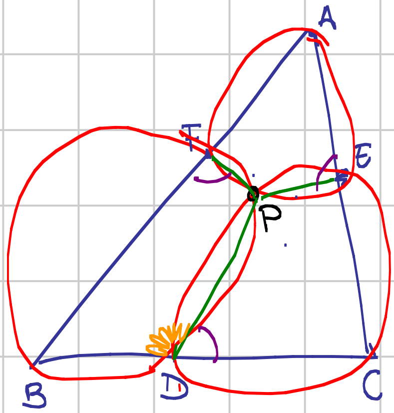
# G3 - MEDIUM

- Maria -

Titolo nota 06/09/2012




**Teorema: (Miquel)**

ABC triangolo, D, E, F sui lati BC, CA, AB.
Allora le circonf circoscr a $A\hat{E}F$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}E$ concorrono.

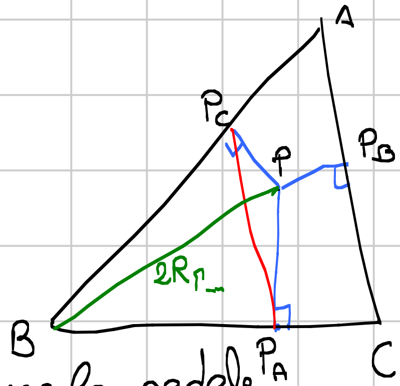
Dim:

$P \in \Gamma_{AEF} \cap \Gamma_{BDF}$

$B\hat{F}P \underset{\uparrow}{=} P\hat{D}C$ BDPF ciclico

$B\hat{F}P = P\hat{E}A$ AFPE ciclico

$\Rightarrow$ $P\hat{D}C = P\hat{E}A$ $\Rightarrow$ PDEC ciclico.




**Def:** triangolo pedale $P_AP_BP_C$

**Es:** calcolare le lunghezze dei lati del triangolo pedale
(va bene anche P esterno ad ABC, ex)

Oss: $BP_APP_C$ è ciclico $\Rightarrow$ $P_AP_C = 2R_{\Gamma_{BP_APP_C}} \sin\hat{B}$
$= BP \sin\hat{B}$
$= \dfrac{BP \cdot b}{2R}$

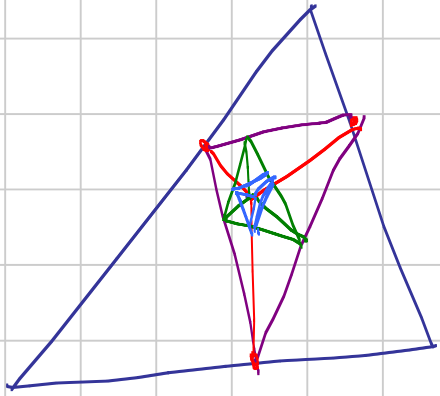
**Teorema (Eulero):** l'area del triangolo pedale è

$$\frac{R^2 - OP^2}{4R^2} \cdot S_{ABC}$$

potenza di P rispetto a $\Gamma_{ABC}$

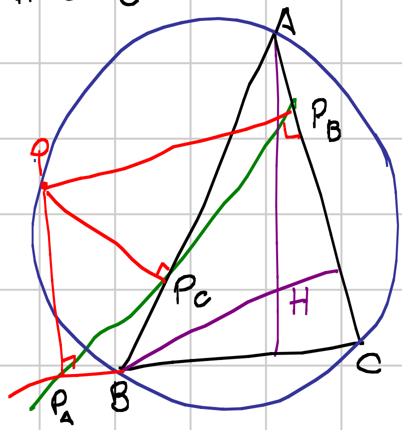
Hint: $S_{ABC} = 4R^2 \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C}$ ....

**Es:** il triangolo "tripedale" è simile al triangolo iniziale
(hint: angoli)



**Teorema (Simson line)**

ABC triangolo, P e il suo triangolo pedale $P_AP_BP_C$.
Allora $P_A, P_B, P_C$ sono allineati $\iff P \in \Gamma_{ABC}$




**Dim:**

$P_AP_BP_C$ allineati $\iff$

$$P_AP_B \pm P_BP_C \pm P_AP_C = 0$$

Wlog $P_AP_B = P_AP_C + P_CP_B$.

$$\frac{CP\cdot c}{\cancel{2R}} = \frac{BP\cdot b}{\cancel{2R}} + \frac{AP\cdot a}{\cancel{2R}}$$

$\iff$ vale = in Tolomeo su ACBP.

$\iff$ ACBP ciclico.

**Dim 2:** $P_AP_BP_C$ è degenere $\iff$ la area $0 = \frac{pow_{\Gamma_{ABC}} P}{4R^2} S_{\Delta ABC}$

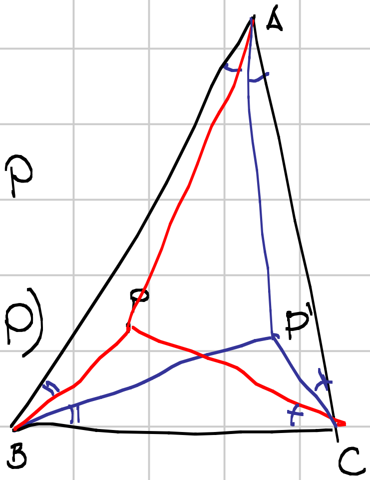
$\iff pow_\Gamma P = 0 \iff P \in \Gamma_{ABC}$.

