SENIOR 2013 – ALGEBRA (Advanced

Titolo nota 06/09/2013

Funzioni convesse

Insiemi convessi: I è convesso se per ogni $P \in I$ e $Q \in I$ si ha che segmento PQ è tutto contenuto in $I \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\boxed{n=1}$ Gli insiemi convessi sono:

- intervalli
- semirette
- tutto $\mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix}\text{intervalli}\\ \text{semirette}\end{matrix}\right\}$ con o senza bordo

$n>1$: ce ne sono di più.

$I \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\quad f : I \to \mathbb{R}$ è <u>convessa</u> se

$$f(\underbrace{\lambda P + (1-\lambda) Q}_{\in I \text{ perché } I \text{ è convesso}}) \leq \lambda f(P) + (1-\lambda) f(Q)$$

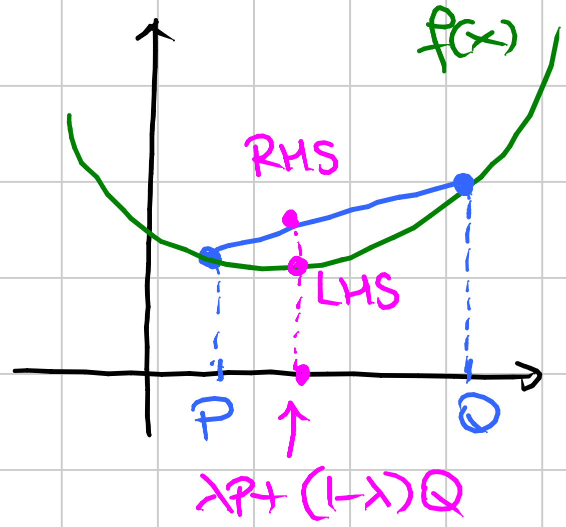
$\forall P \in I, \ \forall Q \in I, \ \forall \lambda \in [0,1]$

<u>Oss.</u> $\lambda P + (1-\lambda) Q$ al variare di $\lambda \in [0,1]$ è il segm. PQ

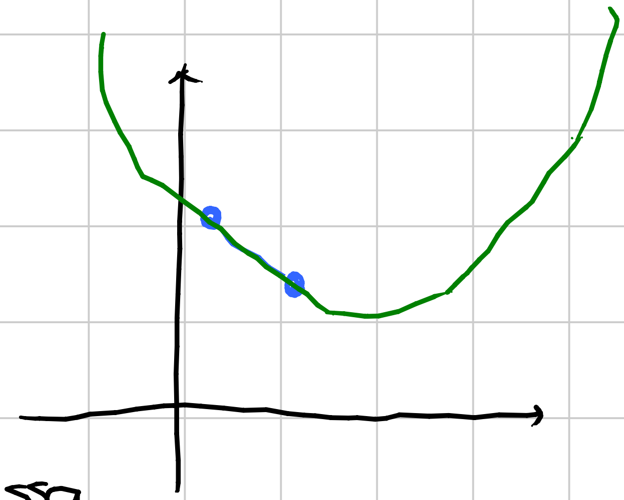
Quando vale il segno di $=$?
1. $\lambda = 0$
2. $\lambda = 1$
3. $P = Q$ e $\lambda \in [0,1]$

Se non ci sono altri casi di $=$, f si dice strett. convessa.

$\boxed{n=1}$ $f(x)$ è convessa $\iff$
il grafico sta sotto i seguenti secanti



Una funzione è convessa, ma non strett. convessa $\iff$ il grafico ha tratti "RETTILINEI"



Def. f è CONCAVA se
LHS $\geq$ RHS
oppure (è lo stesso) se $-f$ è convessa

Oss. f è convessa $\iff$ sopragrafico è convesso come insieme di $\mathbb{R}^2$ (in gen. $\mathbb{R}^{n+1}$)

