Algebra (Complessi & polinomi)   mr_go

Titolo nota   03/09/2013

① Numeri complessi.

$z = x + iy$ x, y reali, i unità imm. $i^2 = -1$.

$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$. ρ reale non-neg. θ reale

$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$ $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$
$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

<u>def</u> Coniugio: $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$.

<u>es</u> $\overline{i} = -i$
$\overline{37\pi} = 37\pi$.

<u>oss</u> $z = \overline{z}$ se e solo se z è reale.

$z = -\overline{z}$ se e solo se z è immaginario.

<u>es</u> • $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$:

infatti $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

$\overline{z}_1 = \rho_1 e^{-i\theta_1}$, $\overline{z}_2 \cdot \ldots$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

Formule di de Moivre

z^n dove $|z| = 1 = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

$z^n = (x+iy)^n$ = svil. col binomio di Newton.

$z = \cancel{\rho} \cdot e^{i\theta} \rightsquigarrow z^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$

se $|z| \neq 1 \rightsquigarrow |z^n| = |z|^n$.

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos(3x) = ?$ $\qquad \cos 4x$

$\cos(nx) = \operatorname{Re}\left(e^{i(nx)}\right) =$

$e^{i(nx)} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$

es Trovare la parte reale (in funzione di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$). Trovare $\operatorname{sen}(nx)$.

pensare: come si trovano tutti i numeri complessi z tali che $z^m = 1$? (m intero positivo).

② Polinomi (basic)

Che cos'è un polinomio?

Un polinomio (in una variabile) è un'espressione formale

$$p(x) = \underbrace{a_d}\, x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 .$$

$a_d \neq 0 \rightsquigarrow$ il polinomio ha <u>grado</u> d

$d = \deg p \; \cancel{(= \partial p)}$.

$a_d = 1 \rightsquigarrow p$ si dice <u>monico</u>.

a_i = coefficienti, a_d coeff. di testa,

a_0 = termine noto.

a_i possono essere interi (pol. a coeff. interi)

razionali (" " " raz.)

reali (reali)

complessi (" " " compl.)

classi di resto

polinomi

$$p(x, y) = 2x^2 y + 3x \cdot y + 23$$

<u>domanda</u> quando due polinomi sono uguali?

<u>risp</u>? ① $p(x) = q(x)$ se $p(a) = q(a) \;\; \forall a \in \mathbb{R}$.

② due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti

A p ~~pol.~~ pol. associo una funzione.

I polinomi $p(x)=x$ e $q(x)=x^2$ a coeff. in

$\mathbb{F}_2$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hanno le stesse

funzioni associate:

$$p(0)=0, \qquad q(0)=0$$

$$p(1)=1, \qquad q(1)=1$$

Ma sono diversi come polinomi.

1 e 2

1 è "sbagliata", ma sono equivalenti sui

reali / complessi / interi / razionali ...

3 Divisione tra polinomi

Ho a e b polinomi coeff. reali e voglio dividere a per b.

$$a(x) = x^3+3x^2+1$$

$$b(x) = x^2+2$$

Divido x^3 per x^2 $\rightsquigarrow$ x

$$a(x) - x \cdot b = x^3+3x^2+1 - x\cdot(x^2+2) =$$

$$= \cancel{x^3}+3x^2+1 - \cancel{x^3} - 2x =$$

$$= \underbrace{3x^2 - 2x + 1}$$

Divido $3x^2$ per x^2 ho 3

$$3x^2 - 2x + 1 - 3 \cdot b = \boxed{-2x-5}$$

$$a(x) = \underbrace{(x+3)}_{\text{quoziente} = q} \cdot b(x) + \underbrace{(-2x-5)}_{\text{resto} = r}$$

Il resto e il quoziente della divisione di a per b sono univocamente determinati da:

- $a = q \cdot b + r$
- $\deg r < \deg b$ $\qquad (\sim \ r < b)$.

__Cor__ (Molto importante)

I polinomi a coeff (reali/interi/razionali) hanno la fattorizzazione unica.