**Dim 3:** angoli.

**Esercizi:** ① la retta di Simson di $P \in \Gamma_{ABC}$ passa per il pto medio di PH (e quindi sta sulla circonferenza di Feuerbach di ABC)

② r retta di Simson di P, s retta di Simson di Q, allora r e s formano un angolo di $\frac{P\hat{O}Q}{2}$.

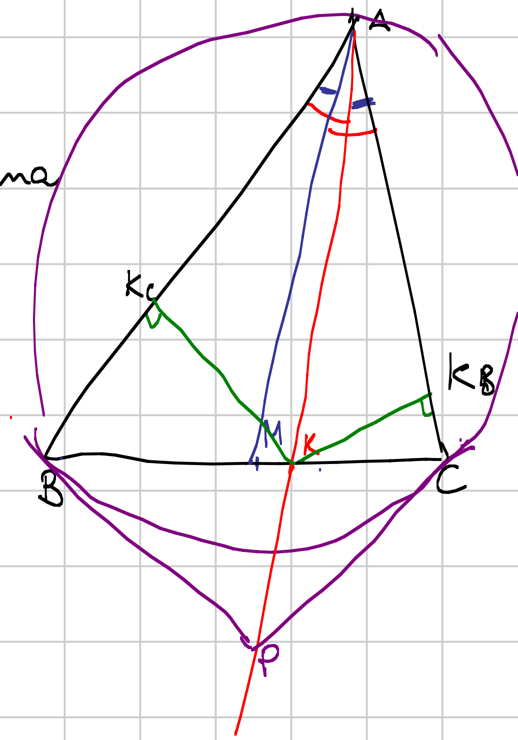
## - Coniugato isogonale




Dato $P \in A\hat{B}C$, simmetrizzo le Ceviane uscenti da P rispetto alle bisettrici degli angoli.
Concorrono in P' (detto il coniugato isogonale di P) per Ceva trigonometrico.

Esempi: ① Circocentro - ortocentro
② Incentro fisso
③ Baricentro - Lemoine (cioè il punto di incontro delle simmediane)

[Parentesi: Simmediane




La simmediana è la simmetrica della mediana rispetto alla bisettrice. (cioè $B\hat{A}M = K\hat{A}C$)

Proprietà: ① $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

② $\dfrac{KK_C}{KK_B} = \dfrac{AB}{AC}$

③ Sia $P = BB \cap CC$. Allora $P, K, A$ sono allineati.

Dim: ① $\dfrac{BK}{\sin B\hat{A}K} \overset{\boxed{\text{teo dei seni su } ABK}}{=} \dfrac{AB}{\sin A\hat{K}B}$ $\qquad \dfrac{KC}{\sin C\hat{A}K} = \dfrac{AC}{\sin A\hat{K}C}$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB \cdot \sin B\hat{A}K}{\cancel{\sin A\hat{K}B}} \cdot \frac{\cancel{\sin A\hat{K}C}}{AC \sin C\hat{A}K}$$

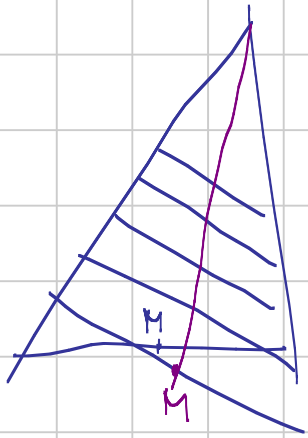
$$= \frac{AB}{AC} \frac{\sin B\hat{A}K}{\sin C\hat{A}K} \overset{\boxed{AK \text{ simmediana}}}{=} \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin M\hat{A}C}{\sin M\hat{A}B}$$

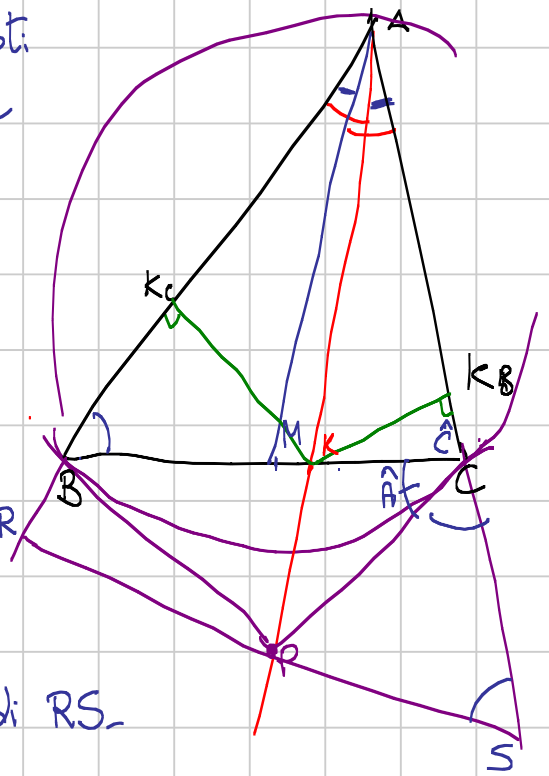
$$= \frac{AB^2}{AC^2}$$

teo dei seni su AMB e AMC (con BM = MC)

(2) $\frac{KK_C}{KK_B} = \frac{BK \sin\hat{B}}{CK \sin\hat{C}} \underset{\boxed{(1) + \text{teo seni su } ABC}}{=} \frac{AB^2}{AC^2}\cdot\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

Oss: la simmediana è il luogo dei pti medi delle antiparallele al lato BC




Traccio l'antiparallela passante per P.

