Algebra 2 - $\leq$ ma_go

Titolo nota 05/09/2013

Cosa vuol dire "Dimostrare una disuguaglianza"?

Dim che per ogni x, y, z reali ≥ 0 $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.

__Non__ è una disequazione.

$\iff$ dim che la funzione $F(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} - \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$

è non-negativa $\iff$ $\min F \geq 0$.

$\sum_{k=1}^{n} k^k$.

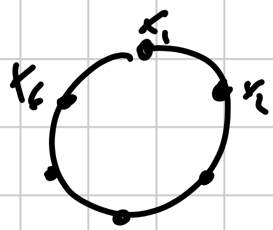
(0) __Notazioni__ (somme cicliche e somme simmetriche)

(A) $x_1, \dots, x_n$ variabili $x_1 + \dots + x_n = S$

$S = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{cyc} x_1 \rightsquigarrow$ __somma ciclica__.

↳ parto da x_1 e sommo tutti i termini facendo avanzare 1.

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$.



__es__ $\sum_{cyc} x_1^2 x_2 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 x_{k+1} + x_n^2 \cdot x_1$.

$a_1, \dots, a_n$

__es__ $\sum_{cyc} a_1 a_2 a_3^2 = a_1 a_2 a_3^2 + a_2 a_3 a_4^2 + \dots$

$+ a_{n-2} a_{n-1} a_n^2 + a_{n-1} a_n a_1^2 + a_n a_1 a_2^2$

(★) $\sum_{sym} x_1 = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} = \sum_{k=1}^{n!} x_{\sigma_k(1)} =$

$= (n-1)!\, x_1 + (n-1)!\, x_2 + \dots =$

$= (n-1)! \sum x_i = (n-1)! \sum_{cyc} x_i .$

$S_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}\}$

In un polinomio, $\underbrace{a_{d-2}}_{\text{ha } \binom{n}{2} \text{ addendi}} = \underbrace{\sum_{cyc} \alpha\beta}_{\text{ha } n \text{ addendi}} = \ell \underbrace{\sum_{sym} \alpha\beta}_{\text{ha } n!}$

$a_{d-2} = \frac{1}{(n-2)!\,2!} \sum_{sym} \alpha\beta = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \binom{n}{2}$ se $\alpha = \beta = \dots = 1$

check Cosa succede se $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 1$?

① Riarrangiamento

Ho due successioni di reali $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$.

Come costruisco rettangoli con base a_i e altezze b_j di modo da massimizzare l'area totale?
E se la voglio minimizzare?

WLOG possiamo supporre $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$
$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$.

Somma aree $= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_{\sigma(i)} = \sum_{cyc} a_1 b_{\sigma(1)}$ per $\sigma \in S_n$.

$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \circlearrowleft \text{ bigettive}\}$

thm (R.) $\frac{1}{n}\sum_i a_i b_{n-i+1} \le \frac{1}{n}\sum_i a_i b_{\sigma(i)} \le \frac{1}{n}\sum_i a_i b_i$

$\forall \sigma \in S_n$. Vale per ogni scelta di

$$a_1 \le \dots \le a_n \qquad b_1 \le \dots \le b_n$$

reali qualunque.

dim Prendiamo una perm. a caso, supp. per comodità che $\le \to <$.

E supponiamo che non sia l'identità e dim. che ce n'è una più grande.

oss Se $\sigma \in S_n$ non è l'identità, esistono due indici k e l tali che $k<l$ e $\sigma(k)>\sigma(l)$. (dim per casa — INDUZIONE).

$\sum_i a_i b_{\sigma(i)}$ e la modifichiamo per ottenere un valore più grande.

$\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ se $i \ne k, l$, e $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(l)$ e $\tilde{\sigma}(l) = \sigma(k)$.

Voglio dim. che $\underbrace{\sum_i a_i b_{\tilde{\sigma}(i)}} \overset{?}{>} \underbrace{\sum_i a_i b_{\sigma(i)}}$.

quanto sono diverse!?