__Cioè__ $p(x)$ esistono e sono unici (a meno dell'ordine) $f_1(x), \dots, f_k(x)$ polinomi __irriducibili__ tali che $p(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x)$.

__OSS__ $p(x)$ è a coeff. interi, può benissimo essere: irriducibile __ma__ riducibile sui reali.

$p(x) = x^2 - 2 \rightsquigarrow$ irr. in $\mathbb{Z}[x]$ (es.)

$p(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$p(x)$ che a coeff reali, irrid. nei reali, ma riducibile sui complessi

$$p(x) = \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ x^2 + x + 1 \\ x^2 + 1 = (x + i)(x - i). \end{array}$$

thm (Lemma di Gauss)

Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora è riducibile anche in $\mathbb{Z}[x]$.

es $\quad p(x) = x^2 + 2x + 1 = (2x+2)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

MCD (stessa definizione)

$\mathrm{MCD}(a, b) =$ pol. monico di grado massimo che divide a e b.

Come si calcola: Algoritmo di Euclide.

thm (Bézout): se $d(x) = \mathrm{MCD}(a(x), b(x))$, allora esistono $h(x), k(x)$ polinomi t.c.

$$h(x) \cdot a(x) + k(x) \cdot b(x) = d(x)$$

def Una <u>radice</u> (o <u>zero</u>) di un polinomio $p(x)$ è un numero α tale che $p(\alpha)=0$.

es $\sqrt{2}$ è una radice di x^2-2.
i è una radice di x^2+1 ...

es Se abbiamo un polinomio $f(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ a coeff. <u>interi</u>, e $\alpha = p/q$ è una sua radice razionale.
fraz. ridotta ai min termini
Cosa possiamo dire di p e q?

sol $q \mid a_d$, $p \mid a_0$.

$$0 = f(\alpha) = f(p/q) = a_d \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^d + a_{d-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{d-1} + \dots + a_0$$

$$\leadsto \quad 0 = \underbrace{a_d \cdot p^d + \overbrace{a_{d-1} \cdot p^{d-1} \cdot q + \dots + a_1 \cdot p \cdot q^{d-1} + a_0 \cdot q^d}}$$

Addendo rosso $= p \cdot (\underbrace{a_d \cdot p^{d-1} + \dots + a_1 \cdot q^{d-1}}_{\text{intero}})$
$\Downarrow$
div. per p. $\qquad a_0 \cdot q^d \leadsto$ divisibile per p.

Siccome $MCD(p,q)=1 \Rightarrow p \mid a_0$.

es $x^{35} + 12x^{13} + 17x + 1$ trovare le radici razionali.
$\hookrightarrow$ non ha radici razionali (± 1 non sono radici).

es Se avete un polinomio $p(x)$ a coeff. interi, ~~dati~~

e avete due int $a \neq b$.

Cosa potete dire su $p(a) - p(b)$?

$$\boxed{(a-b) \mid (p(a) - p(b))}$$

perché? • Se $p(x) = x^k$, lo sappiamo dimostrare?

$$p(a) - p(b) = a^k - b^k = (a-b)\underbrace{(a^{k-1} + \dots + b^{k-1})}_{\text{intero}}$$

• Se $p(x) = c_k \cdot x^k$ è vero?

• Se è vero per $p(x)$ e $q(x)$ è vero per $p(x)+q(x)$?

Sì: $(p+q)(a) - (p+q)(b) = p(a) + q(a) - (p(b) + q(b)) =$

$= (p(a) - p(b)) + (q(a) - q(b))$ ✓

• FINE. (per induzione).

thm (Ruffini)

Vogliamo dividere $p(x)$ per il polinomio $(x-a)$.

Qual è il resto?

(*) $p(x) = (x-a) \cdot q(x) + r\boxed{(x)}$ con $\deg r < 1$

Cioè r è una costante!

Ora sostituisco $x=a$ in $\circledast$:

$$p(a) = \cancel{(a-a)\cdot q(a)} + r^{\nearrow r(a)}$$

thm (Ruffini) Il resto della divisione di $p(x)$ per $(x-a)$ è $p(a)$.

es Resto della div. di $x^{10}+1$ per $x-2$:

1025.

cor $x^{37}+x^{12}+x^5+13$. ha al più 37 radici.