Esempi in $\mathbb{R}^2$

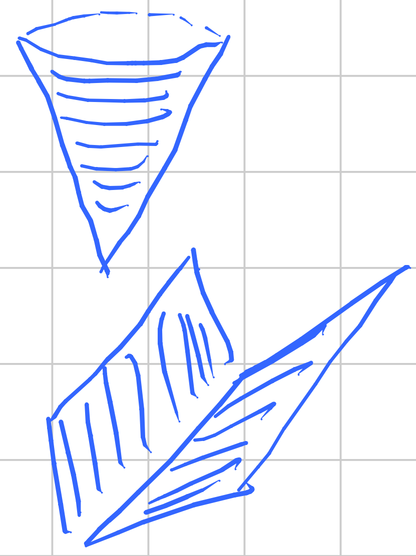
① $f(x) = \text{distanza}(x, P)$

x ↑ punto; P ↑ fissato

② $f(x) = \text{distanza}(x, r)$

r ↑ retta

③ $f(x) = [\text{distanza}(x, P)]^2$.



Oss. Sottolivello di una funzione

$$\{x \in I : f(x) \leq R\} = S_R$$

R ↑ fissato

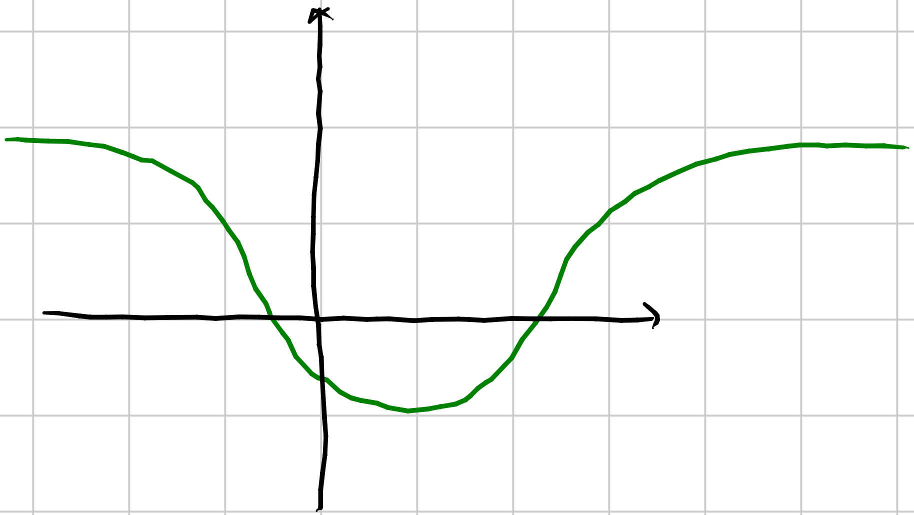
Se f è convessa, tutti i sottolivelli sono convessi

$\boxed{\text{Dim.}}$ $P \in S_R$ $\quad Q \in S_R$ $\quad \lambda \in [0,1]$ $\quad \lambda P + (1-\lambda) Q \in S_R$

$$f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \underset{\text{conv.}}{\leq} \lambda \underbrace{f(P)}_{\leq R} + (1-\lambda) \underbrace{f(Q)}_{\leq R} = R$$

Vale il viceversa? NO!!

Ogni funzione monotona ha i sottolivelli convessi!!



Nemmeno se i sottolivelli sono intervalli!!

$\boxed{n=1}$ f convessa $\quad f(x) = 0$

Se è strett. convessa, ne ha al max 2

<u>Dim.</u> Se ne avesse 3, prendo $a<b<c$ e in b deve stare sotto la congiungente.

