SUCCESSIONI / FUNZIONI

Titolo nota 06/09/2013

$a_0 = \square$

$a_1 = \square$

$a_2 = \square$

$a_3 = \square$

successioni ≠ formule

$a_n = \{$numero di persone al mondo con n capelli$\}$

$a_n = \{$numero di "e" che ci sono nel nome di un numero$\}$ ...

1, 2, 3, 4, 5, ...

$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 1+2$

$$a_n = 1+2+3+\dots+n = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\sum_{i=2}^{5} (i^2+1) = (2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)$$

DOUBLE-COUNTING:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & \dots & 1 \\ \shortparallel & \shortparallel & & & & \shortparallel \\ n+1 & n+1 & & & & n+1 \end{array} \quad \begin{array}{l} = a_n \\ = a_n \end{array}$$

$$2 \cdot a_n = n \cdot (n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)^3 - i^3 \qquad \sum_{k=1}^{n} 0 = k^3$$

$$(n+1)^3 = \boxed{\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3} = \sum_{k=0}^{n} \left(\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1\right) - \cancel{k^3} =$$

telescopica

$(\cancel{1^3} - 0^3)$
$\cancel{2^3} - \cancel{1^3}$
$\cancel{3^3} - \cancel{2^3}$
$4^3 - \cancel{3^3}$

$$= \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + \sum_{k=0}^{n} 3k + \sum_{k=0}^{n} 1 =$$

$$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + n+1$$

$$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

In questo modo, anche $\sum_{k=1}^{n} k^3$, $\sum_{k=1}^{n} k^4$, eccetera

In generale, no formule belle

Tranne $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum k\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$a, b \qquad x_n = an + b$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} ak+b = a\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + b\cdot n =$$

$$= a\frac{n(n+1)}{2} + b\cdot n$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$x_n = an+b$ $\Updownarrow$

$$k=1,2,3,\dots \quad \begin{cases} x_0 = b \\ x_{k+1} = x_k + a \end{cases}$$

$x_n = a^n$ $\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = x_k \cdot a \end{cases} \quad k=1,2,3,\dots$$

$$(*)\begin{cases} x_0 = c \\ x_{k+1} = a\cdot x_k + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 37 \\ x_{n+1} = 2x_n + 1 \end{cases} \quad n = \dots$$

<u>Idea</u>: senza b lo so fare, trasformo ed elimino b:

$y_k = x_k + \alpha$

$$(*)\begin{cases} y_0 = c + \alpha \\ y_{k+1} = x_{k+1} + \alpha = a x_k + b + \alpha = \end{cases}$$

$$= a(x_k+\alpha)-a\alpha+b+\alpha = a y_k + \underbrace{b+(1-a)\alpha}_{t.n.}$$

Posso scegliere α in modo che $\underline{t.n.}=0$

$$\alpha = -\frac{b}{1-a}$$

$$\begin{cases} y_0 = c - \frac{b}{1-a} \\ y_{k+1} = a y_k \end{cases} \Rightarrow y_n = \left(c-\frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = y_n - \alpha = \left(c-\frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$\begin{cases} x_0 = 37 \\ x_{n+1} = 2x_n+1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_0 = 38 \\ y_{n+1} = x_{n+1}+1 = 2x_n+2 = 2(x_n+1) = 2y_k \end{cases}$$

$$\boxed{y_n = x_n + 1}$$

$$\begin{cases} x_0 = \dots \\ x_1 = \dots \\ x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n + \underline{c} \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

c si fa sparire col trucco di prima

$y_n = x_n +$ qualcosa,

scelgo bene "qualcosa"

ignoriamole per un attimo

$$\begin{cases} x_0 = \ldots & (1) \\ x_1 = \ldots & (2) \\ x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n & (3) \end{cases}$$

Trucco: proviamo a cercare soluzioni del tipo

$$x_n = \lambda^n$$

$$\lambda^{\cancel{n}+2} = a\lambda^{\cancel{n}+1} + b\lambda^{\cancel{n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^2 = a\lambda + b \quad \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \text{ soluzioni}$$