Voglio mostrare che P è pto medio di RS.

$\hat{B} = A\hat{B}C \underset{\boxed{\text{antiparallela}}}{=} R\hat{S}C$

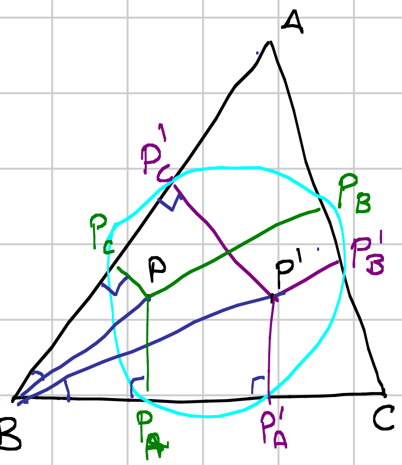
$\Rightarrow$ RBCS è ciclico

$P\hat{C}S = 180 - P\hat{C}B - B\hat{C}A = 180 - \hat{A} - \hat{C} = \hat{B}$

$\Rightarrow$ PCS è isoscele. $\Rightarrow PS = PC \underset{\boxed{PBC\text{ isoscele}}}{=} PB = PR$

$\Rightarrow$ P è il centro della circonf circoscritta a BCSR, di cui RS è il diametro $\Rightarrow PS = PR$.

Teorema: P e P' coniugati isogonali. Allora i triangoli pedali di P e P' sono conciclici.




Dim:

Step 1 $P_A, P_{A'}, P_C, P'_C$ conciclici $\Leftrightarrow BP_A \cdot BP'_A \overset{?}{=} BP_C \cdot BP'_C$

$BP_C = BP \cdot \cos P\hat{B}A$ $\qquad BP'_C = BP' \cdot \cos P'\hat{B}A$

$BP_A = BP \cos P\hat{B}C$ $\qquad$ $BP'_A = BP' \cdot \cos P'\hat{B}C$

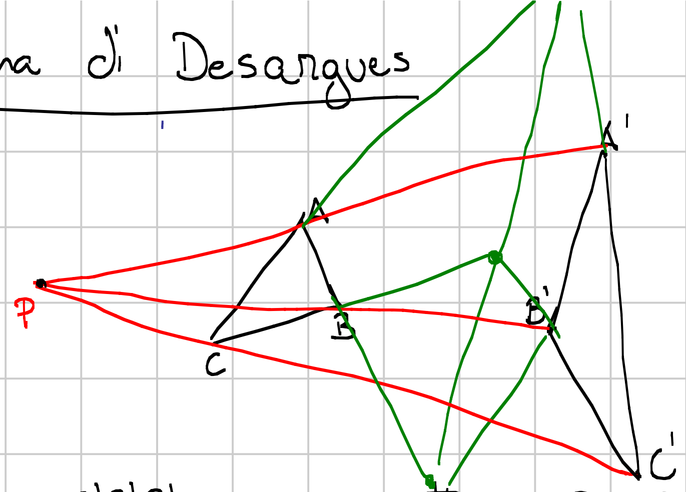
$$\underbrace{BP \cdot BP'} \cdot \underbrace{\cos P\hat{B}A} \cdot \underbrace{\cos P'\hat{B}A} = \underbrace{BP \cdot BP'} \cdot \underbrace{\cos P\hat{B}C} \cdot \underbrace{\cos P'\hat{B}C}$$

$\boxed{\text{Uso } P \text{ e } P' \text{ coniugati isogonali!}}$

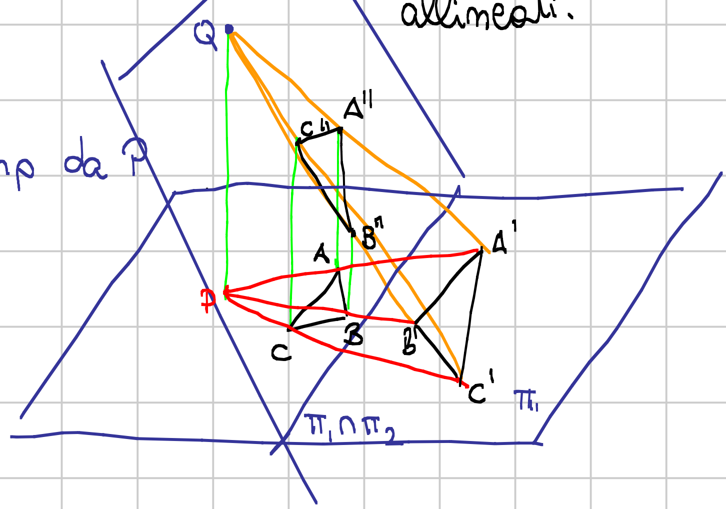
Oss: il centro della circo per quei 4 pti è il pto medio di $PP'$!
(sta sull'asse di $P_AP_{A'}$ e $P_CP'_C$)

Step 2: le 3 circonferenze dello step 1 coincidono.
1° modo: stesso centro (pto medio tra $P$ e $P'$) e per intersecarsi hanno lo stesso raggio
2° modo: se due circonf non coincidono ⇒ sono tutte distinte
L'asse radicale di 2 circonf è un lato
Ma date 3 circonferenze gli assi radicali devono concorrere.