Domanda: $f(x) = g(x)$ con f e g convesse

Può avere ∞ soluzioni con i grafici che si attraversano ∞ volte:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + \sin x$

$f'(x) = 2x$ $\qquad$ $g'(x) = 2x + \cos x$

$f''(x) = 2$ $\qquad$ $g''(x) = 2 - \sin x \geq 1$

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

$I \subseteq \mathbb{R}$ convesso $\quad f: I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

$$f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{\text{combinazione convessa di } x_1, \dots, x_n}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n \quad \lambda_i \geq 0 \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$\boxed{\text{Dim}}$ Induzione UP-DOWN

$\boxed{n=2}$ Definizione

$\boxed{n \Rightarrow 2n}$ $\rightsquigarrow$ vero per 2^k

$\boxed{n+1 \Rightarrow n}$ $\rightsquigarrow$ completo

$\boxed{n \Rightarrow 2n}$

$$f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n} + \underbrace{\lambda_{n+1} x_{n+1} + \dots + \lambda_{2n} x_{2n}})$$

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \qquad \Lambda_2 = \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{2n}$$

$$= f\Big(\Lambda_1 \underbrace{\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\Lambda_1}\right)}_{P} + \Lambda_2 \underbrace{\left(\frac{\dots}{\Lambda_2}\right)}_{Q}\Big)$$

$$\leq \Lambda_1 f(P) + \Lambda_2 f(Q)$$

$$= \Lambda_1 f\left(\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\Lambda_1} x_n\right) + \Lambda_2 f(\dots)$$

$$\leq \Lambda_1 \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\Lambda_1} f(x_n)\right) + \dots$$

$\uparrow$ Hp induttiva

$\boxed{n+1 \Rightarrow n}$ Introduco un p.to x_{n+1} con coeff. $\lambda_{n+1} = 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{SL - IMO 98 - A2}}$

$x_1 \geq 1, \dots, x_n \geq 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} + 1}$$

$\boxed{\text{Dim. 1}}$ Induzione UP-DOWN

$\boxed{n=2}$ $$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} \geq \frac{2}{xy+1}$$

$$(x^2+y^2+2)(xy+1) \geq 2(x^2+1)(y^2+1)$$

$$\underbrace{xy(x^2+y^2)} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy + \cancel{2} \ge \underbrace{2x^2y^2} + \cancel{2}x^2 + \cancel{2}y^2 + \cancel{2}$$

$xy(x-y)^2 \overset{?}{\ge} (x-y)^2$ Ok perché $x \ge 1$ e $y \ge 1$

$\boxed{n \Rightarrow 2n}$ Facile!

$\boxed{n+1 \Rightarrow n}$ Sono dati $x_1, \dots, x_n$ e introduco

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = G$$

$$\frac{1}{x_1+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1} + \boxed{\frac{1}{G+1}} \ge \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{\underbrace{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}_{G^n} \cdot G} + 1} = \frac{n+\boxed{1}}{G+1}$$

per ipotesi è vera per $n+1$

$\Rightarrow$ Tesi $\square$

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Provo con JENSEN direttamente.

Pongo $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$

Pongo $y_1 = \log x_1, \dots, y_n = \log x_n$

Se per caso $f(x)$ fosse convessa ...

$$\frac{1}{n}\left[f(y_1) + \dots + f(y_n)\right] \geq f\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} \text{ RHS} \qquad = \frac{1}{e^{\log \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} + 1} \qquad \text{cioè la tesi}$$

$$\frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) = \frac{1}{n}\left[\log(x_1) + \dots + \log x_n\right] = \log \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x+1} \qquad f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{e^x(e^x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(e^x+1)}e^{2x}}{(e^x+1)^{\cancel{4}\,3}} = -\frac{-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq 0$$

l' ho usata con $y_i = \log x_i$ poiché $x_i \geq 1$ ho che $y_i \geq 0$, quindi nella zona di convessità

$\boxed{\text{DISUGUAGLIANZA DI KARAMATA}}$ (HARDY ?)