$x_n = \lambda_1^n$ | $x_n = \lambda_2^n$ soddisfano (3)

$x_0 = 1$ | $x_0 = 1$

$x_1 = \lambda_1$ | $x_1 = \lambda_2$

Trucco n. 2: se ho due soluzioni di (3), x_n y_n
allora per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ (o complessi...)
$z_n = p \cdot x_n + q \cdot y_n$ è anche lei soluzione di (3)

$$\begin{array}{l} p \cdot \\ q \cdot \end{array} \begin{pmatrix} x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \\ y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{p x_{n+2} + q y_{n+2}}_{z_{n+2}} = a(p x_{n+1} + q y_{n+1}) + b(p x_n + q y_n)$$

$$z_{n+2} = a z_{n+1} + b z_n$$

In part. $z_n = p \cdot \lambda_1^n + q \cdot \lambda_2^n$ sono soluzioni

Se io vi do α e β, sapete trovarne una che ha $z_0 = \alpha$ $z_1 = \beta$

$$\begin{cases} \alpha = p + q \\ \beta = p \cdot \lambda_1 + q \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

Risolvo il sistema, trovo p, q

Esempio: Fibonacci!

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1) Trovo sol. speciali

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n \iff \underbrace{\lambda^2 = \lambda + 1}_{\text{polinomio caratteristico}}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2) aggiusto cond. iniziali: trovo p, q

$z_n = p \cdot \lambda_1^n + q \cdot \lambda_2^n$ tale che

$$\begin{cases} 0 = F_0 = z_0 = p + q \\ 1 = F_1 = z_1 = p \cdot \lambda_1 + q \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q = 0 \\ p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$q = -p \qquad p\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{2} - \frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$p \cdot \sqrt{5} = 1 \qquad p = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad q = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Magicamente, per ogni n i $\sqrt{5}$ si semplificano e viene un numero intero (provate per es. per $n=2,3$)

Dettaglio:
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 1 \\ z_{n+2} = z_{n+1} + z_n \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} z_n = F_n \,?$$

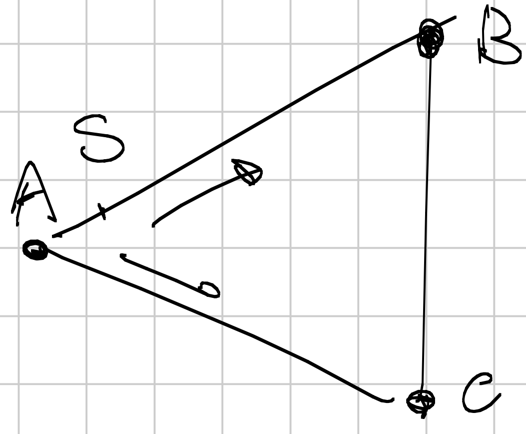
sì : induzione!

Cosa può andare storto nel metodo sopra?

1) l'eq. di 2° grado non ha sol. reali
   $\rightarrow$ uso i complessi

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ Trucco: $x_n = \lambda_1^n \quad y_n = n \cdot \lambda_1^n$

3) Il sistema per p, q non ha sol.
   no mai! $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (claim)



S gira tra i bar A, B, C

Parte da A al tempo 0

Ad ogni "passo" prende una strada a caso delle due e va al bar in fondo a quella strada

Qual è la probabilità che sia in A (o B o C) dopo 2013 passi?