# Teorema di Desargues




ABC e A'B'C' sono prospettici $\iff$ $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ sono allineati.




Dim: $\boxed{\Rightarrow}$

Q esterno al piano, sulla perp da P a $\pi_1$.

Definisco A'', B'', C''

Chiamiamo $\pi_2$ il piano passante per A'', B'', C''

Consideriamo $\pi_1 \cap \pi_2$.

$X = A'C' \cap A''C''$ sta su $\pi_1 \cap \pi_2$ perché A''C'' sta in $\pi_2$, A'C' sta in $\pi_1$ $\Rightarrow$ ok

esiste perché le due rette stanno nel piano Q, A'', C'', C', A'

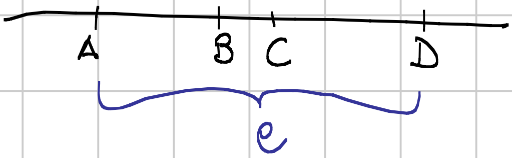
Allo stesso modo $Y = AC \cap A''C''$ sta su $\pi_1 \cap \pi_2$

Quindi X e Y stanno su $\pi_1 \cap \pi_2$ e su A''C'' $\Rightarrow$ $X = Y$

$\Rightarrow$ A'C' e A''C'' si intersecano in quel punto che sta su $\pi_1 \cap \pi_2$.

# Birapporti

Il birapporto tra 4 pti allineati A,B,C,D




$$(A,B;C,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Oss: consideriamo segmenti con segno

• i pt possono essere "all'infinito"

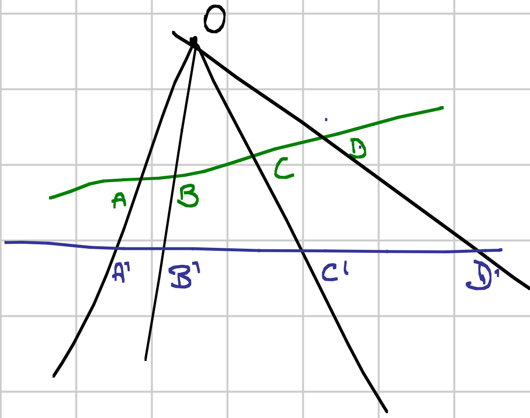
Oss: $(A,B;C,D) = 1 \iff A=B$ o $C=D$

Idea: fissiamo A,B,C, sia $\ell = AD$. Si vede "facilmente" che il birapporto, in funzione di $\ell$, è una funzione "monotona"

$$\frac{AC\,(\ell - AB)}{BC \cdot \ell} = \frac{AC}{BC}\left(1 - \frac{AB}{\ell}\right)$$

Proprietà fondamentale:

$$(A,B;C,D) = (A',B';C',D')$$




Conseguenza: si può definire il birapporto di un fascio di 4 rette (come? intersecandole con una trasversale qualunque).

Strategia: mostriamo che $(A,B;C,D)$ si esprime in funzione dei soli angoli $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ ...

$$\frac{AC}{\boxed{\sin A\hat{O}C}} = \frac{\boxed{AO}}{\boxed{\sin O\hat{C}A}}$$

teo dei seni su $A\hat{O}C$

buono

$$\frac{AD}{\boxed{\sin A\hat{O}D}} = \frac{\boxed{AO}}{\boxed{\sin O\hat{D}A}}$$

$$\frac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \frac{\boxed{OB}}{\boxed{\sin O\hat{D}A}}$$

teo seni su $O\hat{D}B$

$$\frac{BC}{\sin B\hat{O}C} = \frac{\boxed{OB}}{\boxed{\sin O\hat{C}A}}$$

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin A\hat{O}C \cdot \sin B\hat{O}D}{\sin A\hat{O}D \cdot \sin B\hat{O}C}$$

Oss: i birapporti che posso ottenere permutando A,B,C,D sono

[Es: $\lambda = (A,B;C,D)$ $\qquad (B,A;C,D) = \dfrac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC} = \dfrac{1}{\lambda}$ ]

$$\left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda} \right\}$$

Esempio: $(A,B;C,D) + (A,C;B,D) = 1$. (ex)

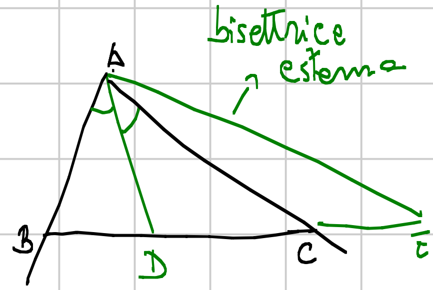
Definizione: A,B,C,D allineati. Se $(A,B;C,D) = -1$ si dice QUATERNA ARMONICA.