f convessa

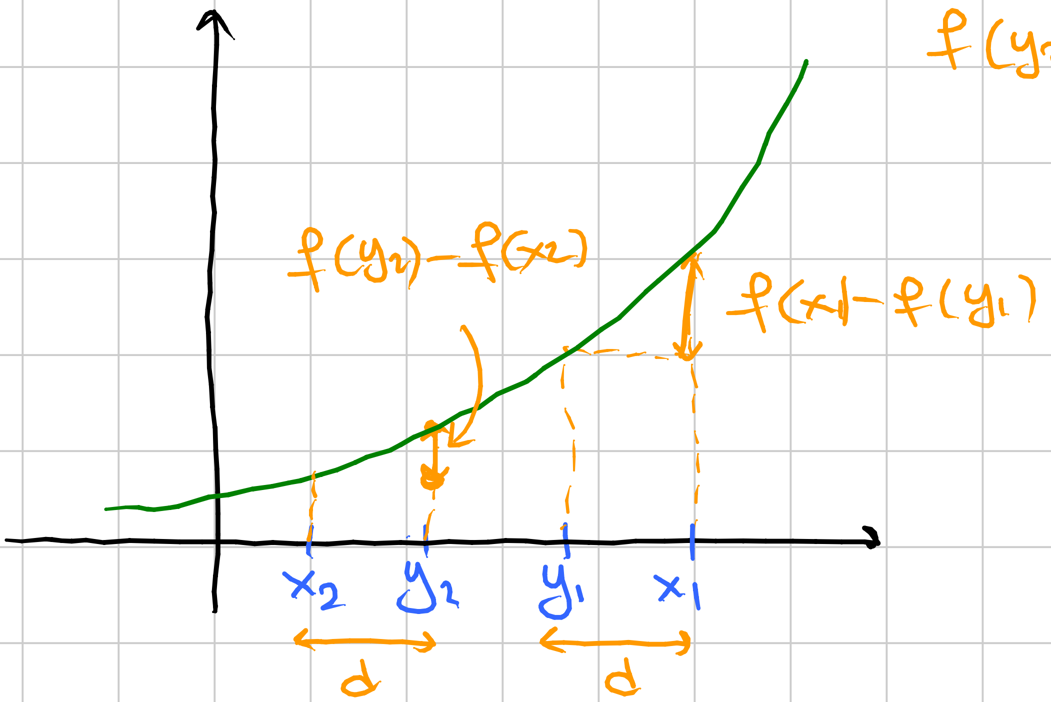
$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + \dots + f(y_n)$$

$$\{x_i\} \boxed{\succ} \{y_i\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \\ y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \\ \\ x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Caso banale}}$ $y_1 = y_2 = \dots = y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

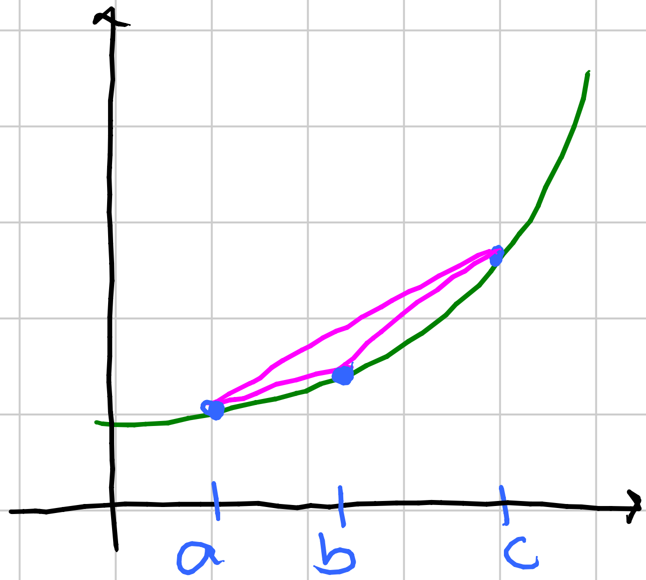
Ottengo Jensen: $\frac{1}{n}\left[f(x_1) + \dots + f(x_n)\right] \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$

$\boxed{\text{Caso } n=2}$ $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = S$



$f(y_2) - f(x_2) \leq f(x_1) - f(y_1)$

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ (Lemma dei 3 rapporti incrementali)



f convessa

$a < b < c$

$\Downarrow$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

<u>Dim</u>: scrivo b come comb. convessa di a e c

$$b = \lambda a + (1-\lambda)c \qquad \lambda = \frac{b-c}{a-c}$$

Scrivo la def.: $f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$

$$= \lambda [f(a) - f(c)] + f(c)$$

$f(b) - f(c) \leq \lambda [f(a) - f(c)]$ sostituisco λ e divido e ne ottengo una...