A_K = Prob (al bar A al tempo K)

B_K, C_K analoghi

$A_0 = 1 \qquad B_0 = 0 \qquad C_0 = 0$

$$\begin{cases} A_{K+1} = \frac{1}{2} B_K + \frac{1}{2} C_K \\ B_{K+1} = \frac{1}{2} A_K + \frac{1}{2} C_K \\ C_{K+1} = \frac{1}{2} A_K + \frac{1}{2} B_K \end{cases}$$

$B_K = C_K$ (simmetria, o induzione)

shift!

$$\begin{cases} A_{K+1} = B_K \ (+\ \alpha A_K) \\ B_{K+1} = \frac{1}{2} A_K + \frac{1}{2} B_K \end{cases}$$

$A_K = B_{K-1}$

$$\boxed{B_{k+1} = \frac{1}{2}B_k + \frac{1}{2}B_{k-1}}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$B_k = p \cdot 1^k + q \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$B_0 = 0 \qquad B_1 = \frac{1}{2}$$

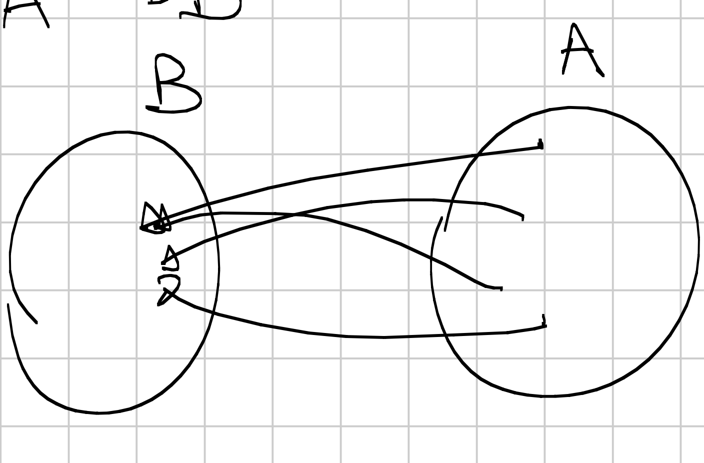
risolvo, $B_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$

FUNZIONI

cosa <u>non</u> è una funzione

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f: A \to B$$



$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ {numero di volte che la lettera "e" compare nel nome del numero}

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 37 \\ 2 & \text{se } x > 38 \\ 3 & \text{se } 37 < x \le 38 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Devo associare un elemento di B a ogni elemento di A

$\cancel{f(x) = 1/x \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad [0, \infty) \to (-1, 1)$

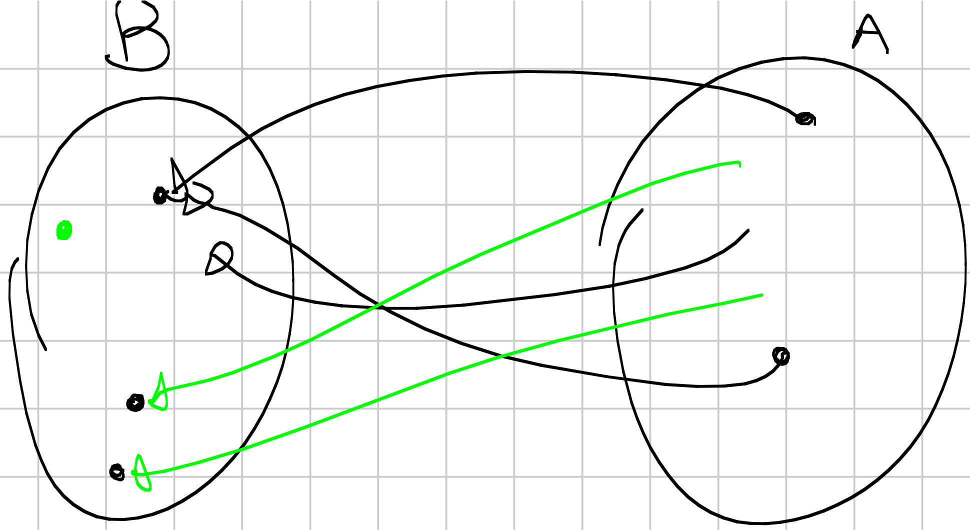
$f: A \to B$

obbligo

indicazione

$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

però -2 non viene preso mai



Iniettività: non esiste $b \in B$ su cui arrivano due frecce
Suriettività: ogni el. di B raggiunto da una freccia

In: $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Sur: $\forall b \in B \quad \exists a$ t.c. $f(a) = b$