Esempio: vertici e piedi delle bisettrici

$$(B,C;D,E) = -1$$

$$\frac{BD \cdot CE}{BE \cdot CD} = -\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}} \cdot \frac{\cancel{AC}}{\cancel{AB}} = -1$$

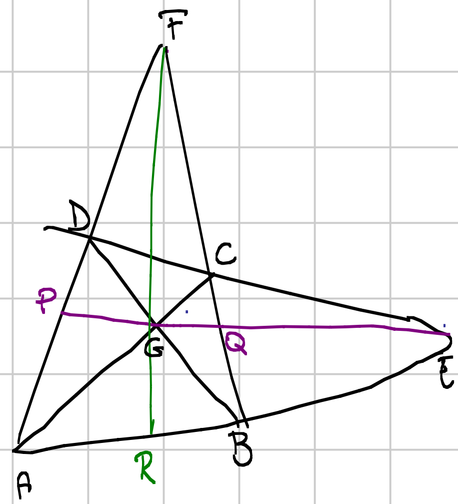
teo della bisettrice interna ed esterna




Esempio: quadrilatero completo

$(P,Q;G,E) = -1$

e $(A,B;R,E) = -1$




Il 2° si ottiene dal 1° proiettando da F.
Basta dimostrare il 1°.

$$\lambda = (P,Q;E,G) = (P,F;D,A) = (P,Q;G,E) = \frac{1}{(P,Q;E,G)}$$

proietto con centro C su AF

da B su PE

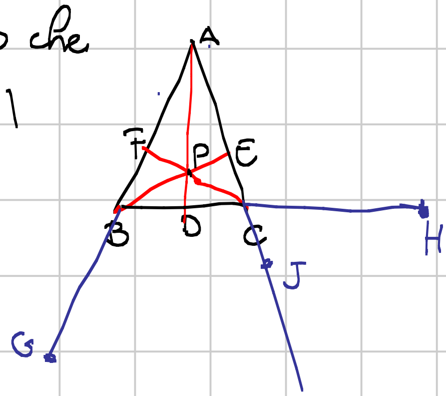
Quindi $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ no perché non ci sono più coincidenti.

$\lambda = \boxed{-1}$

## Esempio: retta tripolare

Definiamo $G, H, J$ su $AB$, $BC$, $CA$ in modo che

$(A,B;F,G)=-1$ $\quad (B,C;D,H)=-1$ $\quad (A,C;E,J)=-1$



Allora $G, H, J$ sono allineati.

$$\begin{cases} \dfrac{AF \cdot BG}{AG \cdot BF} = -1 & \dfrac{AG}{GB} = -\dfrac{AF}{FB} \\[2ex] \dfrac{BD \cdot CH}{BH \cdot CD} = -1 & \dfrac{BH}{HC} = -\dfrac{BD}{DC} \\[2ex] & \dfrac{CJ}{JA} = -\dfrac{CE}{EA} \end{cases}$$

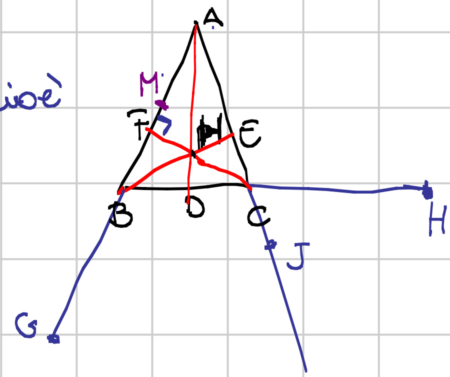
Quindi: $\dfrac{AG}{GB} \cdot \dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CJ}{JA} = -\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \underset{\uparrow}{=} -1$ Ceva con $P$

Per Menelao sono allineati.

**Esercizio:** La retta tripolare dell'ortocentro è l'asse radicale tra la circonferenza circoscritta e Feuerbach.

Mostriamo che $G$ sta sull'asse radicale, cioè

$$GB \cdot GA \overset{?}{=} GF \cdot GM$$



$$\iff \frac{GA}{GM} \overset{?}{=} \frac{GF}{GB}$$

$$\iff \frac{GA}{GM} - 1 \overset{?}{=} \frac{GF}{GB} - 1 \iff \frac{MA}{GM} \overset{?}{=} \frac{BF}{GB}$$

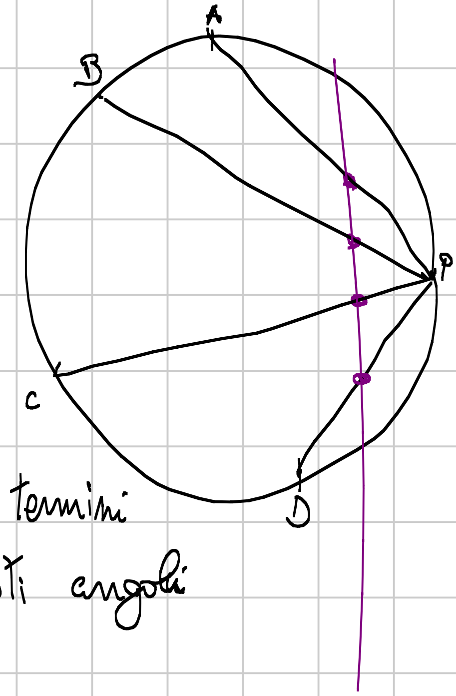
Sappiamo che $(AB;FG)=-1 \implies \dfrac{AF}{AG} = \dfrac{BF}{GB} = \lambda$

$$\frac{MA}{GM} = \frac{\frac{AF+BF}{2}}{\frac{AG+GB}{2}} = \frac{\frac{\lambda AG + \lambda GB}{\cancel{2}}}{\frac{AG+GB}{\cancel{2}}} = \lambda$$