Se α è una radice di p allora $(x-\alpha)$ divide p!

In particolare, ogni radice si mangia un pezzo di grado.

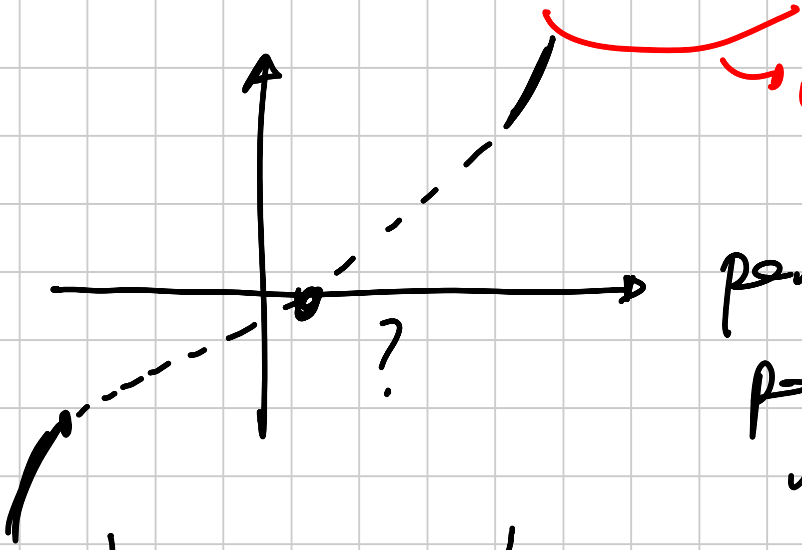
(occhio è vero solo su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).
p primo

④ Teorema fondamentale dell'algebra

Ricordamento: se ho un polinomio di grado 3 a coefficienti reali:

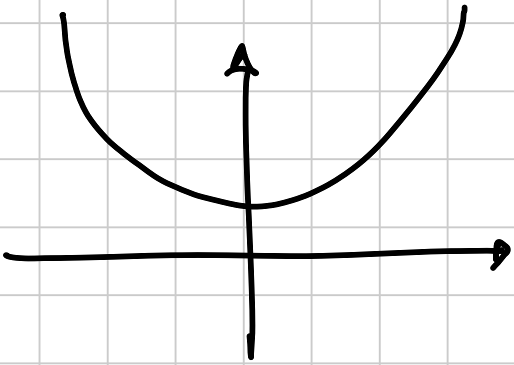
$$p(x) = x^3 + (ax^2+bx+c) =$$

$$= x^3\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}_{\text{molto piccolo}}\Big)$$ se $|x|>>0$.



unica cosa che conta

passo da negativo a positivo $\Rightarrow$ devo avere uno zero $\Rightarrow$ ho una radice



$\leftarrow x^2+1$

<u>riscaldamento</u>/2 : $p(x) = x^2 + ax + b$.

Ogni pol. di grado dispari ha almeno una radice.

(le sappiamo trovare esplicitamente.)

<u>thm</u> (Fondam. dell'algebra)

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n ha sempre n radici complesse.

<u>oss</u> Vera anche se $p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

<u>cor</u> $p(x)$ è monico allora $p(x) = (x-\alpha_1)\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono <u>le</u> radici di $p(x)$.

Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$: come sono fatti i fattori irr. della sua fattorizzazione?

p si spezza in fattori di grado 1 e 2.

Prendiamo α radice <u>complessa</u> di $p(x)$.