Rimane $a_k b_{\underbrace{\tilde{\sigma}(k)}_{n}} + a_l b_{\underbrace{\tilde{\sigma}(l)}_{m}} \overset{?}{>} a_k b_{\underbrace{\sigma(k)}_{m}} + a_l b_{\underbrace{\sigma(l)}_{n}}$

$$a_k b_n + a_l b_m - a_k b_m - a_l b_n \overset{?}{>} 0$$

$$\underbrace{(a_k - a_l)}\underbrace{(b_n - b_m)} \overset{?}{>} 0$$

<0 perché $k<l$ $\qquad$ <0 perché $m>n$ $\qquad \square$

es Dimostrare l'altra metà.

esempi $\sum_{cyc} ab \le \sum_{cyc} a^2$ $\qquad a,b,c$

$$\underbrace{\sum_{cyc} ab}_{ab+bc+ca} \le \underbrace{\sum_{cyc} a^2}_{a^2+b^2+c^2}$$

WLOG posso supporre $a \le b \le c$.

$$\underline{a}\,\underline{b} + \underline{b}\,\underline{c} + \underline{c}\,\underline{a} \le \underline{a}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b} + \underline{c}\cdot\underline{c}.$$

$a \le b \le c$

$a \le b \le c$

riarrangiamento!

cor $\quad a_1 \le \dots \le a_n$

(della dimostr.) $\quad b_1 \le \dots \le b_n$

$\quad c_1 \le \dots \le c_n$

$$\sum_i a_i b_{\sigma(i)} c_{\tau(i)} \le \sum_i a_i b_i c_i.$$

es $\quad a^b b^c c^a \le a^a b^b c^c.$

$$\log(a^b b^c c^a) \le \log(a^a b^b c^c)$$

$$b\log a + c\log b + a\log c \le a\log a + b\log b + c\log c$$

$a \le b \le c$ WLOG $\Rightarrow \log a \le \log b \le \log c$.

per riarrangiamento. $\square$.

$$\sum_{cyc} \frac{x_1}{x_2} \geq n \qquad\qquad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

$$\sum_{cyc} x_1 \cdot \frac{1}{x_2} \qquad\qquad \text{WLOG } x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x_1} \ge \frac{1}{x_2} \ge \dots \ge \frac{1}{x_n}$$

se li accoppiamo $1 \leftrightarrow 1, \dots, n \leftrightarrow n$ otteniamo il MIN

$$\sum = n$$

se li accoppiamo $1 \leftrightarrow n, \dots, n \leftrightarrow 1$ otteniamo il MAX

Per l'altra dis. del riarrangiamento, abbiamo vinto.

<u>thm</u> (Chebychuff) $\frac{1}{n}\sum a_i b_{n+1-i} \le \left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum a_i b_i$

(sotto le stesse ipotesi del riarr.)

MIN media dei prodotti. prod. delle medie MAX media dei prodotti

<u>dim</u> Sommate riarrangiamenti. (per casa).

<u>Cor</u> (Riarr.) <u>Dis. di Schur</u>

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge \sum_{sym} x^2 y$$

$$\shortparallel$$

$$(x+y+z)\left((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\right).$$

<u>dim</u> Si ricava da $\sum_{cyc} x^t (x-y)(x-z) \ge 0$. (per casa) $\square$

$t > 0$.

② Medie

Chiamiamo medie p-esime di n reali positivi $a_1, \dots, a_n$

$$M_p = \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

AM = media aritm. = M_1
QM = " quad. = M_2
HM = " armonica = M_{-1}

$M_0 = GM = (\prod a_i)^{1/n}$
$M_{-\infty} = \min\{a_i\}$
$M_{+\infty} = \max\{a_i\}$

thm se $p < q$, allora $M_p \leq M_q$,

e $M_p = M_q$ se e solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

cor (AM-GM) $AM \geq GM$
$M_1 \geq M_0$ $\quad \frac{\sum a_i}{n} \geq (\prod a_i)^{1/n}.$

dim **Caso base**: $n = 2$. $\quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} \overset{?}{\geq} 0$$

sì, vero, $=$ se e solo se $a = b$.