# Birapporti e coniche

**Def:** dati 4 pti $A, B, C, D$ su $\Gamma$ conica, $P \in \Gamma$ definiamo

$$(A,B;C,D)_\Gamma = \text{birapporto tra le rette } (AP, BP; CP, DP)$$




**Oss:** non dipende dal punto $P$.
Infatti avevamo scritto il birapporto tra rette in termini degli angoli in $P$. Se muovo $P$ su $\Gamma$ questi angoli "non cambiano".

# Teorema di Pascal

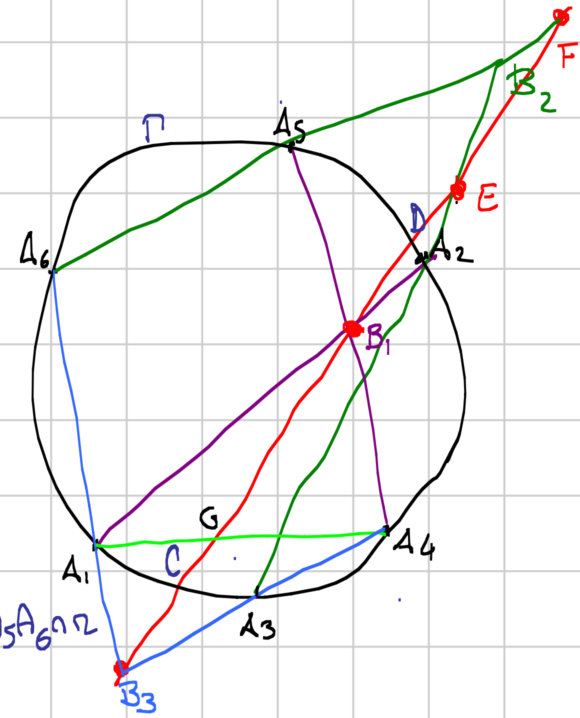
$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ punti su una conica

$B_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5$

$B_2 = A_2A_3 \cap A_5A_6$

$B_3 = A_3A_4 \cap A_6A_1$

Allora $B_1, B_2, B_3$ sono allineati




Sia $r = B_1B_3$, $E = A_2A_3 \cap r$, $F = A_5A_6 \cap r$
$C, D$ sono le intersez $r \cap \Gamma$

$$(C B_3; F D) = (C A_1; A_5 D)_\Gamma = (C G; B_1 D)$$

$\boxed{\text{centro } A_6, \text{ su } \Gamma}$ $\boxed{\text{centro } A_4 \text{ su } CD}$

$$(C B_3; E D) = (C, A_4; A_2 D)_\Gamma = (C G; B_1 D)$$

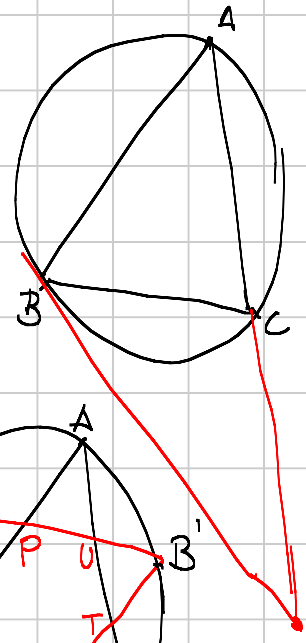
$\boxed{\text{centro } A_3 \text{ su } \Gamma}$ $\boxed{\text{centro } A_1 \text{ su } CD}$

Quindi: $F = E$.

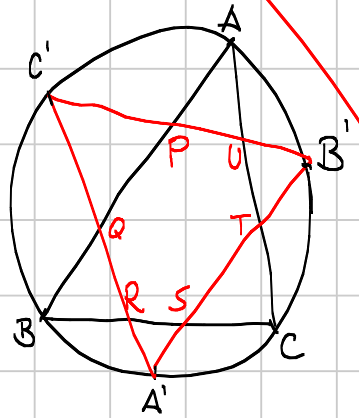
Esercizio: $AB \cap CC$, $BC \cap AA$, $AC \cap BB$ sono allineati

tangente a $\Gamma_{ABC}$ in $C$

Hint: Pascal su $AABBCC$



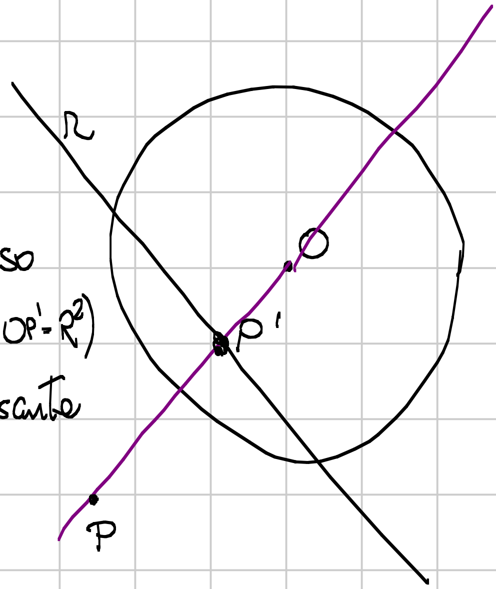

Esercizio: $A', B', C'$ pti medi degli archi. Allora $PS$, $QT$, $UR$ concorrono nell'incentro del triangolo.