$\boxed{\text{DIM. KARAMATA}}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)-f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i}(x_i-y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (x_i-y_i)$$

$A_i = x_1+\dots+x_i$

$B_i = y_1+\dots+y_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (A_i - A_{i-1} - B_i + B_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (A_i-B_i) - \sum_{i=1}^{n} R_i (A_{i-1}-B_{i-1})$$

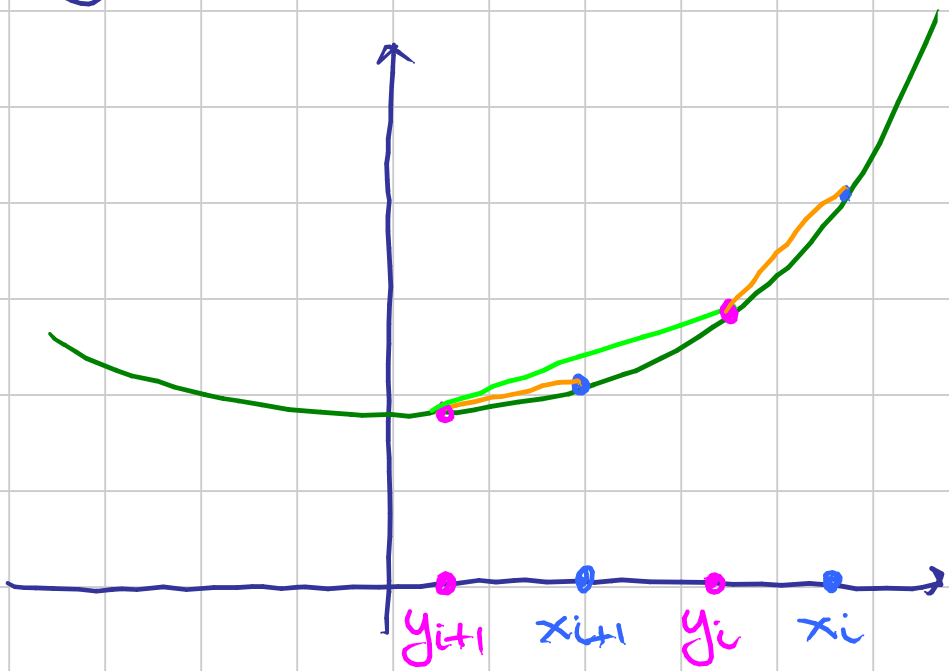
$$= R_n (A_n-B_n) + \sum_{i=1}^{n-1} R_i (A_i-B_i) - \sum_{i=1}^{n-1} R_{i+1} (A_i-B_i) - R_1 (A_0-B_0)$$

$$= R_n \underbrace{(A_n-B_n)}_{=0} - R_1 \underbrace{(A_0-B_0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(R_i-R_{i+1})}_{\geq 0 \text{ Hope}} \underbrace{(A_i-B_i)}_{\geq 0} \geq 0$$

Hope: $R_i \geq R_{i+1}$ cioè

$$\frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i} \geq \frac{f(x_{i+1})-f(y_{i+1})}{x_{i+1}-y_{i+1}}$$

$R(y_{i+1}, x_{i+1}) \leq$
$R(y_{i+1}, y_i) \leq$
$R(y_i, x_i)$



Occhio: potrebbe essere che $y_i \geq x_i$: funziona ancora, ma bisogna cambiare il termine intermedio.