$f(x) = x^2 \qquad R \to R$

$f(-1) = f(1)$ → no iniettiva

-1 non è f(niente) → no suriettiva

<u>Immagine</u> di f: insieme dei val. raggiunti $[0, \infty)$

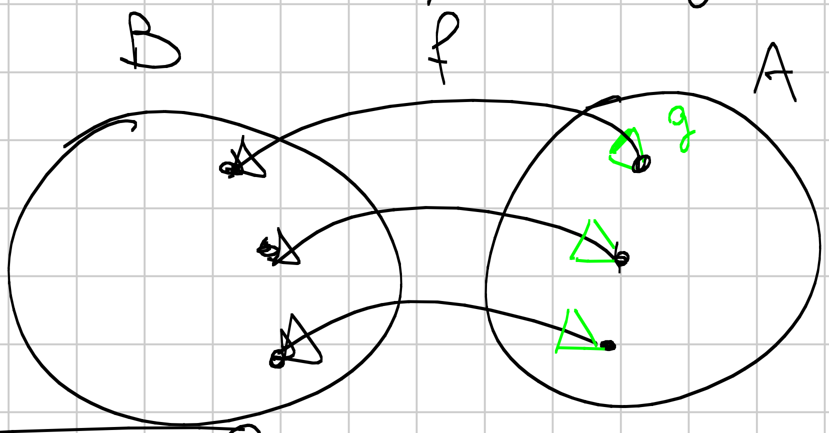
$f(x) = x^2 \qquad f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

suriettiva: sì!
iniettiva: sì!

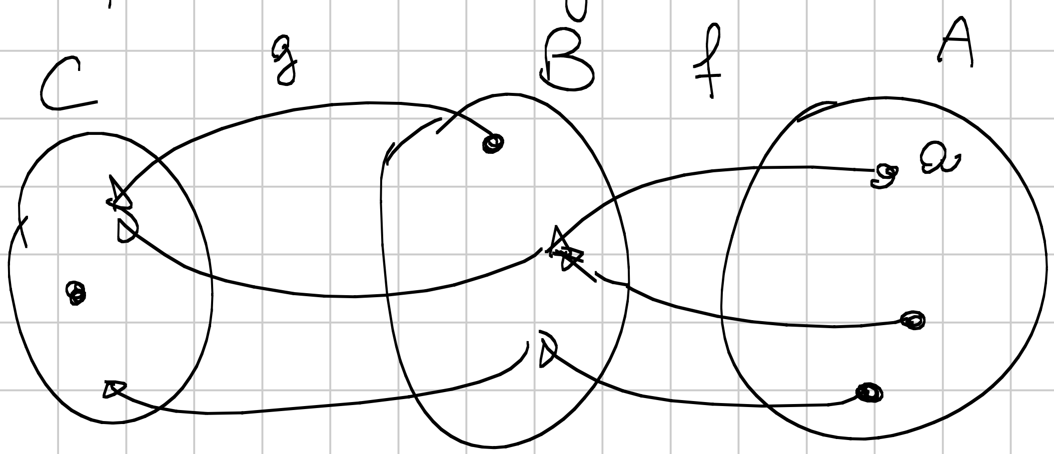
suriettiva + iniettiva = invertibile

$f: A \to B$ in + surj $\Rightarrow$ esiste $g: B \to A$

tale che $f(g(b)) = b$ $\quad g(f(a)) = a$



$f: A \to B \qquad g: B \to C$



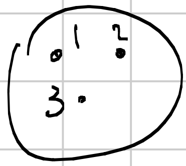
Dato $a \in A$, faccio

$$a \mapsto g(f(a)) \qquad g \circ f$$

$h: A \to C$

Occhio all'ordine!