Cosa possiamo dire di $\bar{\alpha}$?

$$p(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \bar{\alpha}^k = \sum \bar{a}_k \cdot \overline{\alpha^k} = \sum \overline{(a_k \alpha^k)} =$$

$$= \overline{\sum a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = 0.$$

Le radici di p sono reali o accoppiate a 2 a 2.

$$p(x) = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_h) \cdot (x-\beta_1)(x-\bar{\beta}_1) \cdots (x-\beta_\ell) \cdot (x-\bar{\beta}_\ell)$$

$$= \underbrace{(x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_h)}_{\text{reali perché } \alpha_i \text{ reali}} \cdot \Big(\underbrace{x^2 - (\beta_1 + \bar{\beta}_1)x + \beta_1 \bar{\beta}_1}_{\text{reale!}}\Big) \cdot \ldots \cdot \big(x^2 - (\beta_\ell + \bar{\beta}_\ell)x + \beta_\ell \cdot \bar{\beta}_\ell\big)$$

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 =$$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = \rho^2.$$

$$z \cdot \bar{z} = \rho e^{i\theta} \cdot \rho e^{-i\theta} = \rho^2 e^{i(\theta-\theta)} = \rho^2$$

<u>Formule di Viète</u>

Riscaldamento: $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$$\parallel$$

$$x^2 + ax + b$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

/2: $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$$\parallel$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} -\alpha-\beta-\gamma = a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b \\ -\alpha\beta\gamma = c \end{cases}$$

In generale: $p(x) = x^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$

con radici $\gamma_1, \dots, \gamma_d$, allora:

$$a_{d-1} = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_d)$$

$$a_{d-2} = \gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_1\gamma_d + \gamma_2\gamma_3 + \dots + \gamma_2\gamma_d + \dots + \dots + \gamma_{d-1}\gamma_d$$

$$\vdots$$

$$a_{d-3} = -(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \dots + \dots + \gamma_{d-2}\cdot\gamma_{d-1}\cdot\gamma_d)$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^d \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_d$$

es $\alpha^3+\beta^3$ esprimere come funzione di

$\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$.

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) =$$
$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-3\alpha\beta =$$
$$= (\alpha+\beta)^3 - 3(\alpha+\beta)\alpha\beta.$$

es • $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ esprimere in funz. di $\alpha+\beta+\gamma$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
$\alpha\beta\gamma$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

• $$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha^2\beta+\ldots+\beta^2\gamma+\ldots)$$
$$-6\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+\gamma\alpha^2+\gamma^2\alpha =$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

5 Radici di 1

Le radici n-esime di 1 sono
le radici del polinomio X^n-1,

quindi sono al più n, e sono tutte distinte.

Stiamo cercando z t.c. $z^n = 1$:

$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$.

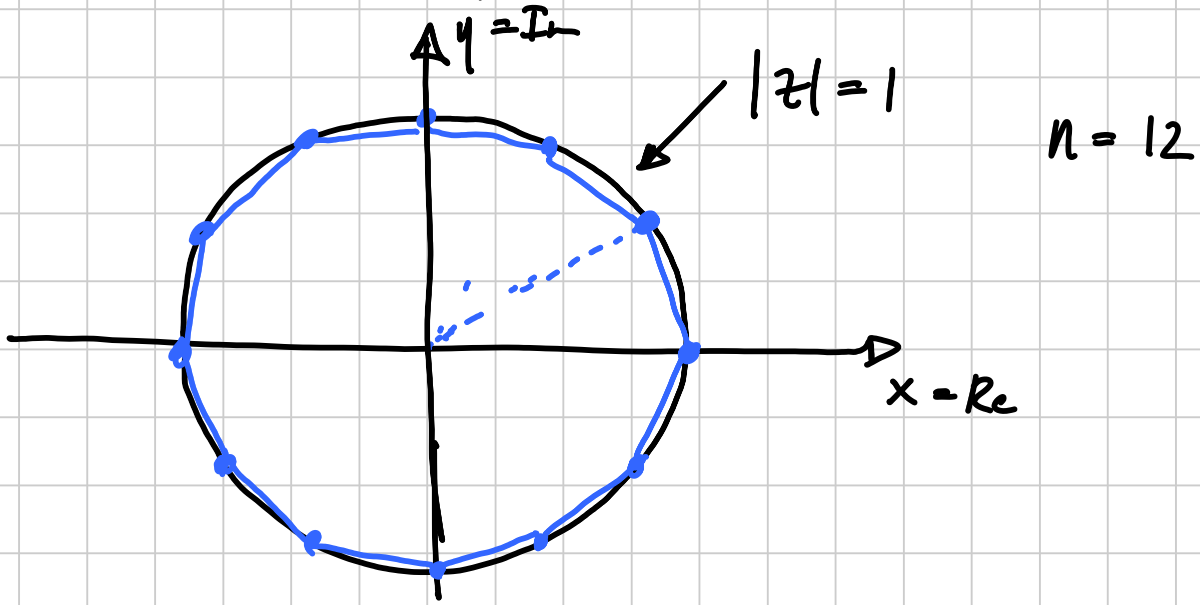
$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = 1$$