Oss. Se f è convessa e CRESCENTE, allora si può assumere $A_n \geq B_n$ invece di $A_n = B_n$

... tutto si riconduce a controllare $R_n(A_n - B_n)$

— o — o —

Caso speciale **POPOVICIU** f convessa

$$\underbrace{f(a)+f(b)+f(c)}_{\text{FORTI}} + \underbrace{f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}_{\text{DEBOLE}} \geq \frac{4}{3}\underbrace{\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right]}_{\text{MEDI}}$$

Dim. Karamata con

$a, a, a, b, b, b, c, c, c, \frac{a+b+c}{3}, \ldots, \ldots$

$\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}$ e 4 volte gli altri

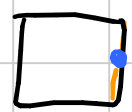
Si tratta di verificare le ipotesi: WLOG $a \geq b \geq c$
si distinguono i casi a seconda di Media $\geq b$ o
Media $\leq b$
e si verificano le potesi con pazienza.

— o — o —

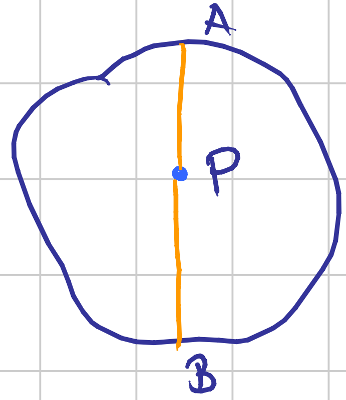
PUNTI ESTREMALI DI UN CONVESSO

I convesso in $\mathbb{R}^n$ P è estremale se non esistono segmenti in I per cui P è p.to interno.

<u>Esempi</u> Gli estremali di un cerchio sono la circonf.
Gli estremali di un poligono sono solo i vertici.



$\boxed{\text{FATTO}}$ Per una funzione convessa il massimo viene assunto (anche) in uno dei p.ti estremali.

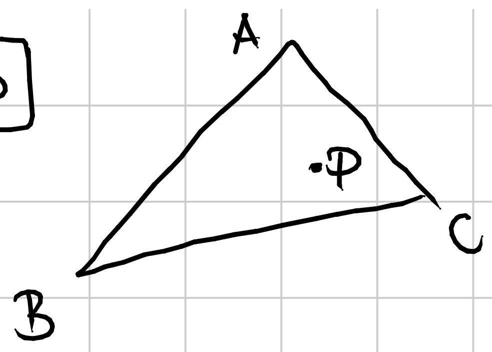


Dim semplice:
non può essere
$f(P) > f(A)$
$f(P) > f(B)$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Se una funzione convessa assume max in un p.to P non estremale, allora ha lo stesso valore costante su tutti i segmenti che contengono P come p.to interno.

$\boxed{\text{TST 2005}}$

ITA



$f(P)$ = somma distanze dai lati

P interno o sul bordo

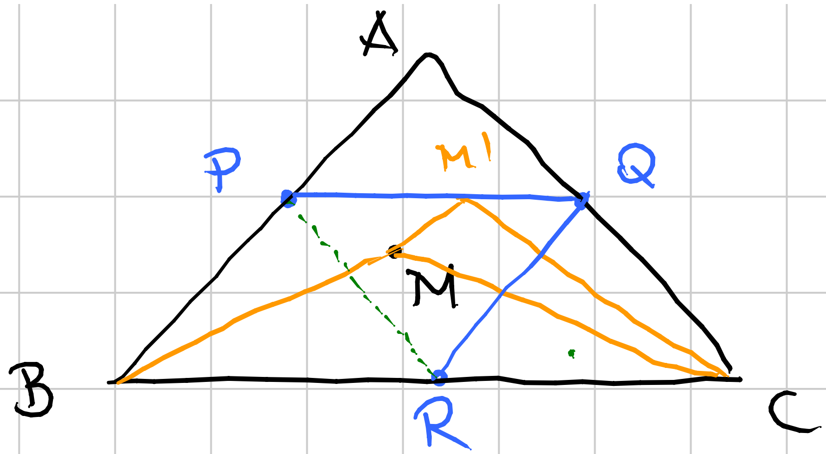
Max / min di $f(P)$

Dim.: è somma 3 funzioni convesse su tutto il piano $\Rightarrow$ max nei vertici