$g \circ f$ vuol dire "prima f"

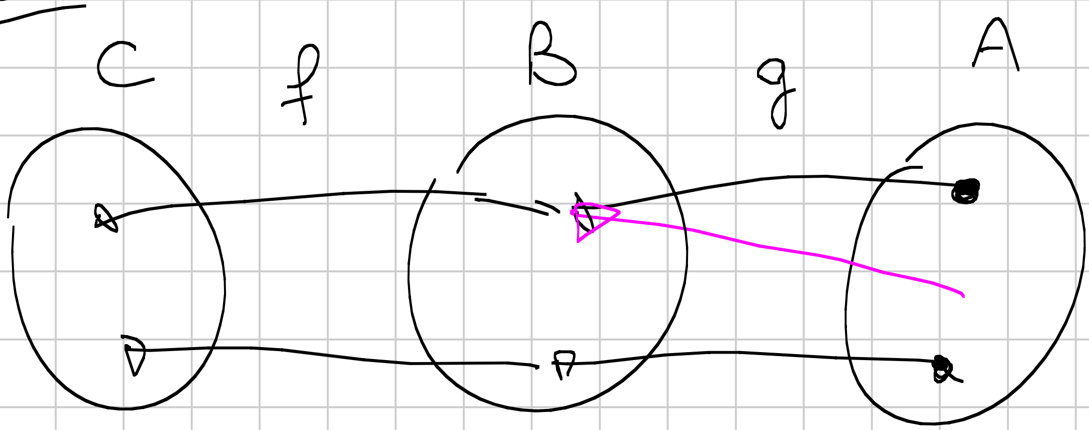


$f: \{1, 2, \dots 10\} \to \{1, 2, \dots 8\}$

$g: \{1, \dots 8\} \to \{1, \dots 10\}$

Th: $f \circ g$ iniettiva $\Rightarrow$ g iniettiva
$f \circ g$ suriettiva $\Rightarrow$ f suriettiva

Dim:



Monotonia: monotono < crescente / decrescente

f crescente: $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

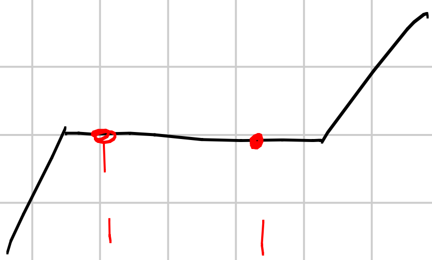
f strettamente crescente $a < b$ $f(a) < f(b)$

decrescente $a \leq b$ $f(a) \geq f(b)$

str. dec. $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

f str. cr. $f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b$

f cr. $f(a) \leq f(b)$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $a \leq b$



b a

Equazione funzionale $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(*) \quad f(x+f(y)) = f(x)+y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Trovare tutte le $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano $(*)$

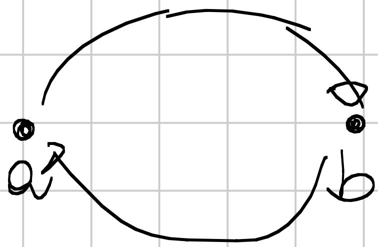
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

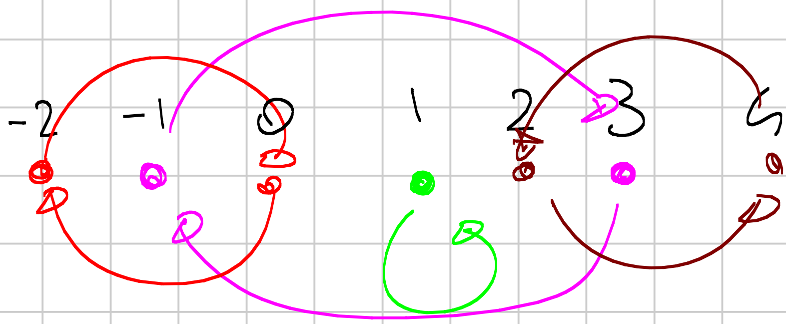
$$f(f(x)) = x$$

$f(x)=x$ funziona

$f(x)=-x$

Ce n'è una marea!