Passo induttivo: $n \rightsquigarrow 2n$.

Dobbiamo dim che $\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{2n} \geq \left(\prod_1^n a_i \cdot \prod_{n+1}^{2n} a_i\right)^{1/2n}$

$$AM = \frac{\overbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}^{x} + \overbrace{\frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}^{y}}{2} \geq \sqrt{\left(\prod_1^n a_i\right)^{1/n} \cdot \left(\prod_{n+1}^{2n} a_i\right)^{1/n}}$$

$\Downarrow$ AM > GM quando ho 2 elementi

$AM(x,y) \geq GM(x,y)$

$$AM \geq \sqrt{\underbrace{\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}_{\geq GM(a_1,\dots,a_n)} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}+\dots+a_{2n}}{n}\right)}_{GM(a_{n+1},\dots,a_{2n})}} \overset{P.I.}{\geq} \sqrt{\left(\prod a_i\right)^{1/n} \cdot \left(\prod a_i\right)^{1/n}}$$

Dobbiamo tornare indietro:

dovete dim $AM(a_1,\dots,a_{n-1}) \geq GM(a_1,\dots,a_{n-1})$

(*) e sapete $AM(x_1,\dots,x_n) \geq GM(x_1,\dots,x_n)$ $\forall x_i > 0$.

Applichiamo (*) a $x_1 = a_1, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = ?$

da scegliere in modo furbo.
(per casa).

<u>es</u> $x + 2y + 3z \geq 6$ se $xy^2z^3 = 1$ $(x,y,z>0)$.

$$AM(\dots) = \frac{x+y+y+z+z+z}{6} \geq 1 = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{xy^2z^3} = GM(\ )$$

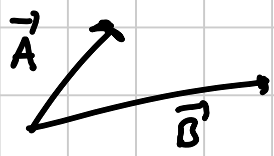
$x + 2y + 3z \geq ?$ se $xyz = 1$ $(x,y,z>0)$

$$\frac{x+2y+3z}{3} \geq \sqrt[3]{6} \Rightarrow \ ? \text{ ottimale è } 3\sqrt[3]{6}.$$

(per casa) $x + 2y + 3z \geq ?$ se $x^3y^2z = 9$ $(x,y,z>0)$.

③ <u>Cauchy-Schwarz</u>

<u>thm</u> (C-S). $\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)$ $\forall a_i, b_i$.

<u>dim</u> 

, $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$. (in coord.)

Un vettore n-dim. è una n-upla di num. reali.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vec{B} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\end{array}\right\} \vec{A}\cdot\vec{B} = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n.$$

$\vec{C}\cdot\vec{C}$ = somma di quad. ≥ 0 $\forall \vec{C}$.

$\|\vec{C}\|^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = 0$ se e solo se $\vec{C} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = (a_1, \ldots, a_n) \\ \vec{B} = (b_1, \ldots, b_n)\end{array}\right. \Rightarrow LHS = (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

$$RHS = \|\vec{A}\|^2 \cdot \|\vec{B}\|^2.$$

oss $(\vec{x} + \vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot\vec{z} + \vec{y}\cdot\vec{z}$.

$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$ (verificare)

$\vec{C} = \vec{A} - t\cdot\vec{B}$ Dove $t \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq \|\vec{C}\|^2 = \|\vec{A} - t\cdot\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 - 2t\,\vec{A}\cdot\vec{B} + t^2\|\vec{B}\|^2.$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4} = \underbrace{\boxed{(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 - \|\vec{A}\|^2\cdot\|\vec{B}\|^2 \leq 0}}_{\text{C-S!}}$$

$\Rightarrow$ in C-S. ce l'ho se e solo se per qualche t

$\vec{A} - t\vec{B} = \vec{C} = 0 \iff \vec{A}$ e $\vec{B}$ paralleli $\iff$

$\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono multipli. $\square$

<u>es</u> $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$

$\underset{\substack{\shortparallel \\ b_1}}{a_1 = a}$, $\underset{\substack{\shortparallel \\ b_2}}{a_2 = b}$, $\underset{\substack{\shortparallel \\ b_3}}{a_3 = c}$

<u>es</u> Prendiamo $x, y, z \ge 1$ t.c. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Dim. che $\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

$\sqrt{x-1} = \underset{\substack{\shortparallel \\ a_1}}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ b_1}}{\sqrt{x}}$ e ciclici.