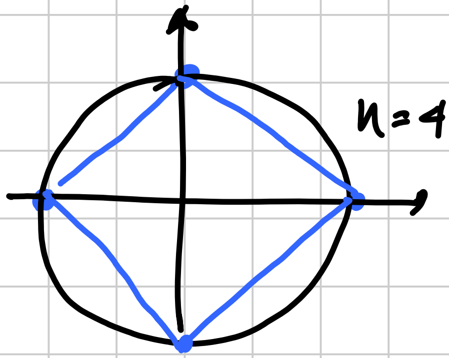
$$n\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots,$$

$$\theta = 0, \ 2\pi/n, \ 4\pi/n, \ 6\pi/n, \dots, \ 2\pi n/n = 2\pi$$

hanno lo stesso arg.
a meno di 2π

Le radici n-esime di 1 sono $e^{2k\pi i/n}$ per $k = 0, \dots, n-1$.





In generale, le radici di $x^n - 1$ stanno sulla circonf. $\{|z| = 1\}$ e formano un n-agono regolare con un vertice in 1.

1) $\alpha = e^{2\pi i/n}$ $\qquad \alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

2) $S = \underset{1=\alpha^n}{\alpha^0} + \ldots + \alpha^{n-1} = \alpha + \alpha^1 + \ldots + \alpha^{n-1} + \alpha^n = \alpha \cdot S$

3) Formule di Viète!

$\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-1}$ sono (tutte e sole) le radici di $x^n - 1$.

• Sez. 3.1, 3.2 (pp. 12-13)

esercizi: • 3, (7), 8, 9 p. 20

• Dimostrare che

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

es 3 p. 20. $S = \cos 15° + \cos 35° + \dots + \cos 355°$.

$$\cos 15° = \cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{2\pi}{24} = Re\left(e^{\frac{2\pi}{24}\cdot i}\right)$$

$$\cos 35° = \cos(15° + 20°) = Re\left(e^{\left(\frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi}{18}\right)i}\right)$$

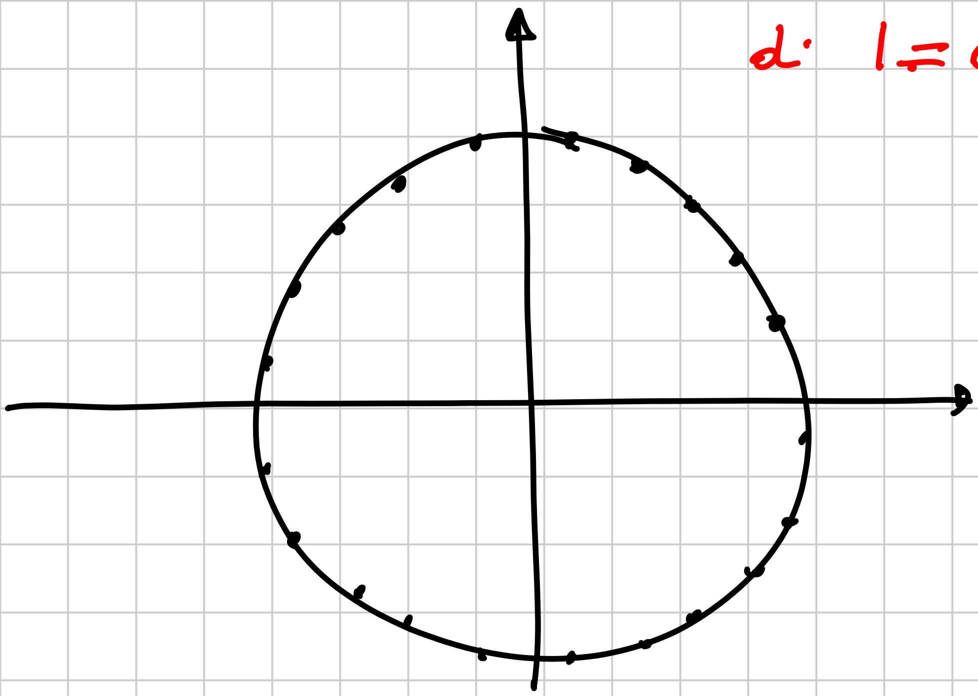
$$\cos 55° = Re\left(e^{\left(\frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi}{18}\cdot 2\right)i}\right) \dots$$