$f(-2)=0 \qquad f(1)=1$

$f(-1)=3 \qquad \vdots$

$f(0)=-2$

Equazione di Cauchy:

Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$P(x,y) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Dim: i) Dimostro che $f(0)=0$

Uso $P(0,0)$

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$
$$\Downarrow$$
$$f(0) = 2f(0)$$
$$\Downarrow$$
$$f(0) = 0$$

~~$P(0,y)$: $f(0+y) = f(0) + f(y)$~~ $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}}$

quando scrivete due formule "presentate" le variabili

ii) Provo che $f(-x) = -f(x)$

$P(x,-x)$:

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$f(-x) = -f(x)$$

Diamo un nome a $f(1)$: $\quad f(1) = a$

iii) Provo che $f(2) = 2a$

$P(1,1)$: $f(1+1)=f(1)+f(1)=2a$

$P(2,1)$ $f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2a+a=3a$

iv) Dimostro che $f(n)=an \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Passo base ...

Passo ind. $P(n,1)$: $f(n+1)=f(n)+f(1)=na+a$

v) $f(n)=an \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

Per (ii), $f(-n)=-f(n)=-an \quad \forall n\in\mathbb{N}$

quindi $f(x)=ax$ anche per x int. negativo.

vi) (**) $f(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$
$\forall x_1,x_2,\dots x_n\in\mathbb{R}$

Per induzione:

$P(x_1+x_2+\dots+x_n,\ x_{n+1})$

$f(\underbrace{x_1+x_2+\dots+x_n}_{a}+\underbrace{x_{n+1}}_{b})=f(x_1+\dots+x_n)+f(x_{n+1})=$

vii) $f\left(\frac{1}{n}\right)=a\cdot\frac{1}{n}$

Applico (**) con $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$

$$f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}+\dots+\tfrac{1}{n}}_{n\text{ volte}}\Big)=\underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)+f\left(\tfrac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{n\text{ volte}}$$

$a = f(1) = n\, f\left(\frac{1}{n}\right)$

vii) $f\left(\frac{k}{n}\right) = a \cdot \frac{k}{n}$ razionali positivi

$$f\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{k \text{ volte}}\Big) = \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)+f\left(\tfrac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{k \text{ volte}}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = k\,a \cdot \frac{1}{n}$$

ix) raz. negativi

x) verifica sui razionali $a(x+y) = f(x+y)$

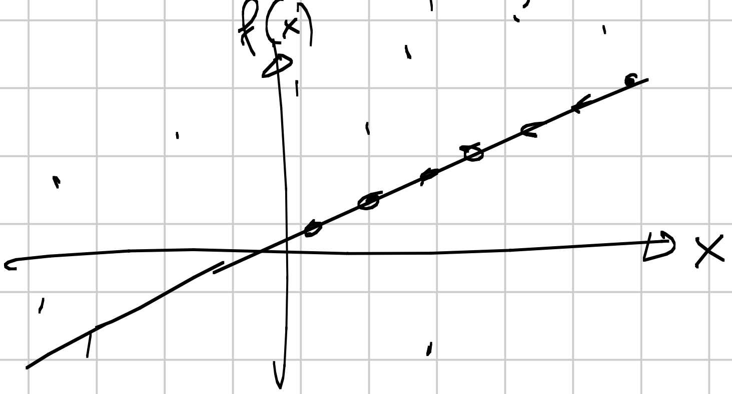
$f(x)+f(y) = ax+ay$

Manca da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

ci sono tante funzioni (anche brutte)

che soddisfano $f(x+y) = f(x)+f(y)$, su $\mathbb{R}$

non solo $f(x) = a \cdot x$



se f soddisfa $f(x+y) = f(x)+f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ e

Th: se esiste un quadratino del piano su cui il grafico di f non passa, allora

$$f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(*)\quad f(x^2+y) = (f(x))^2 + f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$P(x,0): \quad f(x^2) = [f(x)]^2 + \cancel{f(0)}$

$P(0,0): \quad \cancel{f(0)} = f(0)^2 + \cancel{f(0)} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$(*)\quad f(x^2) = [f(x)]^2$

$Q(x,y): f(x^2+y) = f(x^2) + f(y) \qquad x^2 =: z$

$Q(z,y)\ f(z+y) = f(z) + f(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}$

$\forall\, z \geq 0$ ← occhio!