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{RHS}}}{\sum_{cyc}\sqrt{x-1}} = \sum_{cyc}\sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \sqrt{x} \underset{C-S}{\le} \sqrt{\left(\sum \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2\right) \cdot \left(\sum (\sqrt{x})^2\right)} =$$

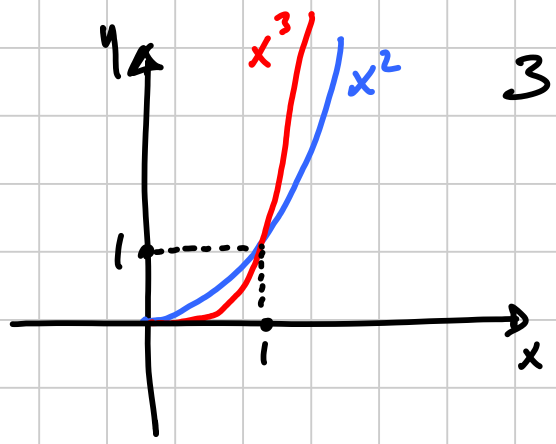
$$= \sqrt{\left(\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\frac{x}{x}} - \frac{1}{x} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\frac{y}{y}} - \frac{1}{y} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\frac{z}{z}} - \frac{1}{z}\right) \cdot (x+y+z)} = \sqrt{(1+1+1-2)(x+y+z)} = \text{LHS}$$

<u>non</u> esempio

Dimostrare che

$ab + bc + ca \le a^3 + b^3 + c^3$ per $a, b, c > 0$

$a = b = c = t$

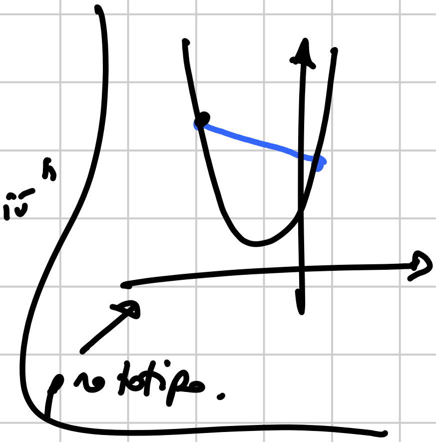


$3t^2 \le 3t^3$ non può essere vera

④ Convessità / concavità e Jensen

Che cos'è una funzione convessa?

"È una funzione con la pancia in giù"

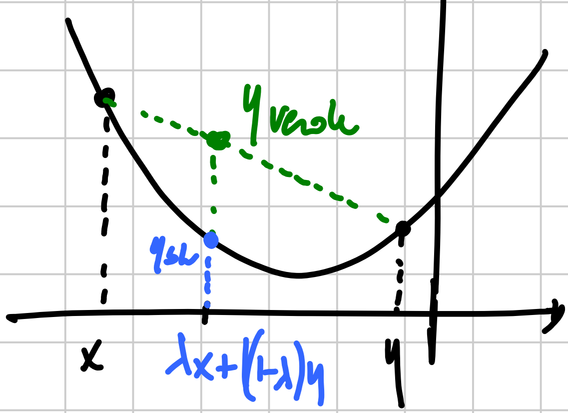


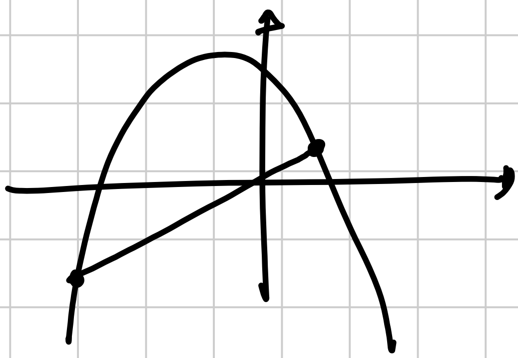
<u>def</u> f funzione reale si dice <u>convessa</u> se $\forall x, y$ e $\forall \lambda \in [0,1]$

