)^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{k+i-1}{i} x^i$$

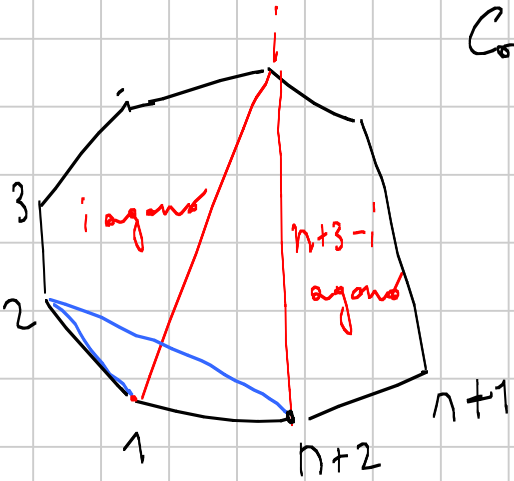
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

CATALAN

Abbiamo un $(n+2)$-agono convesso. Quante triangolazioni



possiamo fare? Sia C_n il numero cercato.



Fissiamo il lato $1 - n+2$

Contiamo le triangolazioni in cui $1 - n+2 - i$ è un triangolo con $2 \leq i \leq n+1$ e poi sommeremo su i

Abbiamo $C_{i-2} \cdot C_{n+1-i}$ possibilità

$$C_n = \sum_{i=2}^{n+1} C_{i-2} \cdot C_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$$

Se $C(x) = \mathrm{ogf}(C_n)$

allora ...

$$C(x)^2 = \mathrm{ogf}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}\right) = \mathrm{ogf}\left(C_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{C(x) - 1}{x}$$

$$x\, C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

$$4x^2 C(x)^2 - 4x\, C(x) + 1 - 1 + 4x = 0$$

$$\left(2x C(x) - 1\right)^2 = 1 - 4x$$

modulo x

$$2x\,C(x) - 1 \equiv -1$$

qui prendo la soluzione con $\sqrt{1} = -1$ che chiamiamo $-\sqrt{1-4x}$

$$2x\,C(x) - 1 = -\sqrt{1-4x}$$

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{1/2}{i}(-4x)^i}{2x}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{i} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2} - k}{i!} = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{i-1}(1-2k)}{i!}$$

$$= \frac{(-1)^{i-1}}{2^i}\,\frac{\prod_{k=1}^{i-1}(2k-1)}{i!} = \frac{(-1)^{i-1}}{2^i} \cdot \frac{(2i-3)!!}{i!} =$$

$$= \frac{(-1)^{i-1}}{2^{2i-1}} \cdot \frac{\overbrace{2^{i-1}\cdot(i-1)!}\cdot(2i-3)!!}{i!\cdot i-1!} = \frac{(-1)^{i-1}(2i-2)!}{2^{2i-1}\; i!\cdot i-1!} =$$

$$= \binom{2i-2}{i-1}\cdot\frac{(-1)^{i-1}}{2^{2i-1}}\cdot\frac{1}{i} = \binom{\frac{1}{2}}{i}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sum \binom{\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i}{2x} =$$

$$= \frac{\sum_{i \geq 1} \binom{2i-2}{i-1} \cdot \frac{\cancel{(-1)^{2i}}}{2^{\cancel{2i-1}}} \cdot \frac{1}{i} \cancel{4^i} x^i}{\cancel{2}x} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \binom{2i-2}{i-1} \frac{x^i}{i}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\text{ogf}\left(\binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} \right)$$