Dati z, y, scelgo
≥ 0

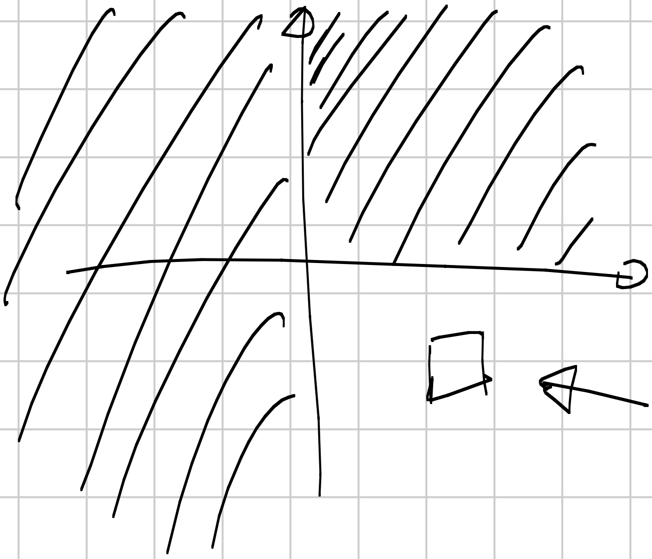
$Q(\sqrt{z}, y): \quad f(z+y) + f(z) + f(y)$

$R(t,-t): \quad f(-t) = -f(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

$(*)\quad f(x^2) = [f(x)]^2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, z \geq 0$

$$f(z) = f\left((\sqrt{z})^2\right) \overset{!}{=} \left[f(\sqrt{z})\right]^2 \geq 0$$



c'è quadratino vuoto!

→ crescenza, monotonia

→ continuità

Riepilogo degli errori comuni:

→ $ffx = x$ non segue $f(x) = x$

$$ffx = f(x+8)$$

$\cancel{\Downarrow}$ iniettività

$$f(x) = x+8$$

→ $f(f(x)) = f(x) + 8$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = z$

$f(z) = z+8$ $\cancel{\forall z \in \mathbb{R}}$

a meno che non sia suriettiva

$$f(f(x)) = 3x^3 + 5$$

biiettiva = iniett + surj

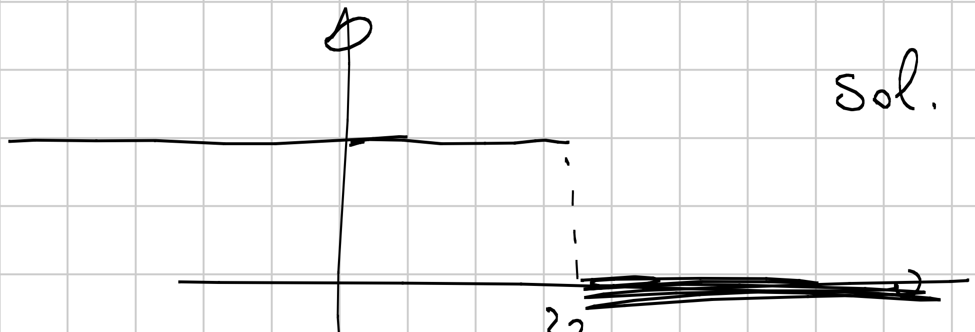
bigettiva
biiettiva

bijective

$b\hat{i}$

$$f(x) = [f(x)]^2 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}$$

Allora le sol. sono $f(x)=1$ $f(x)=0$ No!



sol. miste

Prendo a $f(a)=0$
b $f(b)=1$

$$f((x+y)+z) \qquad f(x+(y+z))$$

$$f(x+y^2+2xf(x)f(y^2)) = f(x)f(y)$$

$$= f(y+x^2+2yf(y)f(x^2))$$

Tanti esempi sui senior scorsi ...