# Polari

$\Gamma$ circonferenza. Definiamo la mappa

$$\{\text{punti del piano}\} \longrightarrow \{\text{rette}\}$$
$$P \longrightarrow r$$



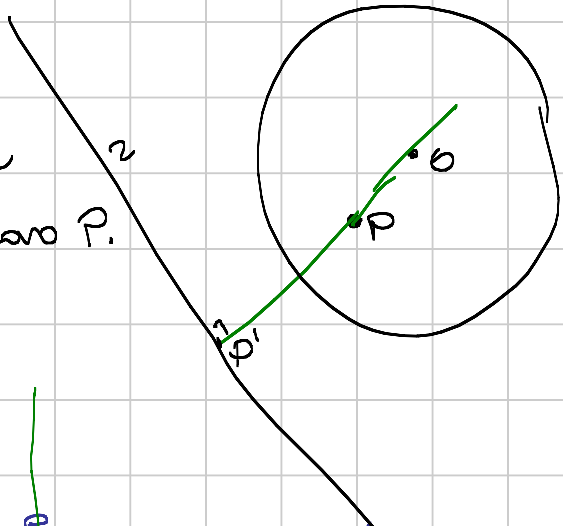

Definisco $P'$ l'inverso di $P$ rispetto a $\Gamma$ $(OP \cdot OP' = R^2)$

$r$ è la perp a $OP$ passante per $P'$

L'inversa di questa mappa:

$$\{\text{rette}\} \longrightarrow \{\text{punti}\}$$
$$r \longrightarrow P$$

Data $r$, faccio la distanza da $O$ e trovo $P'$. Faccio l'inverso di $P'$ e trovo $P$.

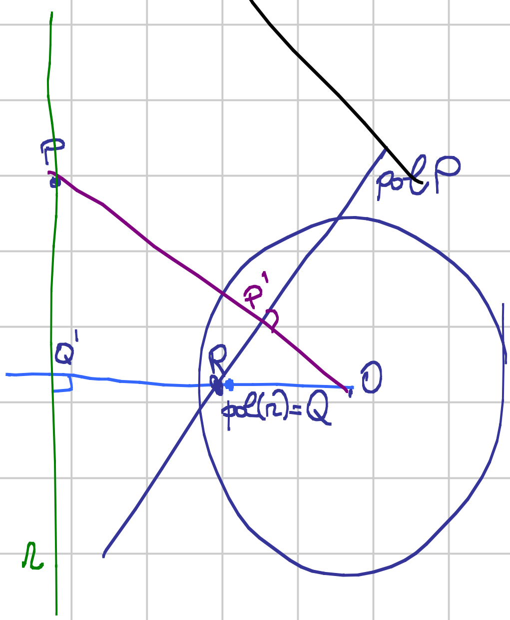



## Proprietà

① $P \in \Gamma \iff P \in pol_\Gamma P$

② $\boxed{P \in r \iff pol\,P \ni pol\,r}$

(rovescia le inclusioni)




$\boxed{\Rightarrow}$ $\begin{cases} OP \cdot OP' = R^2 \\ OQ \cdot OQ' = R^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{OQ'}{OP'}$

$\Rightarrow$ $OPQ'$ e $OQP'$ sono simili

Se chiamiamo $R = pol P \cap OQ' \Rightarrow OPQ'$ è simile a $OP'R$

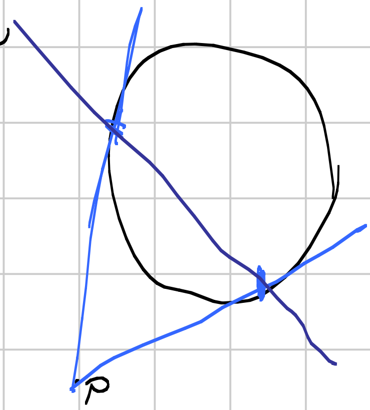
$\Rightarrow R = Q$

③ $pol\,P \cap pol\,Q = pol(PQ)$

$P \in PQ$ , $Q \in PQ \Rightarrow$ per (2) $\text{pol} PQ \in \text{pol} P$ , $\text{pol} PQ \in \text{pol} Q$

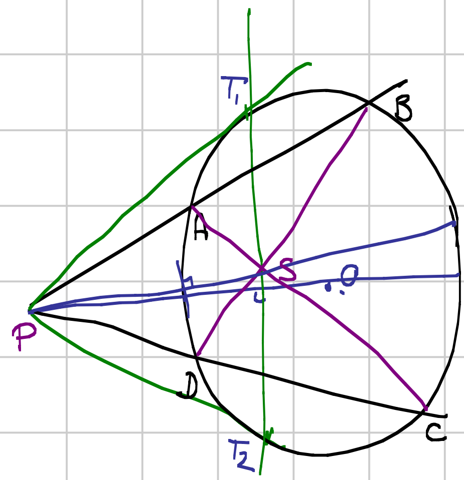
(4) $\text{pol}(r \cap s)$ = retta per $\text{pol}(r)$ e $\text{pol}(s)$.
(ex)