$$S = \sum_{k=0}^{17} Re\left(e^{\left(\frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi}{18}\cdot k\right)i}\right) =$$

$$= Re\left(\sum e^{\left(\frac{2\pi}{24} + \frac{2\pi}{18} k\right)i}\right) =$$

$$= Re\left(e^{\frac{2\pi}{24} i} \cdot \sum e^{\frac{2\pi}{18}\cdot k i}\right) = 0$$

Somma delle radici 18-esime di 1 = 0



es 7 p. 20 (Interpolazione di Lagrange)

Stiamo cercando un pol di grado al più 3 che faccia 2 in 0, 4 in 1 ...

Uno dei modi possibili:

trovo un pol di grado 3 che fa 1 in 0, 0 in 1, 2, 3, $\rightsquigarrow$ $a(x-1)(x-2)(x-3)$

Imponiamo che $p(0)=1$ $\rightsquigarrow$ $a=-1/6$.

$$p_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$\vdots$

$$p(x) = a_0 \cdot p_0 + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3.$$

$p(0) = a_0$ $\quad$ $p(2) = a_2$

$p(1) = a_1$ $\quad$ $p(3) = a_3$

es 8

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$\rightarrow$ quanto fa $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$ $\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$?

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = (\alpha^2+\dots+\delta^2)+2(\alpha\beta+\dots+\gamma\delta)$$

$$\alpha^3+\dots+\delta^3 = (\alpha+\dots+\delta)^3 - 3(\quad)(\alpha+\dots+\delta)+3(\alpha\beta\gamma+\alpha\dots)$$

VIÈTE

es 9 Supponiamo che a sia una radice intera di P.

$$(a-b) \mid (P(a)-P(b)) \quad \text{per ogni } b.$$

se $b=0$? $\quad a-0 \mid P(b) \rightsquigarrow$ dispari

$\Rightarrow a$ dispari.

$$(\underbrace{a-13}_{\text{pari}}) \mid (0-P(13)) \rightsquigarrow \text{dispari. } \lightning$$

sol alt. Se $P(a)=0$, allora $P(a)\equiv 0 \pmod 2$

però se a è pari $P(a)\equiv \underset{\substack{\equiv\\ 1\neq 0}}{P(0)} \pmod 2$

se a è dispari, $P(a)\equiv P(1)\equiv P(13)\equiv$

$1\neq 0 \pmod 2$

IMO 1969: Dim ca $S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

$$\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$$

$$-\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$\underset{\displaystyle \cos\frac{13\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}} + \underset{\displaystyle \cos\frac{11\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \underset{\displaystyle \cos\frac{9\pi}{7}}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{7} + \dots + \cos\frac{13}{7}\pi + 1\right)$$

$$2S = \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \dots + \cos\frac{13\pi}{7}\right)}_{=\sum \mathrm{Re}\left(e^{\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\cdot k\right)i}\right) = 0} - \overset{=-1}{\cos\frac{7\pi}{7}}$$

$$2S = 0 - (-1) \Rightarrow 2S = 1.$$