$$y_{blu} = \boxed{f(\lambda x + (1-\lambda) y)} \le \boxed{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)} = y_{verde}$$

f si dice concava se c'è $\ge$, cioè se

$y_{blu} \ge y_{verde}$.





<u>es</u> Le seguenti funzioni sono convesse:

$f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^\alpha$ per $\alpha > 1$ reale, $x > 0$

$f(x) = e^x$

$f(x) = 1/x$ per $x > 0$

$f(x) = \mathrm{tg}\, x$ per $x \in (0, \pi/2)$

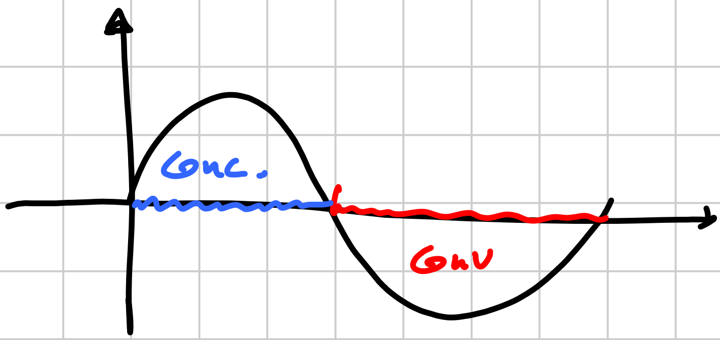
$f(x) + g(x)$ è conv. se lo sono f e g

$f(g(x))$ è convessa se f e g sono convesse e f è crescente.

Le seguenti funzioni sono concave:

$\sqrt{x}$ ($x \geq 0$), x, x^3 per $x \leq 0$, $\cos x$ $(-\pi/2, \pi/2)$, $\sin x$ $(0, \pi)$,

$1/x$ per $x<0$, $\log x$, $-f(x)$ se x è convessa.



es (per casa) $f(x)$ è sia concava sia convessa se e solo se $f(x) = ax+b$.

dis (JENSEN) Se f è convessa e $x_1, \dots, x_n$ sono nell'int. di convessità, allora

$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

dim Per induzione (per casa: $x = x_1$, $y = \frac{x_2+\dots+x_n}{n-1}$, $\lambda = \frac{1}{n}$, e applicate la dis)

dis (J2) Con le stesse hp, $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$, $\lambda_i \geq 0$

Allora $f(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n)$

Es Dim la dis. tra le medie ($M_p \geq M_q$ se $p,q>0$).

claim (per casa) basta dim $M_p \geq M_1$ se $p>1$.

Se abbiamo il claim, applichiamo Jensen a $f(x) = x^p$.

$$RHS = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} = M_p^p.$$

$$LHS = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^p = AM^p = M_1^p$$

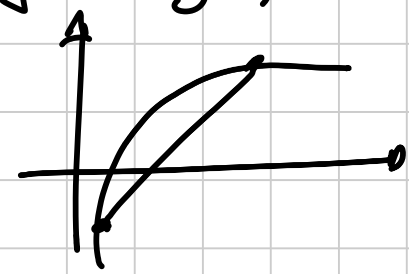
$$M_1^p \leq M_p^p \iff M_1 \leq M_p. \qquad \square$$

thm (Dis. di Young) se $a,b>0$, $p,q>0$ t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

allora $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

dim Applichiamo Jensen a $f(x) = \log x$, $x = a^p$, $y = b^q$.