(5) se $P$ è esterno a $\Gamma$, $\text{pol} P$ è la congiungente delle due tangenti a $\Gamma$
(ex)




Lemma della polare 1

ABCD quadrilatero ciclico. Allora
$S \in \text{pol} P$




Dim: ex
Hint: considero i 4 pti sulla retta PS con Birapporto −1 (per il fatto sui quadrilateri completi).
Considero poi $PO \cap \Gamma$ e $PO \cap T_1T_2$ ...

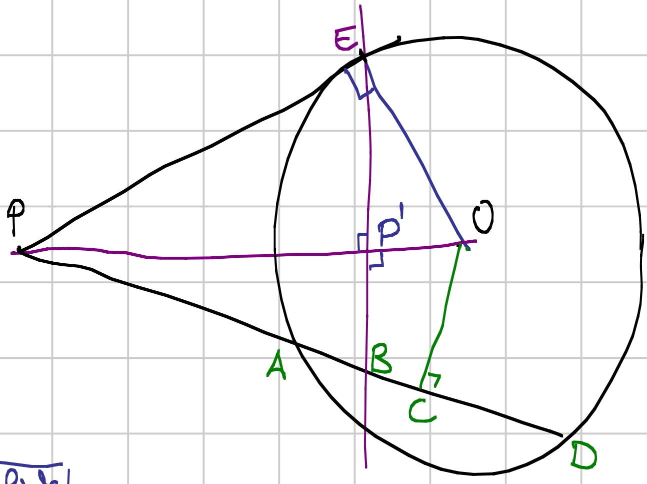
Hint per 2ª sol: $R = AA \cap CC$  $P = AB \cap CD$  $BC \cap DA$
Pascal su AABCCD
Pascal su BBADDC.

# Lemma della polare 2

C pto medio di AD

E pto di tangenza

$B = \text{pol}\,P \cap AD$.




Allora: (1) $PA \cdot PD = PB \cdot PC$

(2) $(A,D;P,B) = -1$

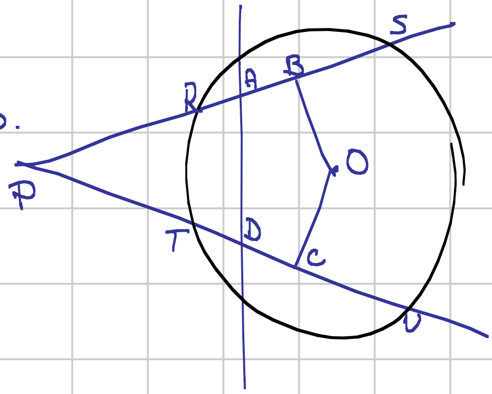
(1) $PA \cdot PD = PE^2 = PP' \cdot OP = PB \cdot PC$

teorema di Euclide

potenza di P

potenza rispetto a $\Gamma_{OCBP'}$

(considero 2 secanti a caso ...)




Oss: nella nuova figura ABCD è ciclico.

Infatti dal fatto precedente

$PR \cdot PS \overset{(1)}{=} PA \cdot PB$

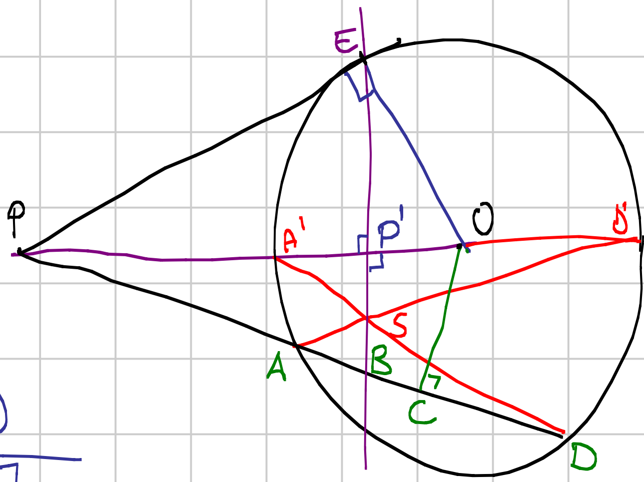
$\|$

$PT \cdot PU \overset{(1)}{=} PD \cdot PC$

(2) Step 1: basta farlo quando AD è un diametro

$(AD;PB) = (D'A';PP')$

proietto da S su A'D'




Step 2:

Basta $(D'A';PP') \overset{?}{=} -1$

$$\frac{D'P \cdot A'P'}{D'P' \cdot A'P} = \frac{-(OP+r)\left(r - \frac{r^2}{OP}\right)}{-\left(r + \frac{r^2}{OP}\right)\left[-(OP-r)\right]}$$

$$= -\frac{(OP+r)\, r \frac{1}{OP}(OP-r)}{r \frac{1}{OP}(OP+r) \cdot (OP-r)} = -1$$