$\Rightarrow$ max = altezza + lunga

All'interno del triangolo è somma di 3 concave $\Rightarrow$ minimo nei vertici $\Rightarrow$ min = altezza + corta

IMO SL – 1999 – G1



$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA$$

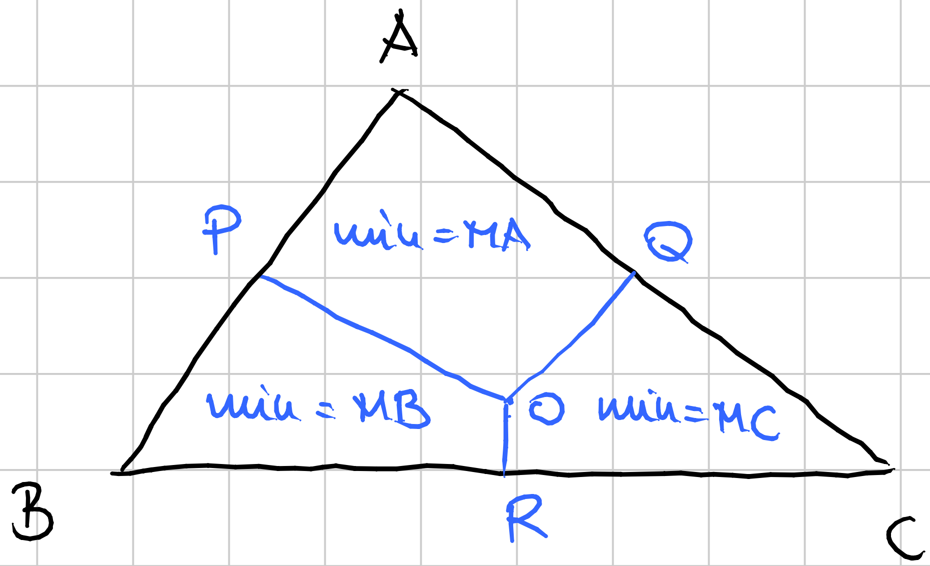
$$BM + MC < BP + PQ + QC = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$
$$BM + MA < BR + RQ + QA = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

$$2BM + MC + MA < AB+BC+CA$$

A seconda della posiz. di M posso scrivere 2 o 3 di queste !!!

WLOG siamo in zona MA
Allora devo cercare il
Max di

$$2MA + MB + MC$$



È somma di 4 distanze,
quindi convessa, quindi max nei pti estremali!
controllo solo A, P, O, Q

come P

$\boxed{\text{Banale in } A}$

$\boxed{\text{Controllo in } P}$ $\quad \frac{3}{2} c + m_c < a+b+c$

$2 m_c < 2a+2b-c$

$\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} < 2a+2b-c$

$\cancel{2a^2} + \cancel{2b^2} - \cancel{c^2} < \overset{2}{\cancel{4}} a^2 + \overset{2}{\cancel{4}} b^2 + 2c^2 + 8ab - 4ac - 4bc$

$a^2+b^2+4ab+c^2 \geq 2ac+2bc$

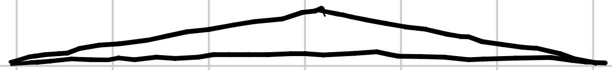
$a^2+b^2+2ab+c^2 = (a+b)^2+c^2 \geq 2c(a+b)$.

$\boxed{\text{Controllo in } O}$ $\quad 4R < a+b+c$

$= 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma > 2$

NO !



viene circa 0 !!!!

Questa ci serve solo sugli acutangoli

$\boxed{\text{KARAMATA}}$ $\sin x$ è concava in $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\} > \{\alpha, \beta, \gamma\}$ WLOG $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) \leq f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$$

$MA + MB + MC + MA$

$= 3MB + MC$ OK