$\log x$ è concava



$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$$\log(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda) \log y$$

$$\log(\lambda a^p + (1-\lambda) b^q) \geq \lambda p \log a + (1-\lambda) q \log b$$

$\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow 1-\lambda = \frac{1}{q}$

$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \log a + \log b = \log ab$

$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$ $\square$

Esercizi: Lez. 3.3, 3.4 pp. 13–15

pp. 21–22: n. 1, 4, 5, 9

---

1. $x_1, \dots, x_n > 0$ e sappiamo

$HM(x_i) = 6$, $GM(x_i) = 7$, $AM(x_i) = 8$.

$y_i = \prod_{j \neq i} x_j$

HM, GM, AM degli y_i?

$y_i = \prod_{i \neq j} x_j = \prod_{j=1}^{n} x_j \Big/ x_i = 7^n / x_i$

$AM(y_i) = \left(\sum y_i\right)/n = \frac{7^n \cdot \sum \frac{1}{x_i}}{n} = 7^n \cdot \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}\right) =$

$= 7^n \cdot HM(x_i)^{-1} =$

$= 7^n / 6$

$GM(y_i) = \left(\prod y_i\right)^{1/n} = \left(\prod\left(7^n \cdot 1/x_i\right)\right)^{1/n} = \left(7^{n^2} \cdot \frac{1}{\prod x_i}\right)^{1/n} =$

$$= \left(7^{n^2}/7^n\right)^{1/n} = 7^{\frac{n^2-n}{n}} = 7^{n-1}$$

$$AM(y_i) = \left(\frac{\sum \frac{1}{y_i}}{n}\right)^{-1} = \left(\frac{\sum x_i}{7^n \cdot n}\right)^{-1} = 7^n \cdot AM(x_i)^{-1} =$$

$$= 7^n/8.$$

$y_i' := y_i/7^n$: es. $M_p(a\cdot y_i) = a\cdot M_p(y_i)$.

(4) $\text{MAX}(x^5 y z)$ sapendo che $x+y+z=1$.

$$x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 5y\cdot 5z \underset{AM-GM}{\leq} \left(\frac{5x+5y+5z}{7}\right)^7$$

$$25x^5yz \leq \left[\frac{5}{7}(x+y+z)\right]^7 \Rightarrow x^5yz \leq \frac{5^5}{7^7}.$$

$$x = 5y = 5z \Rightarrow x = \frac{5}{7},\ y = z = \frac{1}{7}.$$

$$x^5yz = \left(\frac{5}{7}\right)^5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5^5}{7^7} \leftarrow$$ il massimo è raggiunto!

(5) $a_i = x_i,\ b_i = \sqrt{y_i}$

$$CS:\ \underbrace{\sum_i x_i\sqrt{y_i}}_{=\,9n} \leq \sqrt{\sum_i x_i^2}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_i y_i}}_{=\,\sqrt{8n}}$$

$$\sqrt{\sum_i x_i^2} \geq \frac{9\sqrt{n}}{2\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{n}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}} \geq \frac{9}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$QM(x_i) \geq \frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

$x = y_i = y_j = 8 \rightsquigarrow x_i = x_j = x$

$x\sqrt{y} = 7 \to x = \frac{9}{2\sqrt{2}}$ <u>ok</u>.

(9) Chebych. $M_1(a_i b_{n+1-i}) \le M_1(a_i)\cdot M(b_i) \le M_1(a_i b_i)$

WLOG $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$

$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$?

$\sqrt{1-x_2} \le \sqrt{1-x_1}$

$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \le \dots \le \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$

$\frac{1}{n}\sum_i \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \underset{\text{cheby}}{\geq} \underbrace{M_1(x_i)}_{1/n} \cdot M_1\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)$? $\qquad y_i = \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}$

$$M_{-2}(y_i) = \left(\frac{\sum_i \frac{1}{y_i^2}}{n}\right)^{-1/2} = \left(\frac{\sum_i 1-x_i}{n}\right)^{-1/2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{n}}\sum_i \geq \cancel{\tfrac{1}{n}}\cdot M_1(y_i) \geq \cancel{\tfrac{1}{n}} M_{-2}(y_i) = \cancel{\tfrac{1}{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$